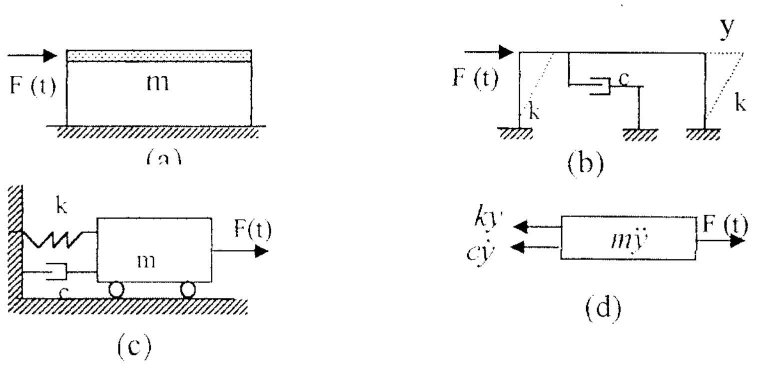
BAB III

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini, akan dijelaskan beberapa teori tentang struktur dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF) dan struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF). Semua analisis struktur dalam bab ini dianggap berperilaku linear elastis.

3.1 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal (SDOF)

Derajat kebebasan (*degree of freedom*) adalah derajat *independensi* yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistim pada setiap saat. Jadi sistim kebebasan berderajat tungal adalah suatu sistim yang mempunyai satu titik yang dapat berpindah secara bebas, untuk menyusun persamaan diferensial gerak (*differential equetion of motion*) untuk sistim dengan derajat kebebasan tunggal dapat diambil suatu model struktur SDOF seperti Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Struktur SDOF (a) Struktur yang sebenarnya (b) Struktur ideal (c) Model matematis (d) *Free body diagram*

Berdasarkan keseimbangan dinamika *dengan free body diagram* sebagaimana terlihat dalam Gambar 3.1 diatas adalah.

$$F_I + F_D + F_S = F(t) \qquad (3.1a)$$

Dimana F_I adalah gaya inersia

$$F_I = m\ddot{y} \qquad (3.1b)$$

F_D adalah gaya redaman

$$F_D = c\dot{y} \qquad (3.1c)$$

F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang menunjukkan kekakuan pegas

$$F_S = ky \qquad (3.1d)$$

Sehinga dengan mensubtitusi persamaan (3.1b), (3.1c) dan (3.1d) pada persamaan (3.1a) akan didapat persamaan differensial gerakan struktur sebagai berikut:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \qquad (3.1e)$$

dimana m, c, dan k berturut - turut adalah massa, redaman dan kekakuan struktur. Sedangkan $\ddot{y}$, $\dot{y}$ dan y berturut - turut adalah percepatan, kecepatan dan simpangan struktur. $F(t)$ adalah beban dinamik, seperti percepatan gempa berupa fungsi acak yang tergantung data gempa yang terjadi.

3.2 Sistem Berderajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Secara umum struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Struktur bangunan gedung justru mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF).

Persamaan differensial untuk bangunan diatas disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama *(first mode)*. Berdasarkan pada prinsip keseimbangan dinamik pada diagram *free body* maka diperoleh:

$$m_b \ddot{y}_b + c_b \dot{y} + k_b y_b - c_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_b) - k_1(y_1 - y_b) - F_b(t) = 0 \tag{3.2a}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_b) + k_1(y_1 - y_b) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2(y_2 - y_1) - F(t) = 0 \tag{3.2b}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3(y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \tag{3.2c}$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3(y_3 - y_2) - F_3(t) = 0 \tag{3.2d}$$

Dari persamaan diatas, tampak bahwa untuk memperoleh kesetimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan differensial dengan sifat-sifat ini disebut *coupled equation* karena persamaan-persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain.

Penyelesaian dari persamaan tersebut harus dilakukan secara simultan, artinya penyelesaian yang melibatkan seluruh persamaan yang ada. Pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan differensial geraknya merupakan persamaan yang dependent atau coupled antara satu dengan yang lain.

