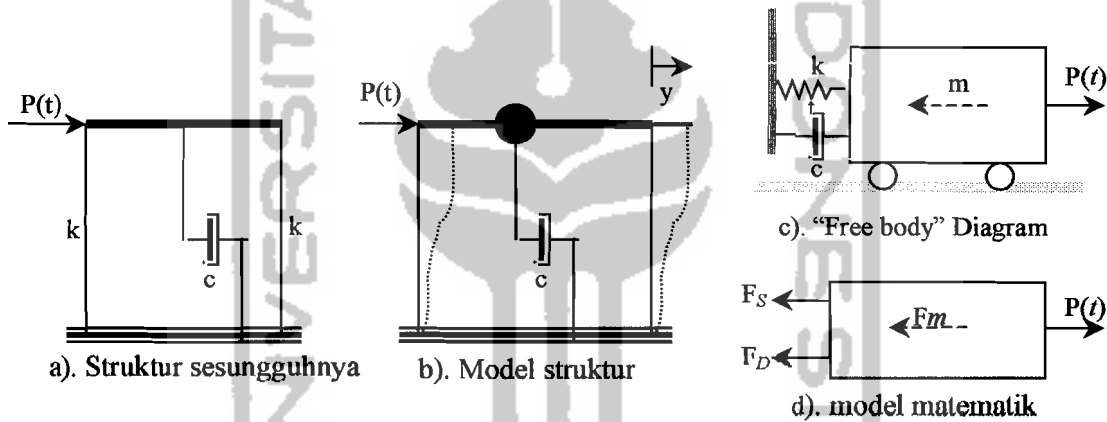


**BAB III**  
**LANDASAN TEORI**

**3.1 Struktur (SDOF) Akibat Pembebanan Dinamik**

Beban dinamik yang bekerja pada struktur dianggap bekerja secara langsung pada elevasi lantai tingkat. Misal beban dinamik akibat putaran mesin  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ .



Gambar 3.1 Beban dinamik pada struktur SDOF

Berdasar "free body diagram", maka

$$F_M + F_D + F_S = P(t) \tag{3.1}$$

$$\text{Dengan } F_M = m \ddot{y}, \quad F_D = c \dot{y}, \quad F_S = k y \tag{3.2}$$

$F_M$ ,  $F_D$ ,  $F_S$  masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam, dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom,  $P(t)$  adalah beban dinamik, dan  $\ddot{y}$ ,  $\dot{y}$ ,  $y$  masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan.

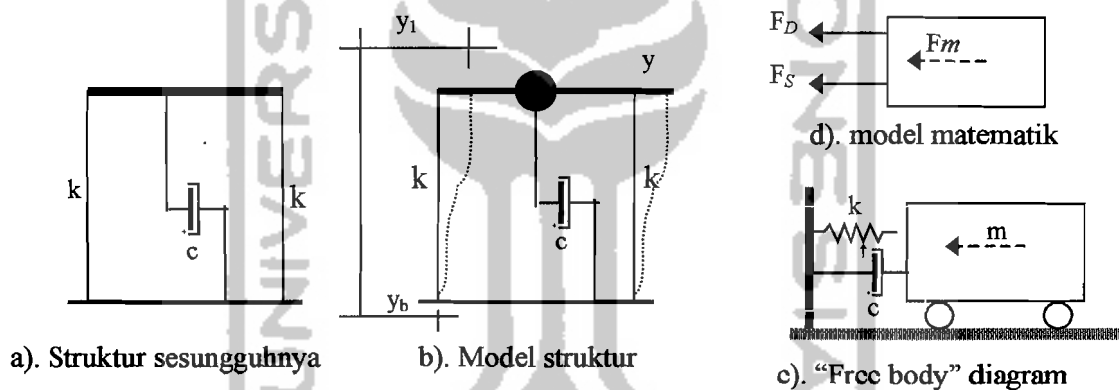
Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1) maka persamaan (3.1) menjadi,

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = P(t) \quad (3.3)$$

Persamaan di atas disebut persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*)

### 3.2 Struktur (SDOF) Akibat Gerakan Tanah

Beban dinamik yang umum diperhitungkan adalah beban gempa. Gempa bumi akan menyebabkan getaran pada tanah, percepatan tanah, serta simpangan horisontal (*horizontal displacement*) (Widodo, 1996).



