BAB III
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori untuk acuan pemecahan masalah yang digunakan untuk merumuskan hipotesis, yang meliputi sistem berderajat kebebasan tunggal, sistem berderajat kebebasan banyak, *mode shape* dan frekuensi, persamaan gerak akibat beban gempa, jenis-jenis simpangan dan efeknya terhadap kerusakan, persaman differensial independen, dan respon terhadap beban gempa.

3.1 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal

Sistem dengan derajat kebebasan tunggal mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jumlah derajat kebebasan biasanya dapat dikaitkan dengan jumlah massa, artinya struktur dengan 10 tingkat misalnya akan mempunyai 10 massa dan mempunyai 10 derajat kebebasan dengan anggapan bahwa struktur berperilaku seperti *Shear Building*. Struktur dengan derajat kebebasan tunggal atau *single degree of freedom* (SDOF) berarti hanya akan mempunyai satu massa. Bangunan satu-tingkat, menara tandon air "*water lower*" adalah salah satu contoh bangunan dengan derajat kebebasan tunggal.

Di dalam menyelesaikan masalah dinamik, kita disarankan untuk memakai metode yang menghasilkan suatu analisa yang tersusun dan sistematik. Yang terutama dan barangkali yang paling penting dalam praktik analisa dinamis adalah menggambar sebuah *diagram free body* (benda bebas) dari sistem yang memungkinkan penulisan besaran matematis dari sistem tersebut. *Diagram free body* (DFB) adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dari contoh struktur pada Gambar 3.1

Berdasarkan keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1.d adalah :

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = P(t). \tag{3.1}$$

$$F_I(t) = m\,\ddot{y}(t)\,, \quad F_D(t) = c\,\dot{y}(t)\,, \quad \text{dan} \quad F_S(t) = k\,y(t). \tag{3.2}$$

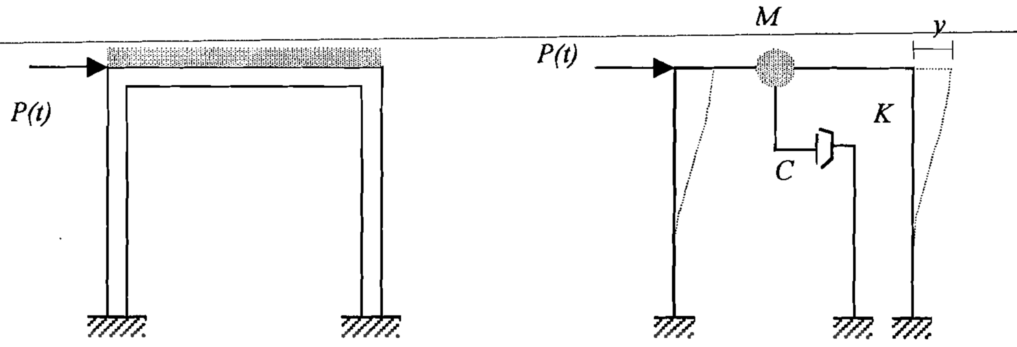
F_I adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekakuan kolom, $P(t)$ adalah beban dinamik, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan, dan ***m***, *c*, *k* masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1), menjadi :

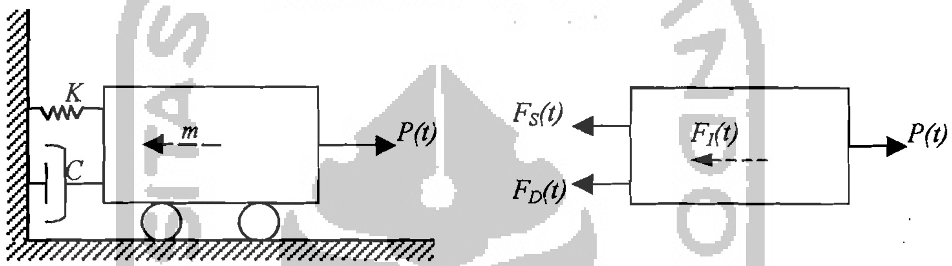
$$m\,\ddot{y}(t) \;+\; c\,\dot{y}(t) \;+\; k\,y(t) \;=\; P(t). \tag{3.3}$$

Persamaan diatas, disebut persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*) pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}, \dot{y}, y, P$, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P. \tag{3.4}$$



a. struktur SDOF b. struktur yang disederhanakan



c. Model Matematik d. *"Free Body"* Diagram

Gambar 3.1 Sistem berderajat kebebasan tunggal akibat beban dinamik

3.2 Sistem Berderajat Kebebasan Banyak

Secara umum struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Struktur bangunan gedung justru banyak yang mempunyai derajat kebebasan banyak (*multi degree of freedom*, MDOF). Struktur seperti pada cerobong asap atau struktur lain yang mirip merupakan struktur yang mempunyai bentuk fisik kontinyu, maka pada struktur- struktur seperti itu akan mempunyai derajat kebebasan yang tak terhingga, walaupun terkadang dianggap sebagai struktur yang mempunyai derajat kebebasan terbatas.