Selanjutnya dengan menyusun persamaan-persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) akan diperoleh:

$$m_b \ddot{y}_b + \dot{y}_b(c_b + c_1) - c_1 \dot{y}_1 + y_b(k_b + k_1) - k_1 y_1 = F_b(t) \tag{3.3a}$$

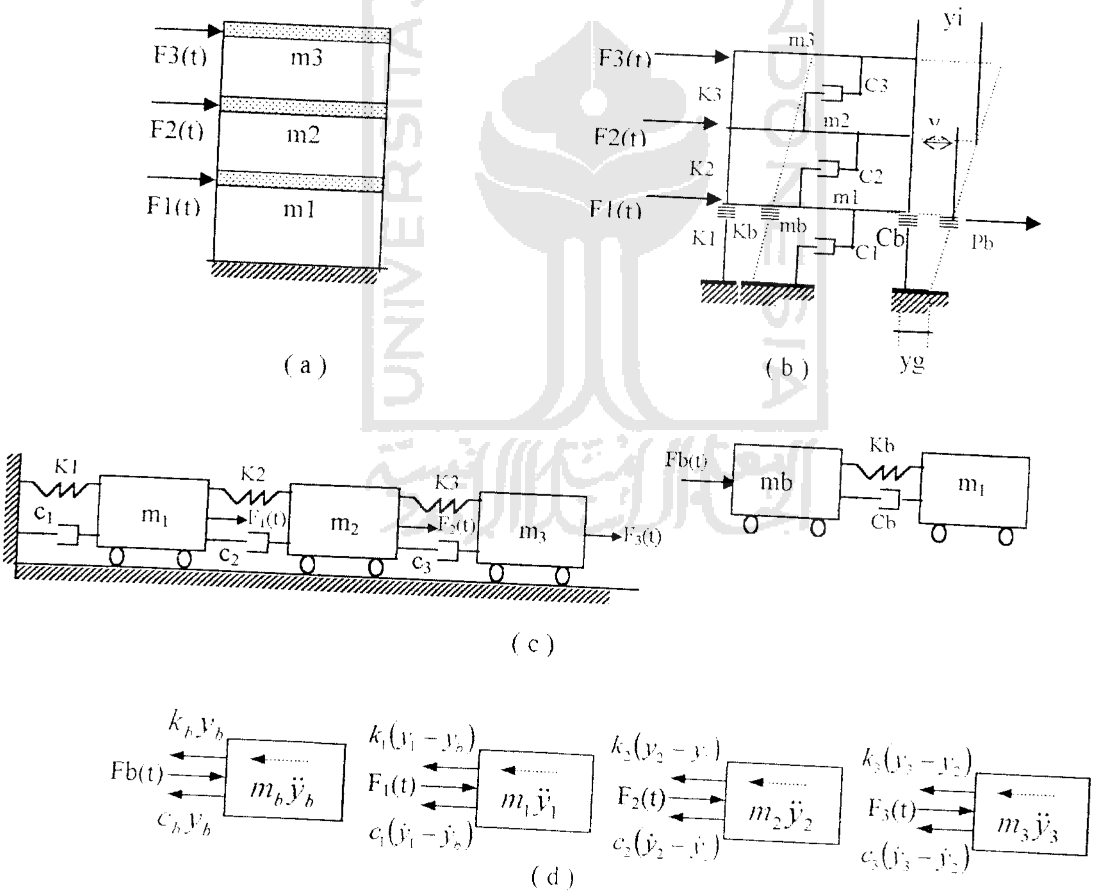
$$m_1 \ddot{y}_1 - c_1 \dot{y}_1 + \dot{y}(c_1 + c_2) - c_2 \dot{y}_2 - k_1 y_b + y_1(k_1 + k_2) - k_2 y_2 = F_1(t) \tag{3.3b}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + \dot{y}_2(c_2 + c_3) - c_3 \dot{y}_3 - k_2 y_1 + y_2(k_2 + k_3) - k_3 y_3 = F_2(t) \tag{3.3c}$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - c_3 \dot{y}_2 + c_3 \dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = F_3(t) \tag{3.3d}$$

Pada struktur gedung bertingkat banyak, pada umumnya massa struktur dapat digumpalkan (*lumped massa*). Banyaknya derajat kebebasan berasosiasi dengan jumlah massa (widodo, 1996)

Persamaan differensial struktur dengan derajad kebebasan banyak (MDOF), prinsip shear building seperti pada SDOF tetap berlaku. Untuk memperoleh persamaan tersebut dimisalkan diambil model struktur MDOF tingkat 3 dengan di tambah *isolation rubber bearing* pada puncak kolom pertama, sehingga struktur mempunyai tiga derajat kebebasan dengan satu *isolation rubber bearing* seperti pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Struktur MDOF(a) Struktur sebenarnya (b) Struktur ideal (c) Model matematis (d) *Free body diagram*

persamaan-persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{P(t)\} \tag{3.4}$$

dimana $[M]$, $[C]$, $[K]$ berturu-turut adalah matrik massa, redaman dan kekuatan,

$$[M]=\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_b+c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_b+k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

sedangkan $\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, (y)$ dan $(F(t))$ berturut-turut adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban dalam bentuk

$$\{\ddot{y}\}=\begin{Bmatrix} \ddot{y}_b \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{y}\}=\begin{Bmatrix} \dot{y}_b \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{y\}=\begin{Bmatrix} y_b \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \text{ dan } \{P(t)\}=\begin{Bmatrix} F_b(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

3.3 Nilai karakteristik (*Eigen Problem*)

Analisis getaran dibagi menjadi dua yaitu getaran bebas (*free vibration*) dan getaran terpaksa (*forced vibration*). Untuk penyederhanaan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas akan sangan membantu untuk penyelesaian analisis dinamika strktur. Persamaan differensial gerak pada getaran bebas pada struktur MDOF adalah :

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=0 \tag{3.9}$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur yang dianggap tanpa redaman, bila nilai rasio redaman (*damping ratio*) kecil. Jika hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka untuk nilai C = 0, persamaan (3.9) akan menjadi :

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=0 \tag{3.10}$$

Karena persamaan (3.10) adalah persamaan differensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman, maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik menurut bentuk :

$$Y=\{\Phi\}\sin(\omega t) \tag{3.11a}$$

$$\dot{Y}=\omega\{\Phi\}\cos(\omega t) \tag{3.11b}$$

$$\ddot{Y}=-\omega^{2}\{\Phi\}\sin(\omega t) \tag{3.11c}$$

Dalam hal ini $\{\Phi\}$ adalah *vektor mode shape* ke - i.

Jika persamaan (3.11) dimasukkan dalam persamaan (3.10) maka akan didapatkan :

$$-\omega^{2}[M]\{\Phi\}\sin(\omega t)+[K]\{\Phi\}\sin(\omega t)=0 \tag{3.12a}$$

$$\{[K]-\omega^{2}[M]\}\{\Phi\}=0 \tag{3.12b}$$

Persamaan (3.12b) adalah suatu persamaan yang sangat penting dan biasa disebut persamaan *eigen problem* atau problem karakteristik. Persamaan tersebut adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiaannya. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah dengan memakai hukum *cramer* (1704 - 1752).

Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor $\{\Phi\}$adalah nol, sehingga

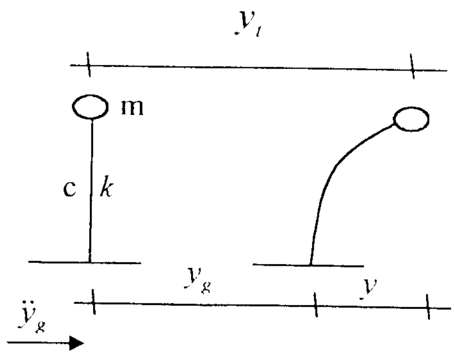
$$[K]-\omega^2[M]=0 \tag{3.13}$$

Jumlah mode pada struktur dengan derajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. Bangunan yang mempunyai 5 tingkat akan mempunyai 5 derajad kebebasan , 5 jenis *mode* gerakan dan 5 jenis frekuensi sudut yang berhubungan langsung dengan jenis nomor *mode* nya.

Apabila jumlah derajad kebebasan adalah n, maka persamaan (3.13) akan menghasilakn suatu polinomial pangkat yang selanjutnya akan menghasilkan ωi^2 untuk i = 1, 2, 3, …,n. selanjutnya, subtitusi masing - masing frekuensi ωi kedalam persamaan (3.12) akan di peroleh nilai $\Phi 1, \Phi 2, ..., \Phi n$.

3.4 Persamaan Gerak Akibat Beban Gempa

Beban gempa merupakan beban yang bekerja pada struktur akibat getaran yang dipaksa (*forced vibration*). Beban gempa berasal dari getaran pada permukaan tanah yang terekam dalam bentuk percepatan (*accelerogram*). Getaran di permukaan tanah yang berupa percepatan tanah akan menghasilkan simpangan horisontal baik pada tanah maupun struktur. Persamaan gerakan struktur yang dikenai beban gempa dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajad kebebasan tunggal, Gambar 3.3



Gambar 3.3 struktur SDOF akibat beban gempa

persamaan umum diferensial gerak adalah,

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 . \qquad (3.14a)$$

atau

$$F_I + F_D + F_S = 0 \qquad (3.14b)$$

dari gambar diatas diperoleh:

$$F_I = m\ddot{y}_t = m(\ddot{y}_g + \ddot{y}) \qquad (3.15)$$

dimana $\ddot{y}_t$ adalah percepatan total, $\ddot{y}_g$ adalah percepatan dasar dan $\ddot{y}$ adalah simpangan relatif. Subtitusi persamaan 3.15 ke dalam persamaan 3.14 menghasilkan persamaan baru

$$m(\ddot{y}_g + \ddot{y}) + c\,\dot{y} + k\,y = 0 \qquad (3.16a)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \qquad (3.16b)$$

dari persamaan 3.16 didapat

$$-m\ddot{y}_g = p_{eff} \qquad (3.17)$$

Beban gempa yang ditinjau adalah beban gempa El-centro 1940 N-S.

3.5 Kandungan Frekuensi (*Frequency contents*)

Persamaan differensial gerakan suatu massa SDOF tanpa redaman dengan beban harmonik sederhana adalah:

$$y(t)=\frac{P_o}{m(\omega^2-\Omega^2)}\left\{\sin(\Omega t)-\frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega t)\right\} \tag{3.18}$$

dengan y (respon struktur), *Po (beban harmonik)*, m (massa struktur), ω (frekuensi sudut akibat getaran), dan Ω (frekuensi sudut beban dinamik). Dari persamaan (3.18) terlihat bahwa respon sruktur akan dipengaruhi oleh frekuensi sudut beban dinamik maupun frekuensi sudut akibat getaran struktur. Respon struktur terdiri dari dua bagian pokok yaitu *steady state response* yaitu respon yang ditunjukkan oleh suku sin (Ωt) dan *transient response* yang ditunjukkan oleh sin (ωt). Apabila frekuensi sudut beban dinamik sama dengan frekuensi sudut getaran struktur maka nilai penyebut diatas akan sama dengan nol, sehingga respon struktur menjadi tak terhingga. Keadaan ini disebut resonansi (Gambar 3.4). Persamaan (3.18) dapat juga ditulis menjadi,

$$y(t)=\frac{P_o}{k}\frac{1}{1-r^2}\{\sin(\Omega t)-r\sin(\omega t)\} \tag{3.19}$$

dimana

$$r=\frac{\Omega}{\omega}$$

dengan r adalah *frekuensi rasio*

persamaan (3.19) juga dapat ditulis dalam bentuk *dynamic load factor* (DLF) menjadi,

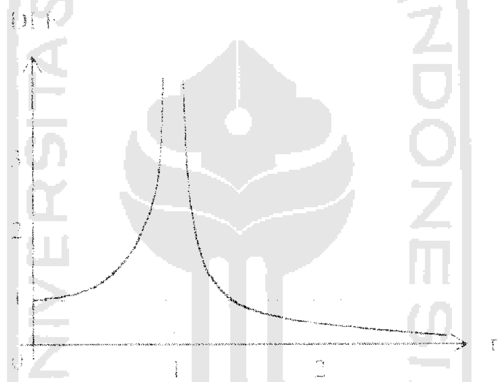
$$y(t) = y_{st}\, DLF$$

$$DLF = \frac{1}{1-r^2}\left\{\sin(\Omega t) - r\sin(\omega t)\right\} \qquad (3.20)$$

Didalam soal-soal praktis, *transient response* sering diabaikan karena nilainya dianggap relatif kecil. Nilai DLF maksimum setiap siktus akan diperoleh apabila sin (Ωt) = 1, dengan mengabaikan tanda atau arah getaran maka diperoleh:

$$DLF = \frac{1}{1-r^2} \qquad (3.21)$$

Plot antara DLF dan nilai frekuensi rasio r dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Grafik DLF lawan frekuensi rasio

3.6 Modal Analisis (prinsip Metode Superposisi)

Metode ini dipakai khusus untuk penyelesaian problem dinamik analisis dengan beberapa syarat tertentu, yaitu respon struktur masih elastik dan struktur mempunyai standar *mode shapes*. Penyelesaian persamaan differensial gerakan struktur MDOF dengan cara ini yang harus dicari lebih dahulu adalah nilai - nilai koordinat mode shapes $\{\Phi\}$.

Pada kondisi normal, struktur yang mempunyai n - derajad kebebasan akan mempunyai n-modes atau n-pola / ragam goyangan. Pada prinsip ini, masing - masing ditunjukkan pada Gambar 3.5. Pada prinsip ini, simpangan masaa ke-*i* atau *Yi* dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap - tiap modes.

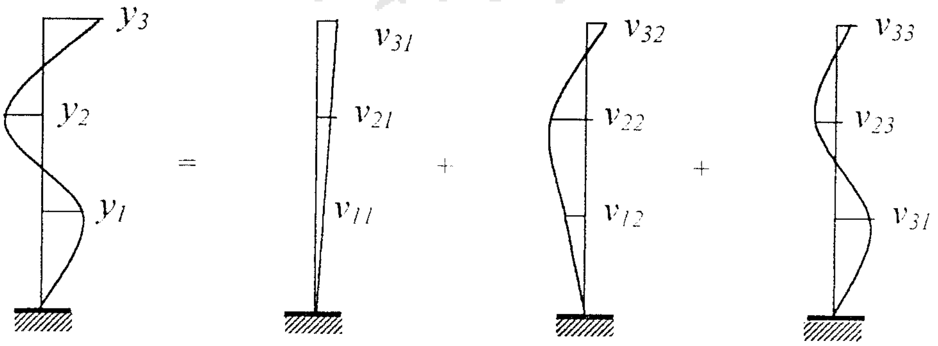
Kontribusi mode ke-*j* terhadap simpangan horisontal massa ke-*i* tersebut, dinyatakan dalam produk antara $\{\Phi\}_{ij}$ dengan suatu modal amplitudo Z_j atau seluruh kontribusi tersebut kemudian dinyatakan dalam

$$Y_1 = \Phi_{11}Z_1 + \Phi_{12}Z_2 + \Phi_{13}Z_3 + \ldots + \Phi_{1n}Z_n$$

$$Y_2 = \Phi_{21}Z_1 + \Phi_{22}Z_2 + \Phi_{23}Z_3 + \ldots + \Phi_{2n}Z_n$$

$$Y_3 = \Phi_{31}Z_1 + \Phi_{32}Z_2 + \Phi_{33}Z_3 + \ldots + \Phi_{3n}Z_n$$

$$Y_1 = \Phi_{11}Z_1 + \Phi_{12}Z_2 + \Phi_{13}Z_3 + \ldots + \Phi_{mn}Z_n \qquad (3.22)$$



$y = \Phi Z$ $\qquad v_1 = \Phi_1 Z_1$ $\qquad v_2 = \Phi_2 Z_2$ $\qquad v_3 = \Phi_3 Z_3$

Gambar 3.5 Prinsip Metoda Superposisi

Suku pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai suku ke - n pada ruas kanan persamaan (3.22) diatas adalah merupakan kontribusi mode pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai kontribusi mode ke - n. Persamaan (3.22) tersebut, dapat ditulis dalam bentuk yang lebih kompak :

$$\{Y\} = [\Phi]\{Z\} \tag{3.23a}$$

Turunan pertama dan kedua persamaan (3.23a) adalah

$$\{\dot{Y}\} = [\Phi]\{\dot{Z}\} \tag{3.23b}$$

dan

$$\{\ddot{Y}\} = [\Phi]\{\ddot{Z}\} \tag{3.23c}$$

subtitusi persamaan (3.23) ke dalam persamaan (3.22) akan diperoleh :

$$[M][\Phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\Phi]\{\dot{Z}\} + [K][\Phi]\{Z\} = -[M][1]\ddot{y}_t \tag{3.24}$$

Apabila persamaan (3.24) di *premultiply* dengan transpose suatu mode shape $\{\Phi\}^T$ maka

$$\{\Phi\}^T[M][\Phi]\{\ddot{Z}\} + \{\Phi\}^T[C][\Phi]\{\dot{Z}\} + \{\Phi\}^T[K][\Phi]\{Z\} = -\{\Phi\}^T[M][1]\ddot{y}_t \tag{3.25}$$

Misalkan diambil struktur yang mempunyai 3 derajad kebebasan, maka suku pertama persamaan (3.25) untuk moe ke-1 dengan memakai prinsip hubungan orthogonal akan menjadi

$$\{\Phi_{11} \quad \Phi_{21} \quad \Phi_{31}\}\begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix}\ddot{Z}_1 \tag{3.26}$$

Untuk mode ke-j maka secara umum persamaan (3.26) juga dapat ditulis dengan

$$\{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j \ddot{Z}_j \tag{3.27}$$

Cara seperti diatas juga berlaku untuk suku ke - 2, dan suku ke-3 pada persamaan (3.24) dengan demikian persamaan (3.25) akan menjadi :

$$\{\Phi\}_j^T [M][\Phi]_j \{\ddot{Z}\}_j + \{\Phi\}_j^T [C][\Phi]_j \{\dot{Z}\}_j + \{\Phi\}_j^T [K][\Phi]_j \{Z\}_j = -\{\Phi\}_j^T [M][1] \ddot{y}_t \tag{3.28}$$

Persamaan (3.25) adalah persamaan differensial yang bebas / independent antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkannya hubungan orthogonal untuk matrik massa, matrik redaman dan matrik kekakuan.

Dengan demikian untuk n-derajat kebebasan dengan n persamaan differensial yang dahulunya bersifat *coupling* menjadi *uncoupling*. Dengan sifat - sifat seperti itu maka penyelesaian persamaan differensial dapat diselesaiakn untuk setiap pengaruh mode. Berdasarkan persamaan (3.28) maka dapat didefinisikan suatu generelasasi massa (generelize mass), redaman dan kekakuan sebagai berikut :

$$M_j^* = \{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j \tag{3.29a}$$

$$C_j^* = \{\Phi\}_j^T [C] \{\Phi\}_j \tag{3.29b}$$

dan

$$K_j^* = \{\Phi\}_j^T [K] \{\Phi\}_j \tag{3.29c}$$

Dengan definisi seperti pada persamaan (3.26) maka persamaan (3.28) akan menjadi

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \ddot{y}_t \tag{3.30}$$

Dengan

$$P_j^* = \{\Phi\}_j^T [M] \{1\} \tag{3.31}$$

Terdapat suatu hubungan bahwa

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_j^*}{2M_j^*\omega_j}\text{, maka } \frac{C_j^*}{M_j^*} = 2\xi_j\omega_j \tag{3.32a}$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \quad \text{dan} \quad \Gamma_j = \frac{P_j}{M_j^*} \tag{3.32b}$$

Dengan hubungan - hubungan seperti pada persamaan (3.32a) dan (3.32b) tersebut, maka persamaan (3.30) akan menjadi

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j\ddot{y}_t \tag{3.33}$$

Dan

$$\Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\Phi\}_j^T[M]\{1\}}{\{\Phi\}_j^T[M]\{\Phi\}_j} \tag{3.34}$$

Persamaan (3.34) sering disebut denan partisipasi setiap mode atau modal *participation factor*. Selanjutnya persamaan (3.33) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j} + 2\xi_j\omega_j\frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} + \omega_j^2\frac{Z_j}{\Gamma_j} = -\ddot{y}_t \tag{3.35}$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j}, \dot{g}_j\frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j}, g_j = \frac{Z_j}{\Gamma_j} \tag{3.36}$$

Maka persamaan (3.36) akan menjadi

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_t \tag{3.37}$$

Persamaan (3.37) adalah persaman differensial yang *independent* karena karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap - tiap mode. Persamaan (3.36) mirip dengan persamaan differensial SDOF.

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode Φ_{ij} telah diperoleh. Nilai $\ddot{g}_i$, $\dot{g}_i$, dan g_i akan dapat dihitung dengan integrasi numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai Z akan dihitung.

Dengan gerakan yang disebabkan dengan adanya gempa, dapat diselesaikan dengan persamaan (3.37). Nilai *g(t)* dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.37) dengan persamaan gerakan mode ke-n sistem dari SDOF. Sistem dari SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency*) dan rasio redaman (ξ) mode ke-*i* dari sistem MDOF dengan *i* = 1,2,3,.....,n.

Nilai yang akan dicari adalah *g(t)*, dan misalkan dipakai metode central differensial, maka proses integrasi adalah sebagai berikut. Pada metode *central difference*, diperoleh hubungan awal bahwa:

$$\dot{g}_i = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta t};\ \ddot{g}_i = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{(\Delta t)^2};\ g_i = g_i \qquad (3.38)$$

Subtitusi persamaan (3.34) ke dalam persamaan (3.33) akan diperoleh

$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi_i\omega_i \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta t} + \omega_i^2 g_i = -\ddot{y}_i \qquad (3.39)$$

Persamaan (3.39) dapat ditulis menjadi

$$g_{i+1} = \frac{-\ddot{y}_i - a g_i - b g_{i-1}}{k} \qquad (3.40)$$

Dengan

$$a = \left[\omega_i^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right] \tag{3.41a}$$

$$b = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi_i \omega_i}{2\Delta t} \right] \tag{3.41b}$$

$$k = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi_i \omega_i}{2\Delta t} \right] \tag{3.41c}$$

Setelah diperoleh nilai g untuk tiap - tiap mode. Selanjutnya nilai simpangan tiap mode dapat diperoleh *y(t)*.

$$y_i(t) = \Gamma_i \Phi_i \, g_i(t) \tag{3.42}$$

3.7 Simpangan Struktur

Simpangan struktur yang terjadi ada tiga macam yaitu simpangan absolut, simpangan relatif dan simpangan antar tingkat. Simpangan yang dipakai dalam penelitian ini adalah simpangan relatif dan simpangan antar tingkat

3.7.1 Simpangan relatif

Simpangan relatif setiap lantai menurut persamaan differensial *independent* (*uncoupling*) adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap - tiap mode.

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\Phi_{ij} Z_j \right] \tag{3.43}$$

3.7.2 Simpangan Antar tingkat

Untuk menghitung simpangan antar tingkat pada struktur dengan cara mengurangi simpangan relatif lantai atas terhadap lantai bawahnya.

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{n}\left[\Phi_{ij} Z_j\right] - \sum_{j=1}^{n}\left[\Phi_{(i+1)j} Z_j\right] \tag{3.44}$$

$$\Delta y = Y_{ij} - Y_{ij+1} \tag{3.45}$$

3.8 Gaya Geser Dasar

Gaya horisontal lantai sering dipakai dalam analisis struktur karena gaya horisontal lantai menyebabkan rotasi pada penampang horisontal lantai yang nantinya akan berpengaruh pada besarnya gaya geser dasar dan momen guling dasar struktur. Gaya horisontal lantai pada massa ke-j akibat mode ke-i adalah

$$F_{ij} = K\ Y_{ij} \tag{3.46}$$

Sehingga rumus gaya geser dasar adalah :

$$V = -\left(\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\right) \tag{3.47}$$

3.9 Momen Guling (*Overturning Moment*)

Momen guling didapat dengan mengalikan gaya lantai yang terjadi pada setiap lantai (F_j) dengan ketinggian lantai (h_j), maka :

$$M = \sum_{j-1}^{n} F_j h_j \tag{3.48}$$