Gambar 3.2 Beban gempa pada struktur SDOF

Berdasar "*free body diagram*" persamaan differensial gerakan adalah,

$$m \ddot{y}_1 + c \dot{y}_1 + k y_1 = 0 \quad (3.4)$$

Setelah terjadi gempa bumi, tanah mempunyai percepatan, kecepatan, dan simpangan masing-masing sebesar,  $\ddot{y}_b$ ,  $\dot{y}_b$ , dan  $y_b$  terhadap posisi awal maka,

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_b + \ddot{y}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_b + \dot{y}, \quad \text{dan} \quad y_1 = y_b + y \quad (3.5)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.4) maka,

Persamaan ( 3.4 ) di atas dapat ditulis menjadi,

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = -m \ddot{y}_b - c \dot{y}_b - k y_b \quad (3.6)$$

Pada kondisi “*rigid body motion*” dianggap struktur tidak terjadi simpangan dan kecepatan antara tanah dan struktur. Dengan demikian persamaan (3.6) menjadi,

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = -m \ddot{y}_b \quad (3.7)$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = -\ddot{y}_b \quad (3.8)$$

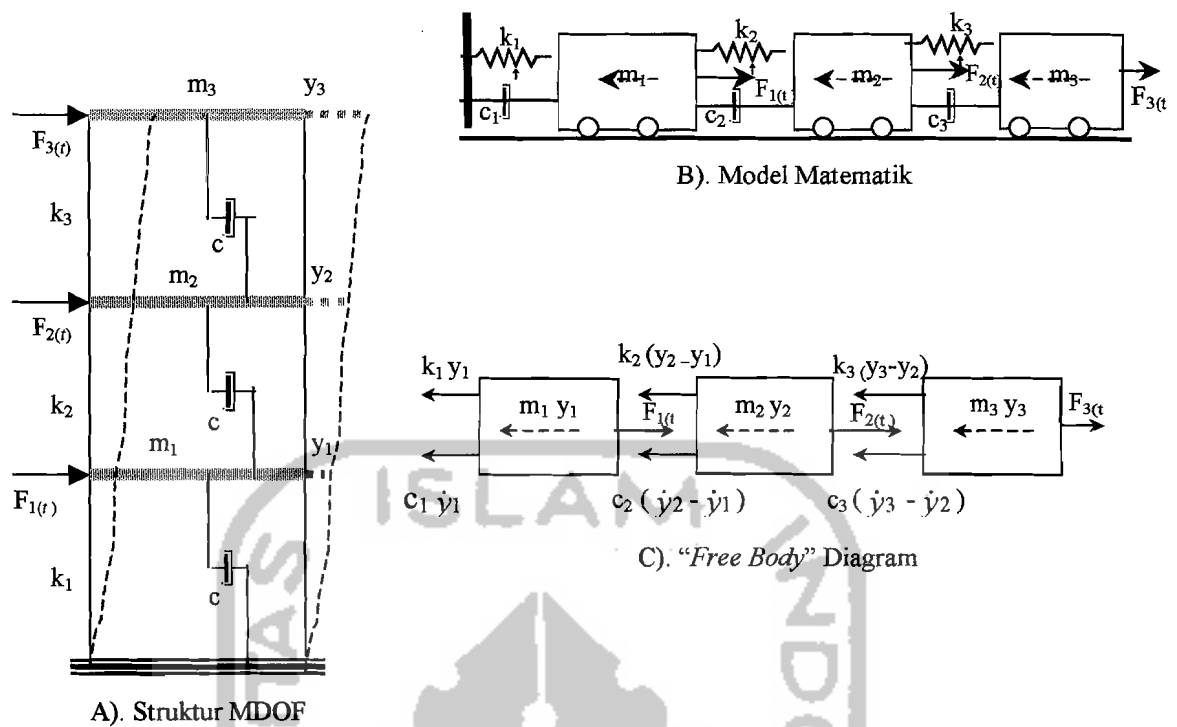
dalam analisis dinamika struktur di peroleh hubungan,