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak umumnya massa struktur dapat digumpalkan (*lumped mass*) kedalam tempat-tempat tertentu misalnya digumpalkan pada tiap-tiap tingkat. Dengan demikian struktur yang tadinya mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan menjadi struktur dengan derajat kebebasan terbatas.

Banyaknya derajat kebebasan berasosiasi dengan jumlah massa. Pada struktur yang mempunyai *n* tingkat, akan mempunyai *n* derajat kebebasan dan mempunyai *n* mode. Bangunan geser (*shear building*) adalah salah satu bentuk struktur dengan sistem berderajat kebebasan banyak (MDOF). Bangunan geser dapat didefinisikan sebagai struktur dimana tidak terjadi rotasi pada penampang horisontal bidang lantainya. Pada prinsip bangunan geser (*shear building*), massa total dari struktur terpusat dari bidang lantai, balok pada lantai kaku tak hingga dibandingkan dengan kolom, dan deformasi dari struktur tidak dipengaruhi gaya aksial yang terjadi pada kolom.

Prinsip pertama mentransformasikan struktur dengan derajat kebebasan tak hingga (akibat massa yang terbagi pada struktur) menjadi struktur dengan hanya beberapa derajat kebebasan sesuai massa yang terkumpul pada bidang lantai. Prinsip kedua menyatakan bahwa hubungan antara balok dan kolom, kaku terhadap rotasi, dan prinsip ketiga memungkinkan terjadi kondisi dimana balok kaku tetap horizontal selama bergerak.

Gambar 3.2 (b) merupakan model-model yang ekuivalen untuk bangunan geser sedangkan model matematisnya terdapat pada Gambar 3.2 (a). Selanjutnya didapat persamaan-persamaan gerak dari bangunan berlantai tiga yang berasal dari diagram *free body*. Gambar 3.2 (c), dengan menyamakan jumlah gaya-gaya yang bekerja pada setiap massa dengan nol, yaitu :

$$p(t) - ky(t) - c\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t). \tag{3.3}$$

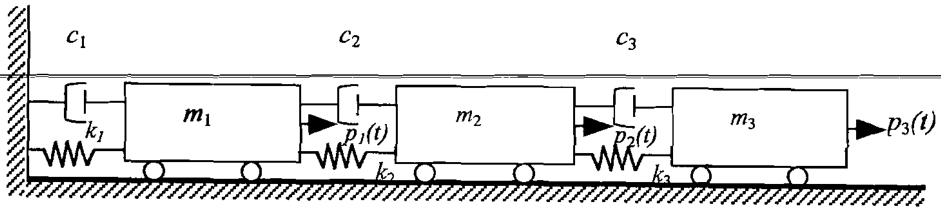
Nilai $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P. Persamaan differensial untuk Gambar 3.2 disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Berdasarkan pada prinsip kesetimbangan dinamik pada diagram *free body* maka diperoleh,

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 + c_1\dot{y}_1 - k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - p_1 = 0, \tag{3.4 a}$$

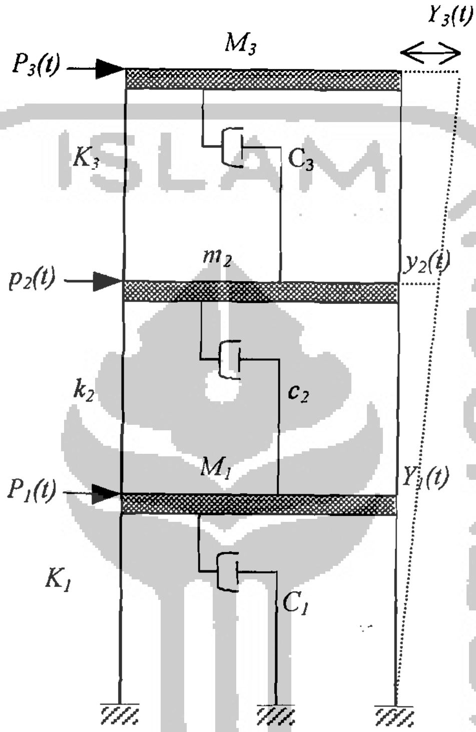
$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_3(y_3 - y_2) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - p_2 = 0, \tag{3.4 b}$$

$$m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - p_3 = 0. \tag{3.4 c}$$

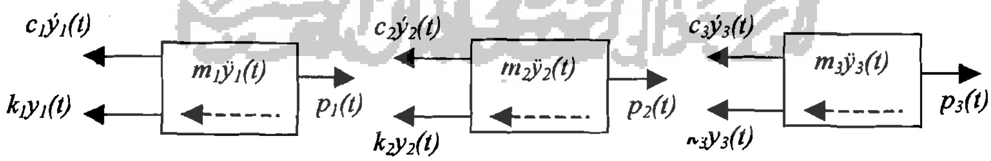
Dari persamaan 3.4 tampak bahwa untuk memperoleh kesetimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman, dan simpangan massa sebelum dan sesudah massa/tingkat yang ditinjau. Persamaan differensial dengan sifat-sifat ini disebut *coupled system of equations* (sistem persamaan gandeng) karena persamaan-persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain. Penyelesaian dari persamaan *coupled* harus dilakukan secara simultan, artinya penyelesaian yang melibatkan seluruh persamaan yang ada.



