

BAB III

LANDASAN TEORI

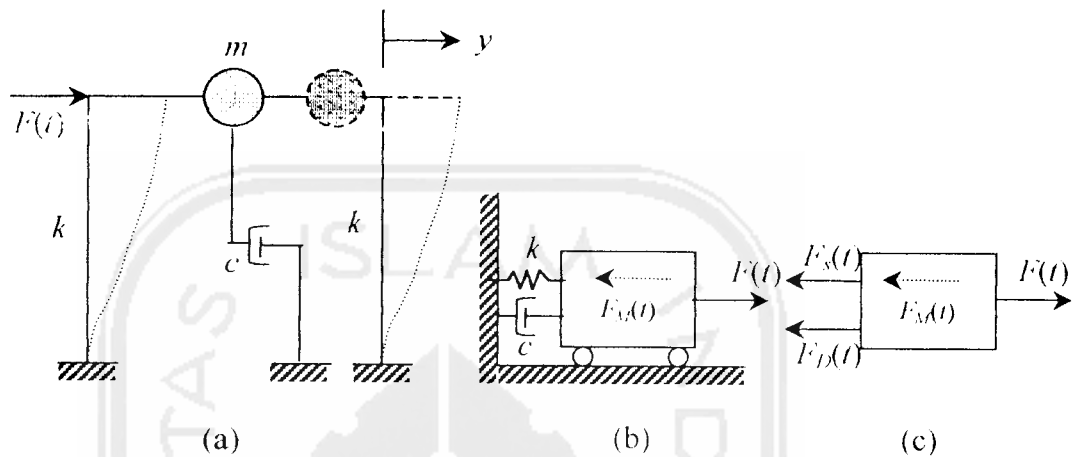
Sebagai dasar teori dalam penelitian *Tuned mass Damper* (TMD), akan dijelaskan beberapa teori tentang struktur dengan derajat kebebasan tunggal dan struktur dengan derajat kebebasan banyak. Keseluruhan penjelasan analisis struktur dalam bab ini adalah dengan anggapan sistem *linier elastis*.

3.1 Struktur Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF)

Dengan proses idialisasi atau seleksi, sebuah model matematis yang tepat dapat mereduksi jumlah derajat kebebasan menjadi suatu jumlah diskrit dan untuk beberapa keadaan dapat menjadi berderajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom*). Sistem berderajat kebebasan satu ini, dapat dijelaskan secara tepat dengan model matematis pada (Gambar 3.1), yang mempunyai elemen-elemen sebagai berikut : (1) elemen masa m menyatakan masa dan sifat inersia dari struktur, (2) elemen pegas k yang menyatakan gaya balik elastis (*elastis restoring force*) dan kapasitas energi potensial dari struktur, (3) elemen redaman c yang menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi dari struktur, dan (4) gaya pengaruh $F(t)$ yang menyatakan gaya luar yang bekerja pada sistem struktur.

Untuk menyusun persamaan diferensial gerakan suatu masa, maka diambil suatu model struktur dengan derajat kebebasan tunggal seperti (Gambar

3.1). Dengan anggapan kolom bangunan terjepit secara penuh, masa struktur tergumpal disuatu titik (m).



Gambar 3.1 (a) Model struktur (b) Model matematik
(c) Free body diagram

Berdasar *free body diagram*, maka

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \quad (3.1)$$

$$\text{dengan } F_M(t) = m \ddot{y}(t) \quad , \quad F_D(t) = c \dot{y}(t) \quad , \quad F_S(t) = k y(t) \quad (3.2)$$

$F_M(t)$, $F_D(t)$, $F_S(t)$ masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom, $F(t)$ adalah beban luar dinamik dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan berubah menurut waktu.

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1) menjadi

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) disebut persamaan diferensial gerakan (*differential equation of motion*).

Dalam prinsip dinamika struktur diperoleh hubungan,

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{c}{m} = 2 \xi \omega,$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad/dt}), \quad \omega = \text{angular frequency},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{dt}), \quad T = \text{periode} \quad (3.4)$$

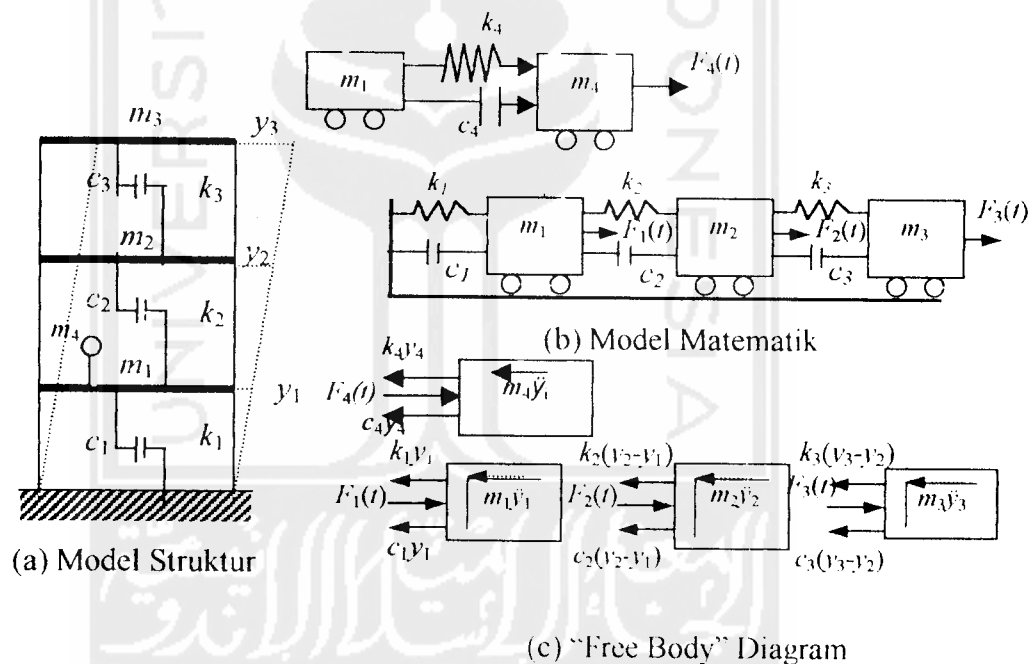
3.2 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF) dengan Analisis Struktur Linier.

Pada umumnya, suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar, misalnya akibat beban angin ataupun akibat gerakan tanah/gempa. Getaran-getaran seperti itu dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *forced vibration system*. Sedangkan getaran lain seperti yang diakibatkan dari beban orang yang melompat pada ujung balok kantilever, sehingga mempunyai kondisi awal (*initial condition*), dapat dikategorikan pada getaran bebas atau *free vibration system*.

Suatu penyederhanaan yang biasa dipakai dalam analisis adalah, masa struktur dianggap tergumpal pada sebuah titik (*lumped mass*) atau beberapa titik. Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya masa struktur dapat digumpalkan pada setiap lantai. Dengan demikian struktur yang tadinya mempunyai derajat kebebasan tak terhingga, akan menjadi struktur dengan derajat kebebasan terbatas.

Untuk memperoleh persamaan diferensial gerakan pada struktur bertingkat banyak, maka dapat digunakan anggapan *shear building*, sebagaimana pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF).

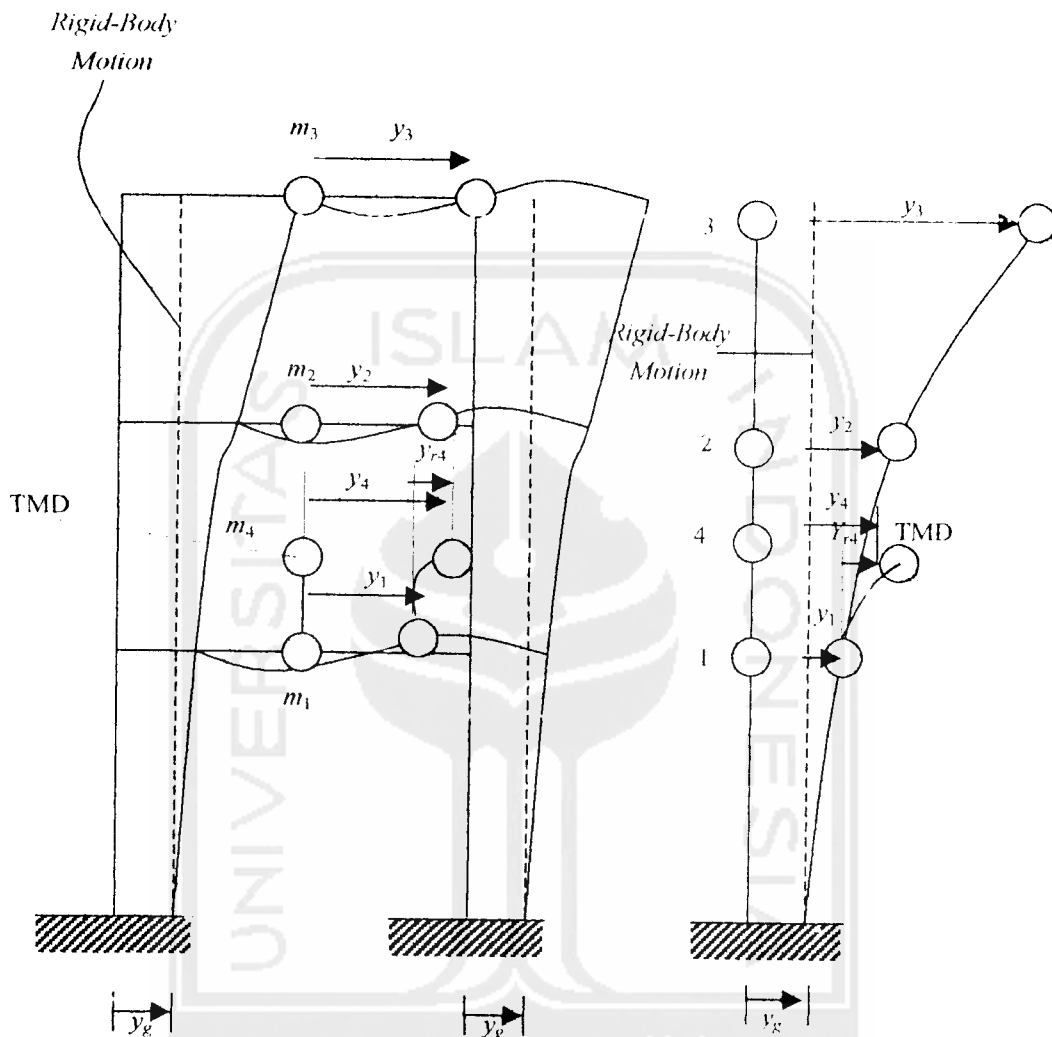
Pada struktur bangunan gedung bertingkat-3 dan ditambahkannya alat TMD pada lantai-1 seperti pada (Gambar 3.2), maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan dan satu massa TMD, sehingga struktur yang mempunyai n -tingkat akan mempunyai n -derajat kebebasan dan mempunyai n -modes. Hal ini alat TMD dapat juga di variasikan, misal alat TMD di letakan pada lantai-2, lantai-3 atau pada lantai ketiga-tiganya.



Gambar 3.2 Struktur MDOF

Dari (gambar 3.2) $F_i(t) = m_i \ddot{y}_i(t)$. Untuk memperoleh persamaan diferensial gerakan pada struktur MDOF, umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur, menurut *first mode* atau mode pertama yaitu goyangan yang $y_3 = y_2 = y_1$.

Adanya TMD pada lantai satu sebagai permissalan, sehingga mempunyai simpangan sendiri dan lebih jelasnya terlihat pada (Gambar 3.3).



Gambar 3.3 (a) Rangka Bangunan (b) Rangka Bangunan yang Disederhanakan

Dari (Gambar 3.3), masa TMD adalah m_4 , simpangan relatif TMD adalah y_{r4} . Berdasarkan keseimbangan dinamik pada *free body diagram* (gambar 3.2), maka akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini,

$$m_1(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_g) + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2(y_2 - y_1) - c_4\dot{y}_{r4} - k_4y_{r4} = 0, \quad (3.5a)$$

$$m_2(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_g) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3(y_3 - y_2) = 0, \quad (3.5b)$$

$$m_3(\ddot{y}_3 + \ddot{y}_g) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3(y_3 - y_2) = 0, \quad (3.5c)$$

$$m_4(\ddot{y}_{r4} + \ddot{y}_1 + \ddot{y}_g) + c_4(\dot{y}_4 - \dot{y}_1) + k_4(y_4 - y_1) = 0. \quad (3.5d)$$

Dimana $y_4 = y_1 + y_{r4}$, perkalian masa dan percepatan gempa dipindahkan ke ruas kanan, sehingga,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2 + c_4) \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 - c_4 \dot{y}_4 + (k_1 + k_2 + k_4)y_1 - k_2 y_2 - k_4 y_4 &= -m_1 \ddot{y}_g(t), \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + (c_2 + c_3) \dot{y}_2 - c_3 \dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 &= -m_2 \ddot{y}_g(t), \\ m_3 \ddot{y}_3 - c_3 \dot{y}_2 + c_3 \dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 &= -m_3 \ddot{y}_g(t), \\ m_4 \ddot{y}_4 - c_4 \dot{y}_1 + c_4 \dot{y}_4 - k_4 y_1 + k_4 y_4 &= -m_4 \ddot{y}_g(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dengan menyusun persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan, dan simpangan), maka persamaan (3.6) dapat ditulis menjadi matrik ekspresi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M]\ddot{y}_g(t). \quad (3.7)$$

Yang mana matrik ekspresi di atas (matrik massa, redaman, dan kekakuan) masing- masing adalah,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_4) & -k_2 & 0 & -k_4 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2 + c_3) & -c_2 & 0 & -c_4 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 & 0 \\ -c_4 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}, \{ \dot{y} \} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Gaya dinamik akibat percepatan gempa akan dibahas pada sub bab 3.3. Pada getaran bebas struktur MDOF dengan $-[M]\ddot{y}_g(t) = 0$, maka persamaan (3.7) menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0. \quad (3.9)$$

Apabila “damping ratio (ξ)” relatif kecil, maka ω_d (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan ω (*undamped frequency*), sehingga struktur dianggap tanpa redaman ($C = 0$) maka persamaan (3.9) menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0. \quad (3.10)$$

Karena persamaan (3.10) adalah persamaan differensial gerakan tanpa redaman, maka respon struktur akan bersifat harmonik, sehingga

$$\{y\} = \{\Phi\} \sin(\omega t), \quad (3.11)$$

$$\{\dot{y}\} = \omega \{\Phi\} \cos(\omega t) \quad (3.12)$$

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{\Phi\} \sin(\omega t). \quad (3.13)$$

Dalam hal ini $\{\Phi\}$ adalah vektor *mode shape*.

Substitusi persamaan (3.11) dan (3.13) ke dalam persamaan (3.10) maka,

$$-\omega^2 [M]\{\Phi\} \sin(\omega t) + [K]\{\Phi\} \sin(\omega t) = \{0\}, \quad (3.14a)$$

$$[K] - \omega^2 [M] \{\Phi\} = \{0\} \quad (3.14b)$$

Persamaan (3.14b) merupakan persamaan *eigen problem* selanjutnya

$$\omega_i^2 [M] \{\Phi_i\} = [K] \{\Phi_i\}, \quad (3.15a)$$

$$\omega_j^2 [M] \{\Phi_j\} = [K] \{\Phi_j\} \quad (3.15b)$$

Apabila transpose persamaan (3.15a) di *postmultiply* dengan $\{\Phi_j\}$, maka

$$\left(\omega_i^2 [M] \{\Phi_i\} \right)^T \{\Phi_j\} = \left([K] \{\Phi_i\} \right)^T \{\Phi_j\} \quad (3.16)$$

Karena matrik massa $[M]$ dan matrik kekakuan $[K]$ adalah matrik simetri, maka $[M]^T = [M]$ dan $[K]^T = [K]$, sehingga

$$\omega_i^2 [M] \{\Phi_i\}^T \{\Phi_j\} = \{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} \quad (3.17)$$

Apabila persamaan (3.15b) dikalikan $\{\Phi_i\}^T$, maka

$$\omega_j^2 \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\} [K] \{\Phi_j\} \quad (3.18)$$

Apabila persamaan (3.17) dikurangi dengan persamaan (3.18), maka akan diperoleh

$$\left(\omega_i^2 - \omega_j^2 \right) \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = 0, \quad (3.19)$$

karena $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, maka $\omega_i^2 - \omega_j^2 \neq 0$, sehingga

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = 0. \quad (3.20)$$

Kondisi *orthogonal* berlaku pada matrik kekakuan $[K]$ dan kondisi *orthogonal* dianggap berlaku juga terhadap matrik redaman $[C]$, maka

$$\{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} = 0 \quad i \neq j, \quad (3.21.a)$$

$$\{\Phi_i\}^T [C] \{\Phi_j\} = 0 \quad i \neq j. \quad (3.21.b)$$

Untuk menyelesaikan persamaan simultan pada persamaan (3.14), maka persamaan (3.14) dapat ditulis kembali menjadi persamaan (3.22),

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{\Phi\} = \{0\}. \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*) atau suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan ($\{[K] - \omega^2 [M]\}$) adalah nol, maka

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0. \quad (3.23)$$

Determinan persamaan (3.23) akan menghasilkan persamaan polinomial dengan derajat- n yang menghasilkan nilai ω , maka dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan (3.22) akan menghasilkan nilai vektor “*mode shape*” $\{\Phi\}$.

3.3 Persamaan Gerak Akibat Beban Gempa

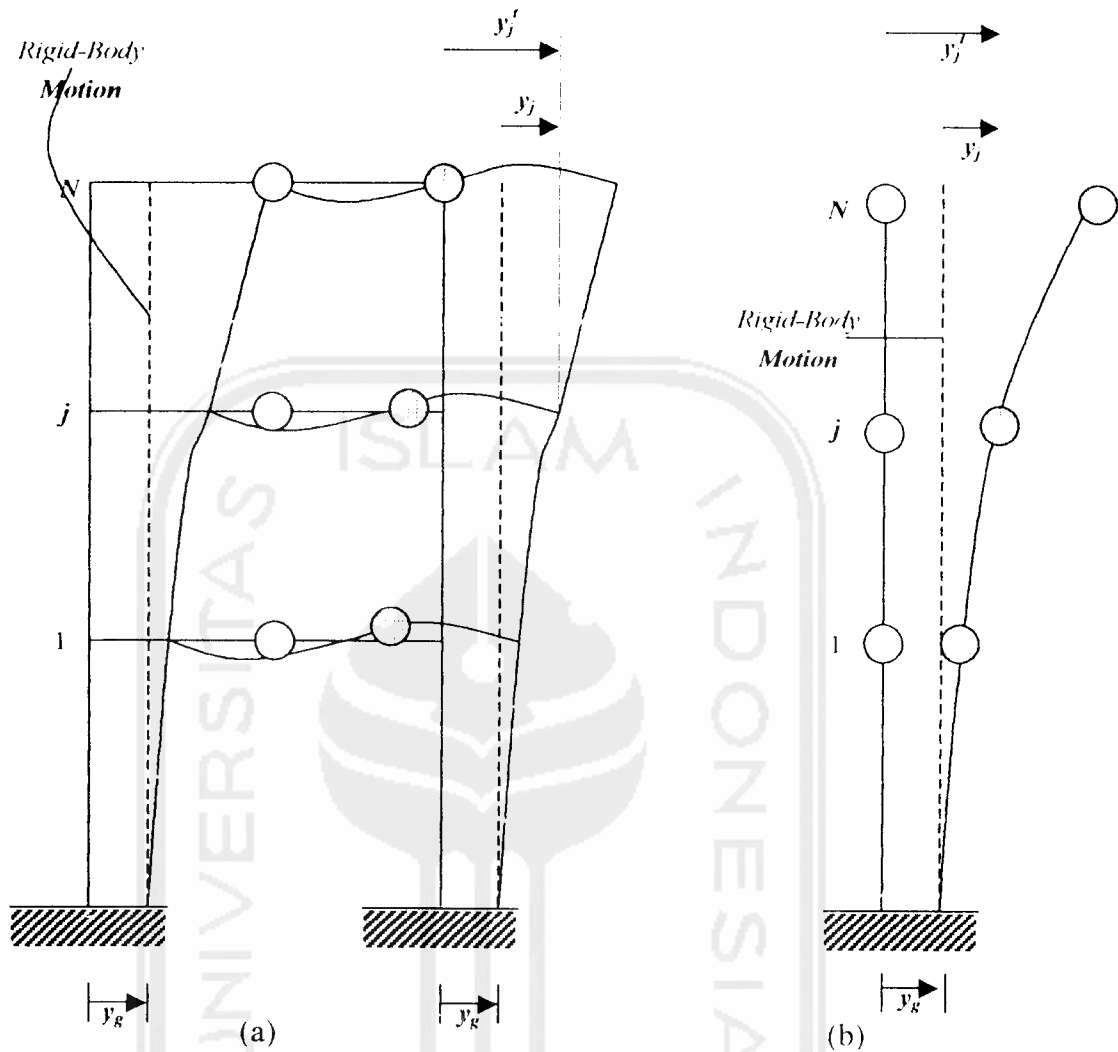
Pada semua derajat kebebasan dinamik, mempunyai arah gerakan tanah yang sama. Seperti contoh bangunan, yaitu menara dan rangka bangunan (Gambar 3.4). Simpangan tanah dinotasikan y_g , simpangan total atau absolut dinotasikan y_j^t dan simpangan relatif antara masa dan tanah dinotasikan y_j , yang disusun seperti persamaan dibawah ini,

$$y_j^t(t) = y_j(t) + y_g(t). \quad (3.24)$$

Persamaan untuk semua masa N dapat dikombinasikan dalam bentuk vektor,

$$y^t(t) = y(t) + y_g(t) \mathbf{1}. \quad (3.25)$$

Dimana $\mathbf{1}$ adalah sebuah vektor derajat N pada setiap elemen.



Gambar 3.4 (a) Rangka Bangunan (b) Menara

Persamaan keseimbangan dinamik pada persamaan (3.1), terdapat $F(t) = 0$, sebab dalam persamaan tersebut tidak terdapat gaya luar dinamik, seperti dalam persamaan berikut ini,

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0. \quad (3.26)$$

Gerakan relatif y diantara masa dan dasar akan mengalami deformasi struktur yang menghasilkan elastisitas dan gaya redaman. Didalam sistem persamaan linier

Gerakan relatif y diantara masa dan dasar akan mengalami deformasi struktur yang menghasilkan elastisitas dan gaya redaman. Didalam sistem persamaan linier (3.2), gaya inerti ($F_{i,t}$) dihubungkan dengan percepatan total (\ddot{y}) pada masa menjadi,

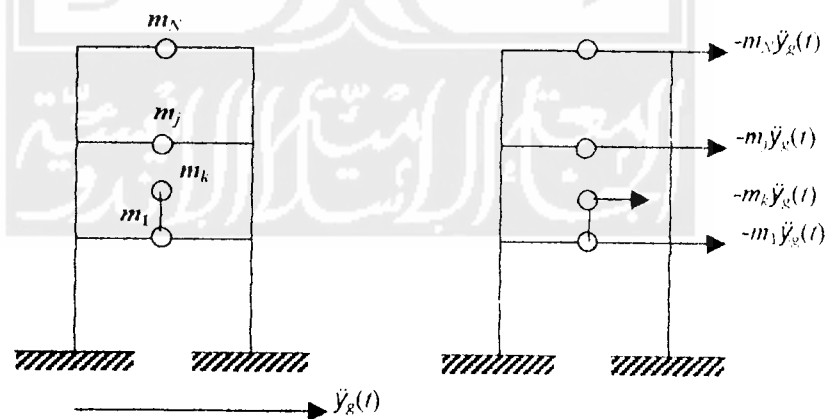
$$F_{i,t}(t) = m\ddot{y}. \quad (3.28)$$

Substitusi persamaan (3.2) dan (3.25) kepersamaan (3.26) menjadi,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -mI\ddot{y}_g(t). \quad (3.29)$$

Persamaan (3.29) terdapat N yang mengatur simpangan relatif $y_i(t)$, hal ini merupakan suatu pendekatan sistem MDF elastik dan inti dari pecepatan tanah. Perbandingan persamaan (3.29) dengan persamaan (3.3), menunjukkan persamaan gerakan, dan dapat dipisahkan menjadi dua, yaitu percepatan tanah dan gaya luar. Dapat ditunjukkan pada (Gambar 3.5), gerakan tanah dapat berubah menjadi gaya gempa efektif.

$$P_{eff}(t) = -mI\ddot{y}_g(t). \quad (3.30)$$



Gambar 3.5 Gaya Gempa Efektif

Secara umum pendekatan simpangan total pada setiap masa, seperti simpangan y_j^s mengalami aplikasi statik, yaitu gerakan tanah dijumlahkan dengan simpangan relatif dinamik y_j menjadi simpangan statik.

$$y_j^t(t) = y_j(t) + y_j^s(t) \text{ atau } y_j^t(t) = y_j + y_j^s(t). \quad (3.30)$$

Persamaan diatas dapat dituliskan $y_j^t(t) = iy_g(t)$, dimana vektor pengaruh i menunjukkan simpangan masa berubah dari aplikasi statik menjadi sebuah unit simpangan tanah. Persamaan (3.30) menjadi,

$$y_j^t(t) = y(t) + y_g(t). \quad (3.31)$$

Persamaan (3.25) dapat ditulis menjadi,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_g(t). \quad (3.32)$$

Sehingga gaya gempa efektifnya adalah,

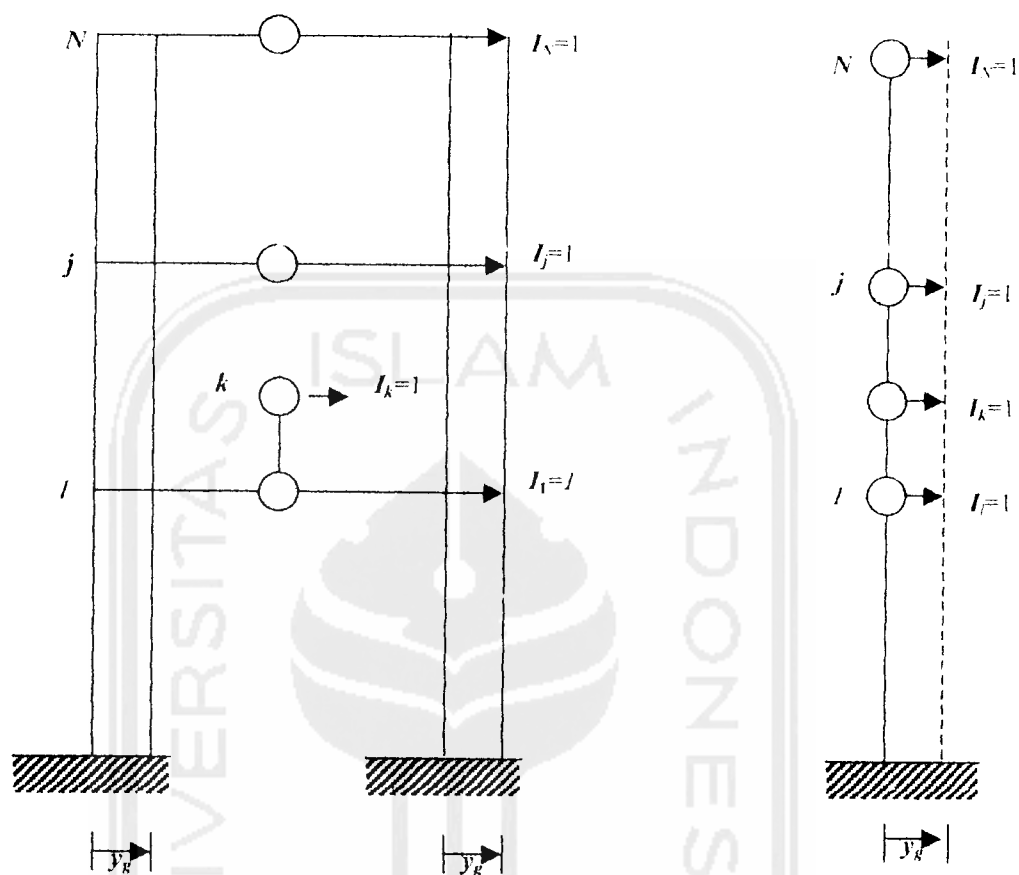
$$p_{eff}(t) = -m\ddot{y}_g(t). \quad (3.33)$$

Diasumsikan struktur adalah kaku. Aplikasi statik $y_g = 1$ akan menghasilkan simpangan yang ditunjukkan (Gambar 3.6). Sehingga $i = [1 \ 1 \ 1]^T$ dalam persamaan (3.32) dan (3.33) menjadi ,

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{y}_g(t) = -\ddot{y}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$= -\ddot{y}_g(t)[M] \quad (3.35)$$

$$= -[M] \ddot{y}_g(t) \quad (3.36)$$



Gambar 3.6 Pengaruh Vektor l : Simpangan Statik dengan $y_k=1$

3.4 Modal Analisis (Prinsip Metode Superposisi)

Metode ini, dipakai khusus untuk penyelesaian problem dinamik analisis dengan beberapa syarat tertentu, yaitu respon struktur masih elastik dan struktur mempunyai standar *mode shapes*. Penyelesaian persamaan diferensial gerakan struktur MDOF dengan cara ini yang harus dicari adalah nilai-nilai koordinat *mode shapes* $\{\Phi\}_{ij}$.

Pada kondisi standar, struktur yang mempunyai n -derajat kebebasan akan mempunyai n -modes atau n -pola/ragam goyangan. Pada prinsip ini, masing-masing modes akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap-tiap masa seperti ditunjukkan pada (Gambar 3.7). Pada prinsip ini, simpangan masa ke- i atau Y_i dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap modes. Kontribusi mode ke- j terhadap simpangan horisontal masa ke- i tersebut, dinyatakan dalam produk antara $\{\Phi\}_{ij}$ dengan suatu modal amplitudo Z_j atau seluruh kontribusi tersebut kemudian dinyatakan dalam,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \Phi_{11}Z_1 + \Phi_{12}Z_2 + \Phi_{13}Z_3 + \dots + \Phi_{1n}Z_n \\ Y_2 &= \Phi_{21}Z_1 + \Phi_{22}Z_2 + \Phi_{23}Z_3 + \dots + \Phi_{2n}Z_n \\ Y_3 &= \Phi_{31}Z_1 + \Phi_{32}Z_2 + \Phi_{33}Z_3 + \dots + \Phi_{3n}Z_n \\ &\dots\dots\dots \\ Y_m &= \Phi_{m1}Z_1 + \Phi_{m2}Z_2 + \Phi_{m3}Z_3 + \dots + \Phi_{mn}Z_n \end{aligned} \quad (3.37)$$

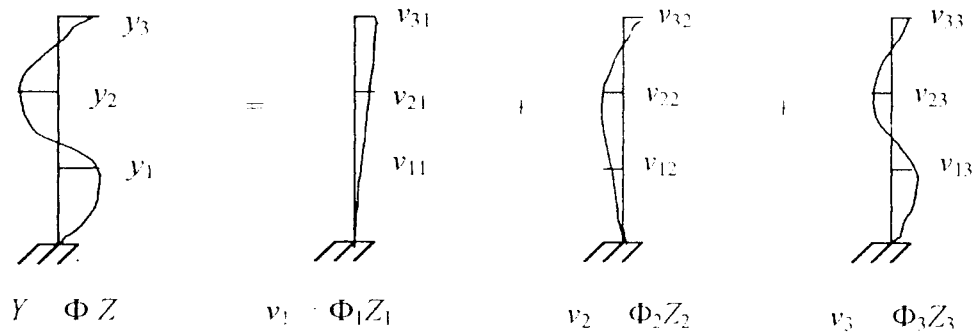
Suku pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai suku ke- n pada ruas kanan persamaan (3.28) diatas adalah merupakan kontribusi mode pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai kontribusi mode ke- n . Persamaan (3.37) tersebut, dapat ditulis dalam bentuk yang lebih kompak,

$$\{Y\} = [\Phi]\{Z\}. \quad (3.38)$$

Derifatif pertama dan kedua, persamaan (3.39) adalah,

$$\{\dot{Y}\} = [\Phi]\{\dot{Z}\} \quad (3.39a)$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\Phi]\{\ddot{Z}\} \quad (3.39b)$$



Gambar 3.7 Prinsip Metode Superposisi

Substitusi persamaan (3.38) dan (3.39) kedalam persamaan (3.37), maka akan diperoleh,

$$[M][\Phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\Phi]\{\dot{Z}\} + [K][\Phi]\{Z\} = -[M][1]\ddot{y}_t. \quad (3.40)$$

Apabila persamaan (3.40) di *premultiply* dengan transpose suatu mode $\{\Phi\}^T$ maka,

$$\{\Phi\}^T [M][\Phi]\{\ddot{Z}\} + \{\Phi\}^T [C][\Phi]\{\dot{Z}\} + \{\Phi\}^T [K][\Phi]\{Z\} = -\{\Phi\}^T [M][1]\ddot{y}_t. \quad (3.41)$$

Sebagai pembahasan selanjutnya akan ditinjau pengaruh mode ke-1. Misalnya diambil struktur yang mempunyai 3-derajat kebebasan, maka suku pertama pada persamaan (3.41) akan berbentuk,

$$[\Phi_{11} \ \Phi_{21} \ \Phi_{31}] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Dengan memakai prinsip hubungan ortogonal, dimana i tidak sama dengan j , maka untuk mode ke-1 persamaan (3.42) akan menjadi,

$$[\Phi_{11} \ \Phi_{21} \ \Phi_{31}] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \quad (3.43)$$

Untuk mode ke- j , maka secara umum persamaan (3.44) juga dapat ditulis dengan,

$$\{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j \ddot{Z}_j. \tag{3.44}$$

Cara seperti diatas juga berlaku untuk suku ke-2 dan ke-3 pada persamaan (3.42).

Dengan demikian setelah diperhatikan hubungan ortogonal persamaan (3.41) akan menjadi,

$$\{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j \ddot{Z}_j + \{\Phi\}_j^T [C] \{\Phi\}_j \dot{Z}_j + \{\Phi\}_j^T [K] \{\Phi\}_j Z_j = -\{\Phi\}_j^T [M] \{I\} \ddot{y}_t \tag{3.45}$$

Berdasarkan persamaan (3.45) itu, maka dapat didefinisikan suatu generalisasi masa, redaman dan kekakuan sebagai berikut,

$$M_j^* = \{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j, \tag{3.46a}$$

$$C_j^* = \{\Phi\}_j^T [C] \{\Phi\}_j, \tag{3.46b}$$

$$K_j^* = \{\Phi\}_j^T [K] \{\Phi\}_j. \tag{3.46c}$$

Dengan definisi seperti persamaan (3.46) maka persamaan (3.45) akan menjadi,

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \ddot{y}_t. \tag{3.47}$$

dengan,

$$P_j^* = \{\Phi\}_j^T [M] \tag{3.48}$$

terdapat suatu hubungan bahwa,

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_j^*}{2M_j^* \omega_j}, \text{ maka } \frac{C_j^*}{M_j^*} = 2\xi_j \omega_j, \tag{3.49a}$$

$$\omega^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \text{ dan } \Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}. \tag{3.49b}$$

Dengan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.49), maka persamaan (3.48) akan menjadi,

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j\ddot{y}_t \quad (3.50)$$

dan persamaan (3.52) sering disebut dengan partisipasi setiap model *mode participation factor*.

$$\Gamma_j = \frac{r_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\Phi\}_j^T [M] \{1\}}{\{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j} \quad (3.51)$$

Selanjutnya persamaan (3.50) juga dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j} + 2\xi_j \frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} + \omega_j^2 \frac{Z_j}{\Gamma_j} = -\ddot{y}_t \quad (3.52)$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa :

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j}, \dot{g}_j = \frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} \text{ dan } g_j = \frac{Z_j}{\Gamma_j} \quad (3.53)$$

Maka persamaan (3.52) menjadi :

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_t \quad (3.54)$$

Persamaan (3.54), adalah persamaan diferensial yang *independent*, karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode.

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode Φ_j telah diperoleh. Nilai g , \dot{g} dan \ddot{g} dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai telah diperoleh maka nilai Z_j dapat dihitung.

Dengan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa, dapat diselesaikan dengan persamaan (3.54). Nilai $g(t)$ dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.54) dengan persamaan gerakan mode ke- n sistem dari SDOF. Sistem dari SDOF mempunyai frekwensi natural (*natural frequency* : ω_d) dan rasio redaman (ξ) mode ke- i dari sistem MDOF, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Nilai yang akan dicari adalah $g_i(t)$, dan misalnya dipakai metode *central difference*, maka proses integrasi adalah sebagai berikut. Pada metode *central difference*, diperoleh hubungan awal bahwa,

$$\dot{g}_j = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta t}; \ddot{g}_i = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{(\Delta t)^2}. \quad (3.55)$$

Substitusi persamaan (3.55) kedalam persamaan (3.56) akan diperoleh,

$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi\omega_i \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta t} + \omega_i^2 g_i = -\ddot{y}_i. \quad (3.56)$$

Persamaan (3.56) dapat ditulis menjadi,

$$g_{i+1} = \frac{-\ddot{y}_i - ag_i - bg_{i-1}}{k}, \quad (3.57)$$

dengan,

$$a = \left[\omega_i^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right], \quad (3.58a)$$

$$b = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi\omega_i}{2\Delta t} \right], \quad (3.58b)$$

$$k = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi\omega_i}{2\Delta t} \right]. \quad (3.58c)$$

Setelah diperoleh nilai g untuk tiap-tiap mode. Selanjutnya nilai simpangan tiap mode dapat diperoleh $y_i(t)$,

$$y_i(t) = \Gamma_i \Phi_i g_i(t) \quad (3.59)$$

Simpangan antar tingkat (*inter story drift*) dari suatu titik pada suatu lantai, harus ditentukan sebagai simpangan horisontal titik itu, relatif terhadap titik yang sesuai pada lantai dibawahnya. Perbandingan antara simpangan antar tingkat (*inter story drift*) dan tinggi tingkat yang bersangkutan tidak boleh melampaui 0.005, dengan ketentuan bahwa dalam segala hal simpangan tersebut tidak boleh lebih dari 2 cm (PPKGRG,1987).