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \frac{c}{m} = 2 \xi \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad/dt}), \quad \omega = \text{angular frequency} \quad (3.9)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{dt}) \quad T = \text{Periode} \quad (3.10)$$

### 3.3 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya masa lantai struktur dapat digumpalkan pada tiap lantai (*lump mass*), dengan demikian struktur yang tadinya mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan berubah menjadi struktur kebebasan terbatas, untuk memperoleh persamaan *differential* gerakan pada struktur kebebasan banyak, maka dapat digunakan anggapan *shear building* sebagaimana pada struktur SDOF.



Gambar 3.3 Struktur MDOF

Pada struktur bangunan gedung bertingkat-3 seperti pada gambar di atas, maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai n-tingkat akan mempunyai n-derajat kebebasan dan mempunyai n-modes .

Untuk memperoleh persamaan *differential* gerakan pada struktur MDOF umumnya dipakai goyangan senada dengan mode pertama yaitu goyangan yang  $y_3 > y_2 > y_1$ . Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada gambar 3.3, maka akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini,

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0 \quad (3.11a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \quad (3.11b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 (y_3 - y_2) - F_3(t) = 0 \quad (3.11c)$$

dengan menyusun persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan, dan simpangan ), maka persamaan ( 3.11) dapat ditulis menjadi matrik uraian seperti berikut ini,

$$m_1 \ddot{y}_1 + (c_1+c_2) \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 + (k_1+k_2) y_1 - k_2 y_2 = F_{1(t)} \quad (3.12a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_1 + (c_2+c_3) \dot{y}_2 - c_3 \dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2+k_3) y_2 - k_3 y_3 = F_{2(t)} \quad (3.12b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - c_3 \dot{y}_2 + c_3 \dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = F_{3(t)} \quad (3.12c)$$

Selanjutnya persamaan ( 3.12 ) dapat ditulis menjadi matrik ekspresi,

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [C] \{\dot{Y}\} + [K] \{Y\} = \{F_{(t)}\} \quad (3.13)$$

yang mana matrik (massa, redaman, dan kekakuan) masing- masing adalah,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{dan} \quad \{F_{(t)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Pada getaran bebas struktur MDOF (  $F_{(t)} = 0$  ), maka persamaan (3.13) menjadi,

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [C] \{\dot{Y}\} + [K] \{Y\} = 0 \quad (3.14)$$

apabila “damping ratio ( $\xi$ )” relatif kecil, maka  $\omega_D$  (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan  $\omega$  (*undamped frequency*), sehingga struktur dianggap tanpa redaman ( $C=0$ ) maka persamaan (3.14) menjadi,

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [K] \{Y\} = 0 \quad (3.15)$$

Karena persamaan (3.15) adalah persamaan *differential* gerakan tanpa redaman maka respon struktur akan bersifat harmonik, maka

$$\{Y\} = \{\phi\} \sin(\omega t) \quad (3.16)$$

$$\{\dot{Y}\} = \omega \{\phi\} \cos(\omega t) \quad (3.17)$$

$$\{\ddot{Y}\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin(\omega t) \quad (3.18)$$

dalam hal ini  $\{\phi\}$  adalah vektor “*mode shape*”.

Substitusi persamaan (3.16) dan (3.18) ke dalam persamaan (3.15) maka,

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} \sin(\omega t) + [K] \{\phi\} \sin(\omega t) = \{0\} \quad (3.19a)$$