(a) Model Matematis



(b) Model MDOF



(c) Model Kesetimbangan Gaya

Gambar 3.2 Sistem berderajat kebebasan banyak

Persamaan (3.4) kemudian disusun menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) akan diperoleh

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = p_1, \tag{3.5a}$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3\dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = p_2, \tag{3.5b}$$

$$m_3\ddot{y}_3 - c_3\dot{y}_2 + c_3\dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = p_3. \tag{3.5c}$$

Selanjutnya persamaan 3.5 lebih tepat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{P\}, \tag{3.6}$$

disini $[M]$, $[C]$, $[K]$ berturut-turut adalah matrik massa, redaman, dan kekakuan,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \tag{3.7a}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \tag{3.7b}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \tag{3.7c}$$

sedangkan $\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, \{y\}$ dan $\{p\}$ berturut-turut adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban dalam bentuk

$$\{\ddot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \text{ dan } \{P\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}. \tag{3.8}$$

Pada umumnya, suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar misalnya akibat beban angin, getaran akibat putaran mesin (beban harmonik) ataupun akibat beban gerakan tanah/gempa. Gerakan itu dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *Forced Vibration System*. Gerakan suatu massa yang bukan diakibatkan oleh beban luar namun oleh adanya suatu nilai awal (*initial condition*) misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar y_n dan apabila gaya tarik tersebut dilepas kembali maka massa akan bergerak. Peristiwa gerakan massa tersebut dinamakan getaran bebas atau *Free Vibration System*. Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan permasalahan analisa dinamika struktur.

Pada getaran bebas untuk struktur MDOF maka persamaan differensial gerakannya adalah

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=0. \qquad (3.9)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur yang dianggap tanpa redaman, bila nilai rasio redaman (*damping ratio*) kecil. Maka persamaan (3.9) akan menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=0. \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.10) diasumsikan pada getaran bebas, maka vektor y berbentuk

$$\{y\}=\{\phi\}z, \qquad (3.11a)$$

dan

$$\{\ddot{y}\}=\{\phi\}\ddot{z}. \qquad (3.11b)$$

$\{\phi\}$ adalah vektor bentuk goyangan (*mode shape*) yaitu suatu vektor yang tidak berdimensi, yang memiliki paling sedikit sebuah elemen yang tidak sama dengan nol. Sedangkan z dan $\ddot{z}$ adalah vektor perpindahan dan vektor percepatan. Jika persamaan (3.11) dimasukkan kedalam persamaan (3.10), maka akan didapat:

$$[M]\{\phi\}\ddot{z} + [K]\{\phi\}z = 0 \cdot \tag{3.12}$$

$[M]$ dan $[K]$ adalah matriks konstan dan pada sebuah hipotesis disebutkan bahwa $\{\Phi\}$juga merupakan matriks konstan, maka akan didapatkan

$$\ddot{z} + (\text{constanta})\ z = 0, \tag{3.13}$$

jika konstanta di atas adalah ω_n^2 (*undamped natural frequency*), maka persamaan (3.13) menjadi

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = 0, \tag{3.14}$$

persamaan (3.14) diselesaikan dengan

$$z = A \sin \omega_n t, \tag{3.15}$$

dengan demikian maka persamaan (3.11) akan menjadi

$$\{y\} = \{\phi\} A \sin \omega\, t, \tag{3.16a}$$

$$\{\dot{y}\} = \omega \{\phi\} A \cos \omega\, t, \tag{3.16b}$$

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{\phi\} A \sin \omega\, t, \tag{3.16c}$$

persamaan (3.16) dimasukkan ke dalam persamaan (3.12) didapatkan

$$\left(-\omega^2 [M]\{\phi\} A \sin \omega t + [K]\{\phi\} A \sin \omega t\right) = 0, \tag{3.17}$$

persamaan (3.17) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*), jika A dan ω keduanya adalah tidak sama dengan nol, sehingga

$$\left|[K] - \omega^2 [M]\right|\{\phi\} = 0, \tag{3.18}$$

persamaan (3.18) akan ada penyelesaiannya atau suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan $([K] - \omega^2 [M])$ adalah nol, maka

$$\left|[K] - \omega^2 [M]\right| = 0 \cdot \tag{3.19}$$

Jumlah mode pada struktur dengan derajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. Mode itu sendiri adalah ragam goyangan suatu struktur bangunan. Apabila jumlah derajat kebebasan adalah n, maka persamaan (3.19) akan menghasilkan suatu persamaan polinomial yang selanjutnya akan menghasilkan ω_n untuk j= 1, 2, 3,....n. Masing-masing frekuensi sudut (ω_n) disubstitusikan kedalam persamaan (3.18) sehingga diperoleh nilai-nilai $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ... \phi_n$. Dengan diperolehnya nilai-nilai frekuensi sudut untuk setiap mode, maka akan diperoleh nilai periode getar struktur (T) dan nilai frekuensi struktur (f) menggunakan persamaan (3.20)

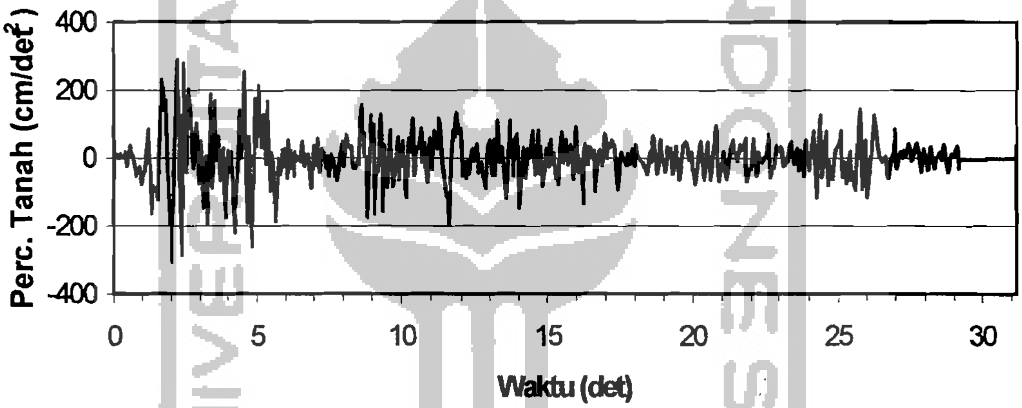
$$T = 2\pi / \omega \text{ dan } f = 1/T \quad (3.20)$$

3.3 Persamaan Gerak Struktur SDOF akibat Beban Gempa

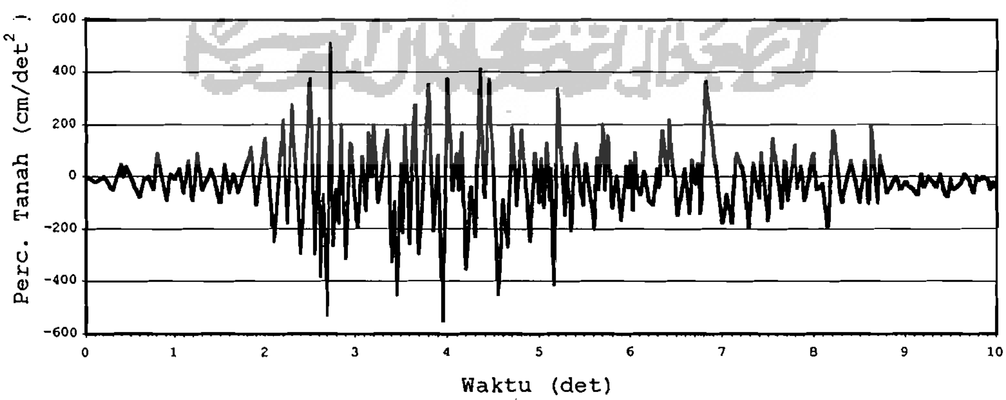
Beban gempa adalah suatu beban yang unik. Umumnya yang bekerja pada struktur dalam satuan gaya, tetapi gempa berupa percepatan tanah. Beban lain biasanya statis, tidak berubah pada periode waktu yang pendek. Tetapi beban gempa adalah beban yang dinamis yang berubah dengan sangat cepat dalam periode waktu yang pendek, atau boleh dikatakan dapat berubah setiap detik. Beban lain biasanya bekerja pada arah vertikal, tetapi beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal maupun horizontal bahkan beban gempa dapat berupa putaran (Hu, Liu and Dong, 1996).

Analisis yang didasarkan pada riwayat waktu dapat dipergunakan untuk memperkirakan besarnya jarak pemisah antara bangunan yang berdekatan didasarkan pada simpangan maksimum relatif. Pada tugas akhir ini dipakai analisa berupa *time history* dari gempa El Centro, 1940 dan gempa Koyna 1967 (Gambar 3.3 dan 3.4).

Gempa El Centro dan gempa Koyna mempunyai kandumgan frekuensi dominan yang berbeda. Tinjauan kandungan frekuensi beban gempa pada penelitian ini dilihat dari besarnya rasio percepatan maksimum dengan kecepatan maksimum yang umumnya dilenal dengan A / V rasio. Data kandungan frekuensi beban gempa yang disajikan pada Tabel 3.1 berikut, diambil dari penelitian Prasetyo dan Arminta (2000).



Gambar 3.3 Percepatan Tanah Gempa El Centro, 1940



Gambar 3.4 Percepatan Tanah Gempa Koyna 1967

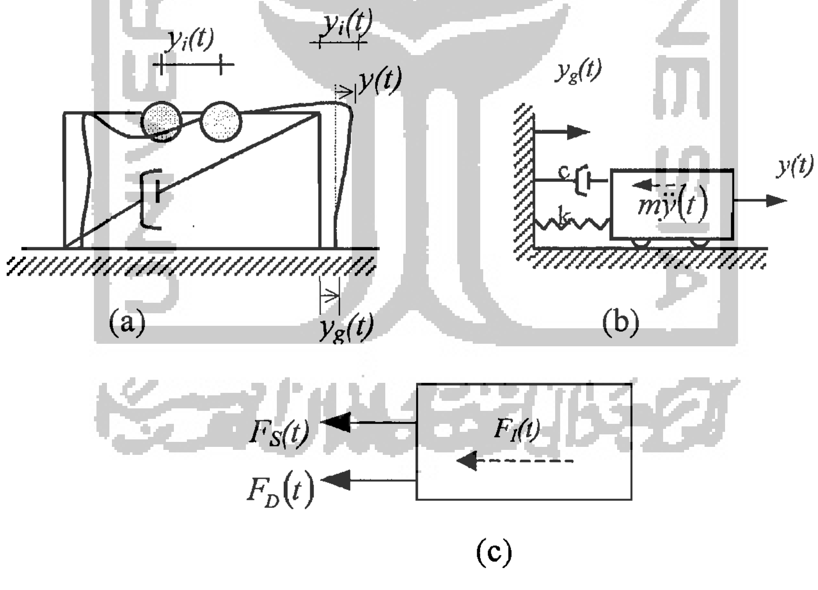
Tabel 3.1 Data kandungan frekuensi beban gempa (A/V rasio)

No	Gempa	A maks (cm / det^2)	V maks (cm /det)	A/V rasio (Hz)	Keterangan
1	El Centro	312.62	33.121600	0.96312	Integrasi
2	Koyna	548.79	16.132091	3.46774	Integrasi

Keterangan tentang besarnya nilai kandungan frekuensi gempa berdasarkan pendekatan A/V rasio dapat dilihat pada Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2 Kandungan frekuensi gempa berdasarkan A/V rasio

A/V rasio (Hz)	Kandungan frekuensi gempa
< 0.8	Rendah
0.8 < A/V rasio < 1.2	Sedang
> 1.2	Tinggi



Gambar 3.5 Sistem derajat kebebasan tunggal dengan beban gempa

Persamaan gerakan struktur SDOF akibat beban gempa, dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajat kebebasan tunggal (Gambar 3.5 a), sedangkan model matematisnya pada Gambar 3.5 b.

Dengan menggunakan konsep kesetimbangan dinamis, dari diagram *free body* pada Gambar 3.5 c , maka akan didapatkan persamaan

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0 \cdot \tag{3.21}$$

Sedangkan $\ddot{y}_i(t)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.5 a adalah :

$$\ddot{y}_i(t) = \ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t). \tag{3.22}$$

$$F_I(t) = m\ddot{y}(t), \quad F_D(t) = c\dot{y}(t), \quad \text{dan} \quad F_S(t) = ky(t). \tag{3.23}$$

F_I adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekuatan kolom, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan, dan *m, c, k* masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.23) ke dalam persamaan (3.21), maka persamaan (3.21) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y}_i(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0, \tag{3.24}$$

$$m(\ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t)) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0, \tag{3.25}$$

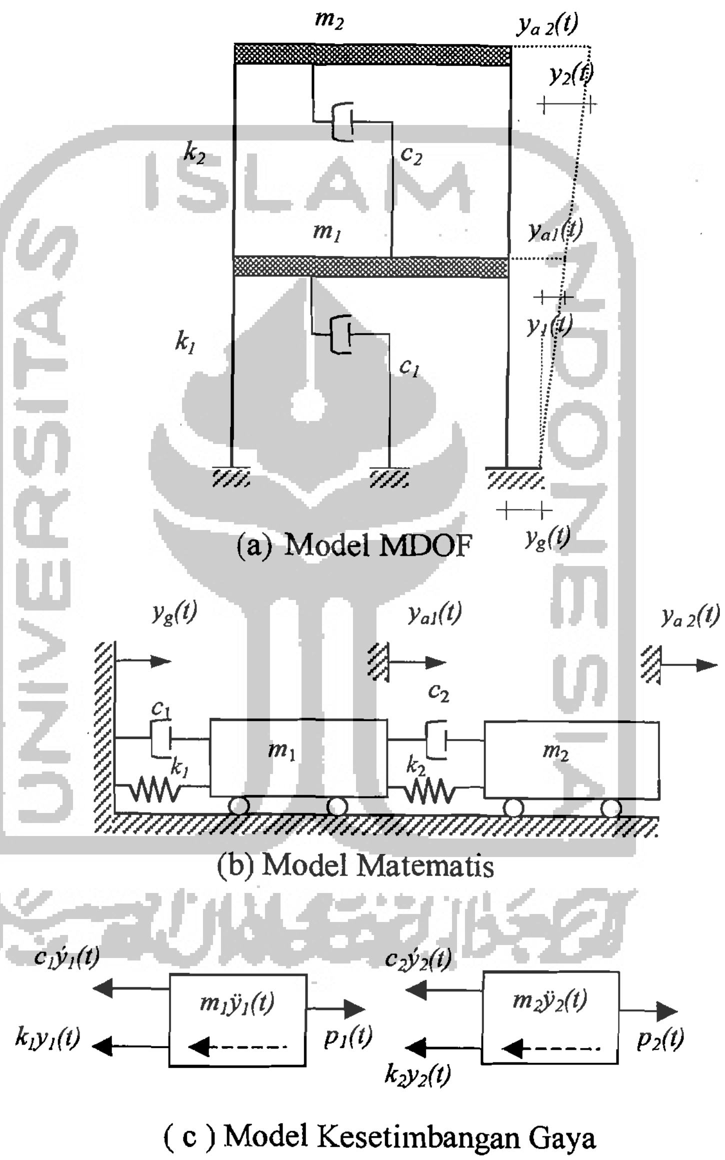
$$m\ddot{y}_g(t) + m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0, \tag{3.26}$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_g(t). \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) adalah persamaan differensial gerakan gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat (*base motion*). Ruas kanan pada persamaan (3.27) biasa disebut sebagai beban gempa. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, dan y sehingga persamaan (3.27) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \,. \tag{3.28}$$

3.4 Persamaan Gerak Struktur MDOF Akibat Beban Gempa



Gambar 3.6 Sistem berderajat kebebasan banyak dengan beban gempa

Persamaan gerakan struktur MDOF akibat beban gempa, dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajat kebebasan banyak (Gambar 3.5 a), sedangkan model matematisnya pada Gambar 3.5 b.

Dengan menggunakan konsep kesetimbangan dinamis, dari diagram *free body* pada Gambar 3.5 c , maka akan didapatkan persamaan

$$m_1\ddot{y}_{a1} + c_1(\dot{y}_{a1} - \dot{y}_g) + k_1(y_{a1} - y_g) - c_2(\dot{y}_{a2} - \dot{y}_{a1}) - k_2(y_{a2} - y_{a1}) = 0, \quad (3.29)$$

$$m_2\ddot{y}_{a2} + c_2(\dot{y}_{a2} - \dot{y}_{a1}) + k_2(y_{a2} - y_{a1}) = 0, \quad (3.30)$$

dalam menyatakan simpangan lantai relatif terhadap simpangan tanah, didapatkan

$$y_1 = y_{a1} - y_g, \quad (3.31)$$

$$y_2 = y_{a2} - y_g, \quad (3.32)$$

dengan mendifferensiasikan persamaan (3.31) dan (3.32) didapat

$$\ddot{y}_{a1} = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_g, \quad (3.33)$$

$$\ddot{y}_{a2} = \ddot{y}_2 + \ddot{y}_g, \quad (3.34)$$

substitusi persamaan (3.31) dan (3.32) serta persamaan (3.33) dan (3.34) menghasilkan

$$m_1(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_g) + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 - c_2((\dot{y}_2 + \dot{y}_g) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_g))$$

$$-k_2((y_2 + y_g) - (y_1 + y_g)) = 0, \quad (3.35)$$

$$m_2(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_g) + c_2((\dot{y}_2 + \dot{y}_g) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_g)) + k_2((y_2 + y_g) - (y_1 + y_g)) = 0, \quad (3.36)$$

$$m_1\ddot{y}_1 + m_1\ddot{y}_g + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - c_2\dot{y}_2 - k_2y_2 = 0, \quad (3.37)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + m_2\ddot{y}_g - c_2\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = 0, \quad (3.38)$$

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - c_2\dot{y}_2 - k_2y_2 = -m_1\ddot{y}_g, \quad (3.39)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = -m_2\ddot{y}_g. \quad (3.40)$$

Persamaan (3.39) dan (3.40) adalah persamaan differensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan ganda akibat beban gempa (*base motion*). Ruas kanan pada persamaan (3.39) dan (3.40) disebut sebagai beban gempa. Untuk $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan seperti tertulis pada persamaan (3.39) dan (3.40) tersebut diatas.

3.5 Jenis-jenis Simpangan dan Efeknya Terhadap Kerusakan

1. Simpangan Relatif

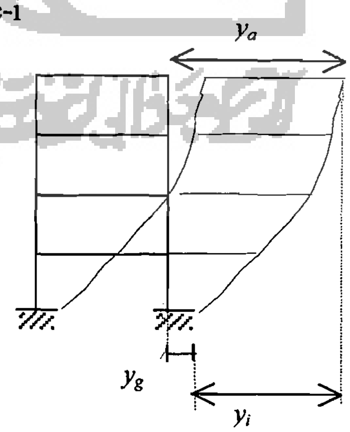
Simpangan ini adalah simpangan yang dihitung relatif terhadap lantai 1. Simpangan relatif ini mempunyai efek yang berpengaruh terhadap *Structural Pounding*. Hal ini dapat dicegah dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang saling berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan relatif pada setiap tingkat, dengan rumus:

$$y_i = (y_a - y_g), \tag{3.41}$$

dengan : y_a = simpangan absolut

y_i = simpangan relatif lantai ke-i

y_g = simpangan akibat tanah



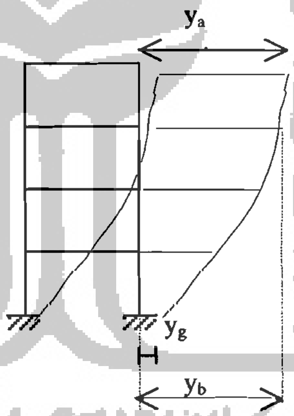
Gambar 3.7 Model Simpangan Relatif

2. Simpangan Antar Lantai *(Inter Story Drift)*

Simpangan ini adalah simpangan yang terjadi pada tiap lantai, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan lantai atas dikurangi simpangan lantai bawah. Terjadinya distribusi kekakuan struktur secara vertikal tidak merata yang menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah. *Inter Story Drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada daerah tingkat lemah, oleh karena itu kerusakan struktur akibat ini sangat sering terjadi. Simpangan antar lantai paling atas dihitung dengan:

$$\Delta y_i = (y_a - y_b), \tag{3.42}$$

dengan cara yang sama dapat dihitung untuk lantai yang lain.



Gambar 3.8 Model Simpangan Antar Tingkat

3. Simpangan absolut

Simpangan absolut merupakan penjumlahan antara simpangan relatif tiap lantai dengan simpangan akibat tanah. Simpangan absolut dihitung dengan rumus:

$$y_a = y_i + y_g\ , \tag{3.43}$$

dengan : y_a = simpangan absolut

y_i = simpangan relatif lantai ke-i

y_g = simpangan akibat tanah

3.6 Persamaan Differensial Independen (*Uncoupling Differential Equation*)

Struktur pada kondisi standar n derajat kebebasan akan mempunyai n *modes* atau n pola/ragam goyangan. Pada prinsip ini, masing-masing *mode* akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap-tiap massa. Simpangan massa ke-*i* atau Y_i dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap *modes*. Kontribusi mode ke-*j* terhadap simpangan horisontal massa ke-*i* tersebut dinyatakan dalam produk antara ϕ_{ij} dengan suatu model amplitudo Z_j, yang dinyatakan dalam bentuk :

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\}, \tag{3.44a}$$

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\}, \tag{3.44b}$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\}, \tag{3.44c}$$

subtitusi persamaan (3.44) kedalam persamaan (3.28) akan diperoleh :

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\phi]\{\dot{Z}\} + [K][\phi]\{Z\} = -[M]\{1\}\ddot{u}_g, \tag{3.45}$$

apabila persamaan (3.45) dikalikan dengan *transpose* suatu *mode* $\{\phi\}^T$, maka

$$\{\phi\}^T[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + \{\phi\}^T[C][\phi]\{\dot{Z}\} + \{\phi\}^T[K][\phi]\{Z\} = -\{\phi\}^T[M]\{1\}\ddot{u}_g, \tag{3.46}$$

misal, akan ditinjau pengaruh mode ke-1 pada struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan gerak (3.46) berbentuk:

$$\{\phi_{11} \quad \phi_{21} \quad \phi_{31}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix}, \tag{3.47}$$

dengan catatan persamaan (3.46) dalam hubungan orthogonal, *i=j*. Pada kondisi orthogonal apabila i tidak sama dengan j maka perkalian matriks sama dengan nol.

$$\phi_i^T[M]\phi_j = 0, \qquad (3.48a)$$

$$\phi_i^T[K]\phi_j = 0, \qquad (3.48b)$$

$$\phi_i^T[C]\phi_j = 0, \qquad (3.48c)$$

untuk *mode* ke *j* maka secara umum persamaan (3.47) dapat ditulis dengan :

$$\{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j\ddot{Z}_j, \qquad (3.49)$$

dengan memperhatikan hubungan orthogonal maka persamaan (3.46) pada suku ke-2 dan ke-3 dapat diubah seperti pada persamaan (3.49), maka persamaan akan menjadi:

$$\{\phi\}_j^T[M][\phi]_j\{\ddot{Z}\}_j + \{\phi\}_j^T[C][\phi]_j\{\dot{Z}\}_j + \{\phi\}_j^T[K][\phi]_j\{Z\}_j = -\{\phi\}_j^T[M]\{1\}\ddot{u}_g. \qquad (3.50)$$

Persamaan (3.50) adalah persamaan differensial yang bebas/independent antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan orthogonal, baik orthogonal untuk matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan. Widodo, (1997) mengatakan bahwa apabila *i* tidak sama dengan *j* maka perkalian suku-suku pada persamaan (3.47) akan sama dengan nol, kecuali untuk *i=j*. Dengan demikian untuk *n* derajat kebebasan dengan *n* persamaan differensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent/uncoupling*. Dengan sifat-sifat itu maka persamaan differensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh *mode*.

Berdasarkan persamaan (3.50) maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass*), redaman dan kekakuan sebagai berikut:

$$M_j^* = \{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j, \qquad (3.51a)$$

$$C_j^* = \{\phi\}_j^T[C]\{\phi\}_j , \tag{3.51b}$$

$$K_j^* = \{\phi\}_j^T[K]\{\phi\}_j , \tag{3.51c}$$

dengan definisi seperti persamaan (3.51) maka persamaan (3.50) akan menjadi:

$$M_j^*\ddot{Z}_j + C_j^*\dot{Z}_j + K_j^*Z_j = -P_j^*\ddot{u}_g , \tag{3.52}$$

dengan,

$$P_j^* = \{\phi\}_j^T[M]\{1\} , \tag{3.53}$$

terdapat suatu hubungan bahwa:

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_j^*}{2M_j^*\omega_j} \text{, maka } \frac{C_j^*}{M_j^*} = 2\xi_j\omega_j , \tag{3.54a}$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \text{ dan } \Gamma_j = \frac{P_j}{M_j^*} , \tag{3.54b}$$

dengan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.54) maka persamaan (3.52) akan menjadi:

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j\ddot{u}_g , \tag{3.55}$$

dan,

$$\Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\phi\}_j^T[M]\{1\}}{\{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j} . \tag{3.56}$$

persamaan (3.56) sering disebut dengan partisipasi setiap mode atau *mode participation factor*. Selanjutnya persamaan (3.55) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j} + 2\xi_j\omega_j\frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} + \omega_j^2\frac{Z_j}{\Gamma_j} = -\ddot{u}_g , \tag{3.57}$$

apabila diambil suatu notasi bahwa:

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j}, \dot{g} = \frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} \text{ dan } g = \frac{Z_j}{\Gamma_j} , \tag{3.58}$$

maka persamaan (3.57) menjadi:

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{u}_g \,. \quad (3.59)$$

persamaan (3.59) adalah persamaan differensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap *mode.*

Nilai partisipasi tiap-tiap *mode* akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode ϕ_{ij} telah diperoleh. Nilai $\ddot{g}, \dot{g}$ dan g dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai Z_j dapat dihitung. Dengan demikian simpangan horisontal setiap tingkat akan dapat dihitung.

3.7 Respon terhadap Beban Gempa

Dengan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.59). Nilai g_j dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.59) dengan persamaan gerakan *mode* ke *n* dari sistem SDOF. Sistem SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency/* ω_n) dan rasio redaman (ξ) *mode* ke-*j* dari sistem MDOF, dengan j = 1,2,3,…,n.

Nilai yang akan dicari adalah g_j, dan misalnya dipakai metode *central difference* adalah sebagai berikut. Pada metode *central difference*, diperoleh hubungan awal bahwa,

$$\dot{g}_j = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{g}_j = \frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} \,, \quad (3.60)$$

subtitusi persamaan (3.60) kedalam persamaan (3.59) akan diperoleh,

$$\frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi\omega_{nj}\frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} + \omega_{nj}^2 g_j = -\ddot{u}_g \,, \quad (3.61)$$

persamaan (3.61) dapat ditulis menjadi,

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}+\frac{2\xi\omega_{nj}}{2\Delta t}\right]g_{j+1}=-\ddot{u}_g-\left[\omega_{nj}^2-\frac{2}{(\Delta t)^2}\right]g_j-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}-\frac{2\xi\omega_{nj}}{2\Delta t}\right]g_{j-1}, \qquad (3.62)$$

persamaan (3.62) dapat ditulis menjadi,

$$g_{j+1}=\frac{-\ddot{u}_g-ag_j-bg_{j-1}}{\hat{k}}, \qquad (3.63)$$

dengan,

$$a=\left[\omega_{nj}^2-\frac{2}{(\Delta t)^2}\right], \qquad (3.64a)$$

$$b=\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}-\frac{2\xi\omega_{nj}}{2\Delta t}\right], \qquad (3.64b)$$

$$\hat{k}=\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}+\frac{2\xi\omega_{nj}}{2\Delta t}\right], \qquad (3.64c)$$

setelah diperoleh nilai g untuk tiap-tiap *mode*. Selanjutnya nilai simpangan tiap *mode* dapat diperoleh y_j :

$$y_j=\Gamma_j\phi_j g_j\,. \qquad (3.65)$$

jarak antar bangunan dihitung berdasarkan nilai simpangan struktur, (PPTGIUG,1981)

$$S = 2(y_a+y_b)>7{,}5\ cm\,. \qquad (3.66)$$