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{\phi\} = \{0\} \quad (3.19b)$$

persamaan (3.19b) merupakan persamaan “*eigen problem*”, selanjutnya

$$\omega_i^2 [M] \{\phi_i\} = [K] \{\phi_i\} \quad (3.20a)$$

$$\omega_j^2 [M] \{\phi_j\} = [K] \{\phi_j\} \quad (3.20b)$$

apabila transpose persamaan (3.20a) di *postmultiply* dengan  $\{\phi_j\}$ , maka

$$(\omega_i^2 [M] \{\phi_i\})^T \{\phi_j\} = ([K] \{\phi_i\})^T \{\phi_j\} \quad (3.21)$$

karena matrik massa  $[M]$  dan matrik kekakuan  $[K]$  adalah matrik simetri, maka

$$[M]^T = [M] \text{ dan } [K]^T = [K] \text{ sehingga}$$

$$\omega_i^2 [M] \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} = [K] \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} \quad (3.22)$$

apabila persamaan (3.20b) dikalikan  $\{\phi_i\}^T$ , maka

$$\omega_j^2 [M] \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} \quad (3.23)$$

apabila persamaan (3.22) dikurangi dengan persamaan (3.23), maka akan diperoleh

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0 \quad (3.24)$$

karena  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , maka  $\omega_i^2 - \omega_j^2 \neq 0$ , sehingga

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0 \quad (3.25)$$

kondisi *orthogonal* berlaku pada matrik kekakuan [K] dan kondisi *orthogonal* dianggap berlaku juga terhadap matrik redaman [C], maka

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = 0 \quad i \neq j \quad (3.26.a)$$

$$\{\phi_i\}^T [C] \{\phi_j\} = 0 \quad i \neq j \quad (3.26.b)$$

Untuk menyelesaikan persamaan simultan pada persamaan (3.19b), maka persamaan (3.19b) dapat ditulis kembali menjadi persamaan (3.27),

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = \{0\} \quad (3.27)$$

Persamaan (3.27) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*) atau suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan (3.27) adalah nol, maka

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (3.28)$$

Determinan persamaan (3.28) akan menghasilkan persamaan *polynomial* dengan *degree*-n yang menghasilkan nilai  $\omega$ , maka dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan (3.27) akan menghasilkan nilai vektor "*mode shape*"  $\{\phi\}_i$ .

### 3.4 Simpangan Struktur

Untuk menghitung simpangan setiap lantai pada struktur digunakan metode *Upperbound* atau *Upper Limit Respon*

$$P_j = \{\phi\}_i [M] I$$

$$Z_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} \frac{Cg}{\omega_j^2} \quad (3.24)$$

dengan C adalah koefisien gempa dasar (*basic seismic coefficient*) yang dapat dicari menurut daerah gempa, jenis tanah, dan periode getar pada mode yang ditinjau dan simpangan lantai struktur pada masa yang ke-i adalah

$$Y_i = \sum_{j=1}^n [\phi_{ij}^* z_{ij}] \quad (3.25)$$

### 3.5 Gaya Geser Dasar

Gaya geser tingkat dan gaya lantai sering dipakai dalam analisis struktur, karena gaya geser akan menyebabkan rotasi pada penampang horisontal lantai dan gaya lantai akan menyebabkan momen guling struktur (*overturning moment*). Gaya lantai akibat mode ke-j adalah

$$F_j = M \phi_j \frac{P_j^*}{M_j^*} cg \quad (3.26)$$

sehingga gaya geser dasar

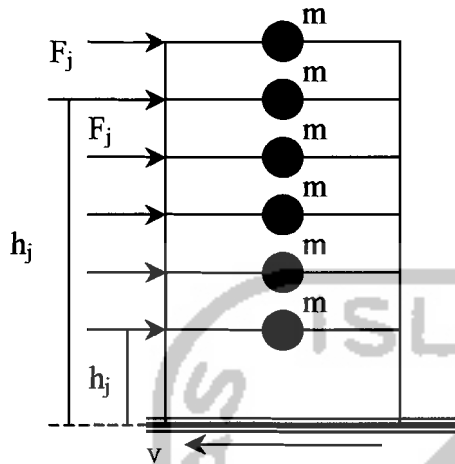
$$V = - \left( \sum_{j=1}^n F_j \right) \quad (3.27)$$

Ø



### 3.6 Momen Guling (“Overtuning Moment”)

Momen guling didapat dengan mengalikan gaya lantai yang terjadi pada setiap tingkat ( $F_j$ ) dengan jarak ( $h_j$ ), maka



$$M = \sum_{j=1}^n F_j * h_j$$

UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA