BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Kolom Pendek *(Stocky Column)*

Kolom pendek adalah elemen tekan yang mempunyai potensi kegagalan karena hancurnya material (tegangan langsung) dan mempunyai kapasitas pikul beban tak bergantung pada panjang elemen, relatif lebih mudah untuk dianalisis. Apabila beban yang bekerja bertitik tangkap tepat pada pusat berat penampang elemen, maka yang akan timbul adalah tegangan tekan merata yaitu sebesar

$$\sigma_{ds} = \frac{P}{A} \qquad \text{(2.1)}$$

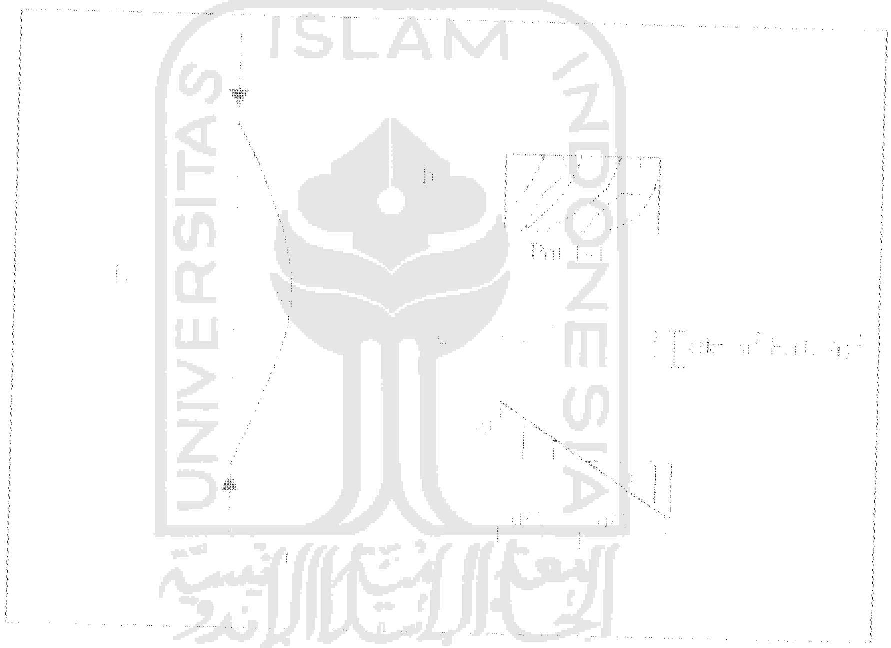
Kegagalan akan terjadi apabila tegangan langsung aktual ini melebihi tegangan hancur material ($\sigma \geq \overline{\sigma}$).(Daniel, 1980)

2.1.2 Teori tangen modulus

Teori Tangen Modulus membahas keruntuhan kolom diatas batas proporsional. Teori ini pertama kali dikemukakan oleh Friedrick Enggeser . Beban kritis pada teori tangen modulus ditentukan dengan mengasumsikan beban axial bertambah selama terjadi perubahan bentuk dari keadaan lurus sampai keadaan mulai melendut. (Padosbajayo,1991)

Mekanisme kerja teori tangen modulus ditunjukkan pada gambar 2.1

Gambar 2.1.a dan gambar 2.1.b menunjukkan bahwa sebuah batang lurus berpenampang empat persegi panjang yang dibebani gaya tekan (P) dan beban (P) berangsur-angsur ditambah dari nol sampai batang runtuh. Sampai sesaat sebelum batang runtuh, batang tetap dianggap lurus (tanpa lendutan) dan lendutan dianggap tetap terjadi, tepat pada saat batang runtuh. Selain itu, distribusi tegangan ditempat runtuh dianggap terbagi rata periksa Gambar 2.1.c. Tegangan akibat momen lentur (Gambar 2.1.d) diabaikan



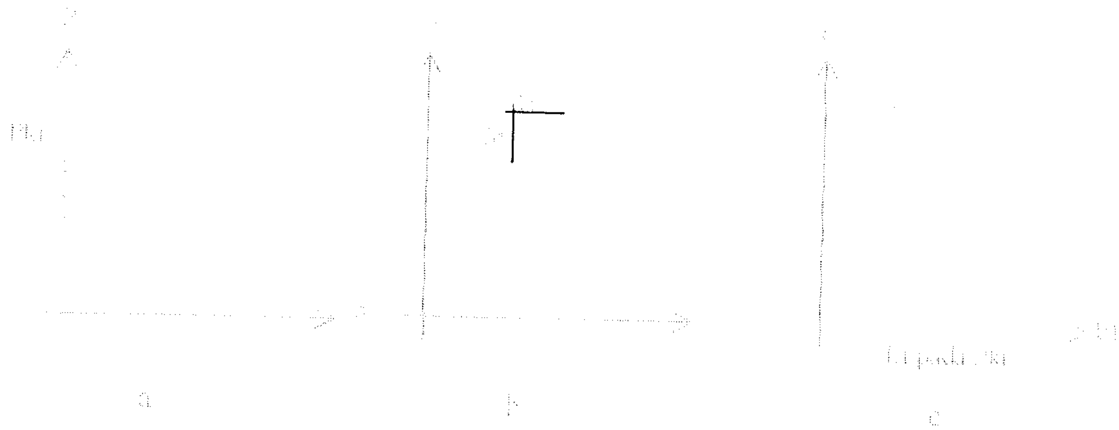
Gambar 2.1 Tegangan berdasarkan teori tangen modulus

Hubungan beban (P) dengan lendutan (δ), ditunjukan gambar 2.2.a. Modulus pada tegangan kritis diambil garis singgung diagram tegangan tegangan pada saat kolom runtuh. Periksa gambar 2.2.b. Modulus pada saat kolom runtuh dinyatakan dengan Persamaan 2.2

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{...(2.2)}$$

dengan

$d\sigma$ = perubahan tegangan $d\varepsilon$ = perubahan regangan



Gambar 2.2 Hubungan : a. Beban lendutan, b. Tegangan regangan, c. Tegangan modulus

Perubahan modulus elastis ke modulus yang harganya berubah-ubah ditunjukan dengan gambar 2.2.c. Dari gambar 2.2.c dapat diketahui bahwa E_t<E. Modulus elastis (E) pada persamaan Euler dengan modulus tangen(E_t), diperoleh Persamaan :

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 . E_t}{\left(\frac{Lk}{r}\right)^2} \qquad (2.3)$$

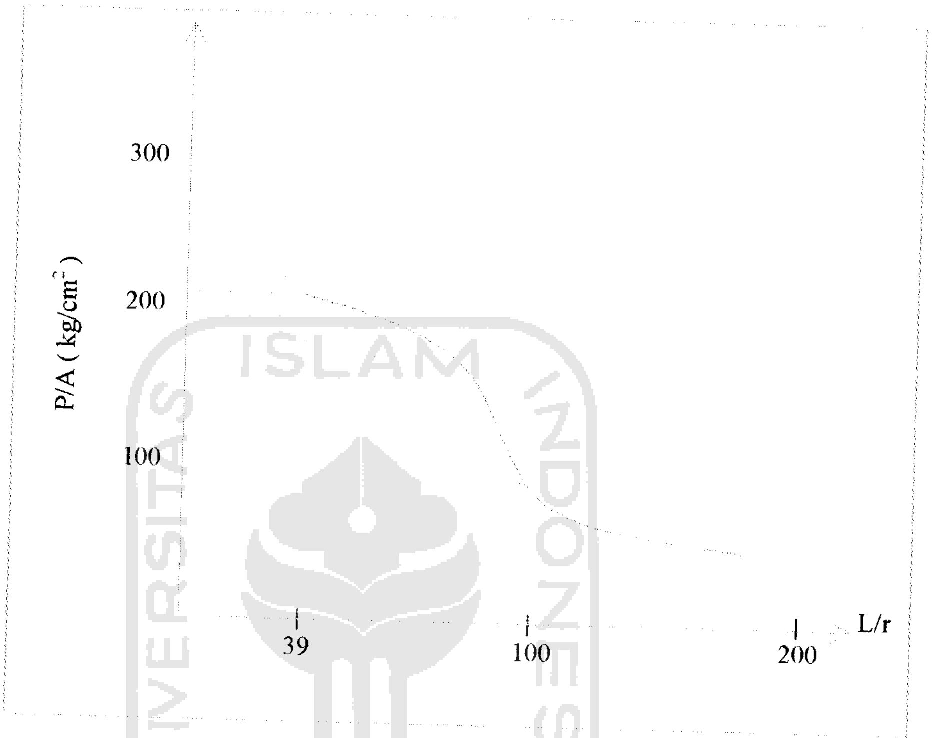
Karena E_t < E, maka tegangan yang diperoleh dengan persamaan (2.3) lebih kecil dibanding dengan tegangan yang diperoleh dengan persamaan Euler.

2.1.2 Teori Tetmayer

Pengujian yang dilakukan oleh Tetmayer menghasilkan tegangan kritis kolom yang dinyatakan dengan persamaan :

$$\frac{P}{A} = 293 - 1{,}94\left(\frac{L}{r}\right) \qquad (2.4)$$

Persamaan (2.4) ditunjukkan dengan garis lurus Gambar (2.3)



Gambar 2.3 Tegangan kritis menurut Tetmayer

2.2 Kolom Sedang *(Medium Column)*

Kegagalan kolom sedang oleh gaya tekan axial yang terjadi pada saat tekuk inelastic. Rumus empiris untuk kolom sedang adalah sebagai berikut(Fellow, 1971)

$$\bar{\sigma} = \sigma\left[1 - 0{,}3\left(\frac{kL/d}{\lambda}\right)^4\right] \qquad (2.5)$$

dengan : $\lambda = 0{,}671\sqrt{\frac{E}{\sigma}}$

2.3 Kolom Panjang *(Slender Column)*

Leonard Euler orang pertama yang memformulasikan ekspresi beban tekuk kritis pada kolom. Persamaan Euler tentang kuat tekan batang , dijelaskan sebagai berikut:

Gambar 2.4 Batang lurus yang dibebani gaya tekan axial

Gambar (2.4) diatas menunjukkan batang lurus yang ujung-ujungnya adalah sendi diberi gaya tekan axial. Akibatnya batang tersebut melengkung. Selanjutnya ditinjau penampang batang yang letaknya x dari ujung kiri dan pelenturan yang terjadi ditempat tersebut adalah y. Akibat beban (P) dan pelenturan (y) dipenampang tersebut bekerja momen lentur. (Padosbajayo, 1991)

$$M = - P.y \qquad (2.6)$$

Karena $M = EI.\dfrac{d^2y}{dx^2}$ maka persamaan (2.6) menjadi

$$EI\,\frac{dy^2}{dx^2} = -P.y \qquad (2.7)$$

Masing-masing ruas Persamaan (2.7) dikalikan 2 dy diperoleh

$$EI.\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}2\,.dy = -2.P.y.dy \qquad (2.8)$$

Jika masing-masing ruas persamaan (2.8) diintegralkan, diperoleh

$$\mathrm{EI}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -P\,.\,y^2 + C1 \quad \text{(2.9)}$$

Pada y = δ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 0$, sehingga 0 = -P.y^2+ C1

C1 = P.y^2

Substitusi C1 kedalam persamaan (2.9)

$$E\,.\,I.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = P.\left(\delta^2 - y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{P}{E.I}}\,\sqrt{\delta^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\delta^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{E.I}}\ \mathrm{dx} \quad \text{(2.10)}$$

Masing-masing ruas Persamaan (2.10) diintegralkan

$$\text{arc sin } \frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{E.I}} + C2 \quad \text{(2.11)}$$

Pada x = 0, pelenturan y = 0, sehingga C2 = 0

Persamaan (2.11) menjadi :

$$\text{arc sin } \frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{E.I}} \quad \text{(2.12)}$$

$$\text{Sin x}\sqrt{\frac{P}{E.I}} = \frac{y}{\delta} \quad \text{(2.13)}$$

Pada x = L, pelenturan y = 0, Persamaan (2.13) menjadi :

$$\sin L\sqrt{\frac{P}{E.I}} = 0 \quad \textit{atau } L.\sqrt{\frac{P}{E.I}} = n.\pi \quad \text{(2.14)}$$

$$P = \frac{(n.\pi)^2.E.I}{L^2} \quad \text{.. (2.15)}$$

Untuk n = 0 persamaan (2.15) tidak berarti, karena P=0, Nilai (P) terkecil diperoleh bila n = 1 sedangkan (P)disebut beban kritis (P_{kr}), jadi :

$$P_{kr} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2} \quad \text{.. (2.16)}$$

Persamaan (2.16) menunjukkan beban kritis Euler. Masing-masing ruas Persamaan (2.16) dibagi dengan luas penampang (A), diperoleh tegangan kritis.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2.E.I}{A.L^2} \quad \text{.. (2.17)}$$

Karena $\frac{A}{I} = \frac{1}{r^2}$, maka Persamaan (2.17) dapat dinyatakan dengan Persamaan (2.18)

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2.E.}{\left(\frac{Lk}{r}\right)^2} \quad \text{.. (2.18)}$$

Dari persamaan (2.18) dapat diketahui bahwa tegangan kritis berbanding terbalik dengan kuadrat rasio kelangsingan, sebanding dengan modulus elastistisitas material. Faktor lain yang berpengaruh terhadap kuat tekan kritis adalah faktor tekuk yang bergantung pada kondisi ujung elemen struktur. (Padosbajayo, 1991)

Berikut ini adalah berbagai kondisi ujung kolom dan harga ekivalensinya. Panjang tekuk adalah batang adalah jarak antar titik balik batang tersebut, yaitu jarak antar ujung – ujung sendi ekivalen, baik riil maupun imajiner. Kolom ideal adalah kolom yang berdiri sendiri dengan ujung – ujung kolom bebas, sendi atau jepit sempurna. (Padosbajayo, 1991)

a. Kolom ideal dengan ujung-ujungnya Sendi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P_{kr}}{E.I}.y \qquad (2.19)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{E.I}.y = 0 \qquad (2.20)$$

andaikan $\frac{P_{kr}}{E.I} = k^2$

Substitusikan k^2 kedalam Persamaan (2.20) diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \qquad (2.21)$$

Persamaan (2.21) dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$y = A.\ \sin kx + B.\ \cos kx = 0 \quad \text{...} (\ 2.22\ )$$

untuk x = 0, nilai y = 0, maka 0 = A.0 + B, diperoleh B = 0

untuk x = L, nilai y = 0 diperoleh:

$$0 = A.\sin kL,$$

untuk sin kL = 0, diperoleh

$$kL = n.\pi \text{ atau } k = \frac{n.\,.\,\pi}{L} \, atau \quad k^2 = \frac{n^2\,.\pi^2}{L^2}$$

Dengan n = (0, 1, 2, 3…)

$k^2 = k^2$ maka:

$$P_{kr} = \frac{n^2\,.\pi^2.E.I}{L^2} \quad \text{...} (\ 2.23\ )$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2} = \frac{\pi^2.E.I}{(kL)^2} \quad \text{...} (\ 2.24\ )$$

Dari Persamaan (2.24) diketahui faktor kondisi ujung (k) untuk kolom yang ujung-ujungnya sendi maka k =1

b. Kolom ideal ujung-ujungnya jepit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P_{kr}}{E.I} + \frac{M}{E.I} \quad \text{..........} \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{E.I}y = \frac{M}{E.I} \quad \text{..........} \quad (2.26)$$

andaikan $\frac{P_{kr}}{E.I} = k^2$

Persamaan (2.26) diselesaikan dengan cara berikut :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M}{P_{kr}} \quad \text{..........} \quad (2.27)$$

Untuk x = 0, nilai y = 0

$0 = A.0 + B + \frac{M}{P_{kr}}$; diperoleh $B = -\frac{M}{P_{kr}}$

untuk x = L , nilai y = 0 diperoleh

$$A = --\frac{M}{P_{kr}}\frac{(1-\cos kL)}{\sin kL}$$

Substitusi A dan B kedalam persamaan (2.27), diperoleh :

$$y = -\frac{M}{P_{kr}}\left(\frac{1-\cos kL}{\sin kL}\sin kx + \cos kx - 1\right) \quad \text{..........} \quad (2.28)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{P_{kr}}\left(k\frac{1-\cos kL}{\sin kL}\cos kx - k\sin kx\right) \quad \text{..........} \quad (2.29)$$

untuk x = L dan dy/dx = 0, diperoleh :

$$0 = \frac{M}{P_{kr}} \quad (\cos kL - 1) \quad \text{..........} \quad (2.30)$$

Harga $\frac{M}{P_{kr}}$ tidak sama dengan nol, sehingga cos (kL) = 1 atau kL = n π, dengan

n = 0,2, 4, 6 ...

$$\sqrt{\frac{P}{E.I}}\,L = n.\pi \quad atau\ P_{kr} = \frac{n^2.\pi^2.E.I}{L^2}$$

Beban kritis diperoleh bila n = 2, sehingga :

$$P_{kr} = \frac{4.\pi^2.E.I}{L^2} = \frac{\pi^2.E.I}{(L/2)^2} \qquad (2.31)$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2.E.I}{(L/2)^2} = \frac{\pi^2.E.I}{(KL)^2} \qquad (2.32)$$

Jadi faktor kondisi ujung (k) untuk kolom yang ujung-ujungnya jepit adalah ½

c. Kolom ideal ujungnya jepit dan ujung lain bebas

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P_{kr}}{E.I}.(\delta - y) \qquad (2.33)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{E.I}.y = \frac{P_{kr}}{E.I}.\delta \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.34) dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$y = A\sin(kx) + B\cos(kx) + \delta \qquad (2.35)$$

untuk A = 0 , y = 0 diperoleh B = - δ

untuk x = L, y = δ diperoleh :

$\delta = A \sin kL - \delta \cos kL + \delta$

$$A = \delta \, \frac{\cos kL}{\sin kL}$$

Substitusi A dan B kedalam Persamaan (2.35) diperoleh :

$$y = \delta \, \frac{\cos kL}{\sin kL} \sin kx - \delta \, . \cos kx + \delta \quad \text{(2.36)}$$

$$\frac{dy}{dx} = k \, . \, \delta \, \frac{\cos kL}{\sin kL} \cos kx + k \, . \delta \, . \sin kx$$

untuk x = 0, dy/dx = 0 diperoleh

$0 = \cos kL$ dan $kL = n/2$ dengan n = 1, 2, 3, ...

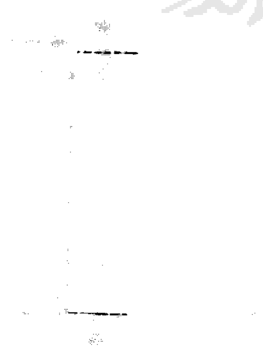
Nilai P minimum adalah P_{kr}, diperoleh pada n = 1 jadi

$$P_{kr} = \frac{(1/2)^2 . \pi^2 . E . I}{L^2} \quad \text{(2.37)}$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 . E . I}{L^2} = \frac{\pi^2 . E . I}{(kL)^2} \quad \text{(2.38)}$$

Jadi faktor kondisi ujung (k) untuk kolom satu ujungnya jepit dan ujung lain bebas adalah 2

d. Kolom satu ujungnya jepit dan ujung lain sendi



Setiap titik yang terletak pada kolom dengan jarak y dari ujung bawah kolom memenuhi persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-P_{kr}}{E.I} - \frac{F}{E.I}(L-x) \quad (2.39)$$

Persamaan (2.36) dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$y = A.\ \sin kx + B.\ \cos kx - \frac{F}{P}(L-x) \quad (2.40)$$

$$\frac{dy}{dx} = A.k\ .\ \cos kx - B.k.\ \sin kx + \frac{F}{P_{kr}}$$

Pada x = 0, dy/dx = 0, diperoleh :

$$0 = A\ .\ k + \frac{F}{P_{kr}} \text{ atau } A = -\ \frac{F}{P_{kr}}$$

untuk x = L, nilai y = 0, maka :

$$0 = A\ .\ \sin kL + B.\ \cos kL$$

$$0 = -\frac{F}{k.P_{kr}} \sin kL + B.\ \cos kL \text{ atau } B = \frac{F}{k.P_{kr}} tgkL$$

Substitusi A dan B kedalam persamaan (2.40) diperoleh

$$y = \frac{F}{k.P_{kr}}\ .\ (-\sin kx + tg\ kL.\ \cos kx - k(1-x)) \quad (2.41)$$

untuk x = 0, nilai y = 0 diperoleh :

$$0 = tg\ kL - kL \text{ atau } kL = tg\ kL \quad (2.42)$$

Persamaan (2.42) merupakan persamaan transendental. Setelah diselesaikan hasilnya adalah :

$n\ .\ \pi = 4{,}49$

$$P_{kr} = \frac{20{,}2.E.I}{L^2} \quad atau \quad \text{......................................} (2.43)$$

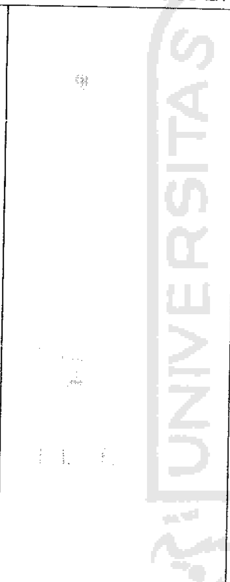
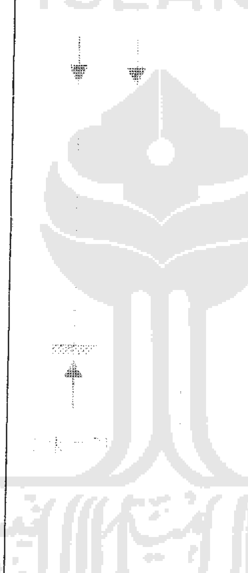
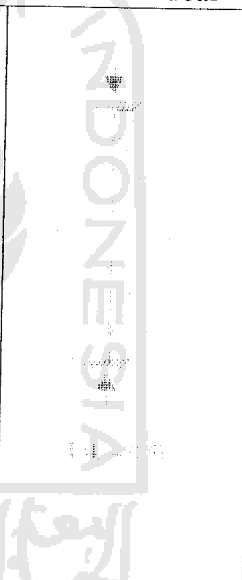
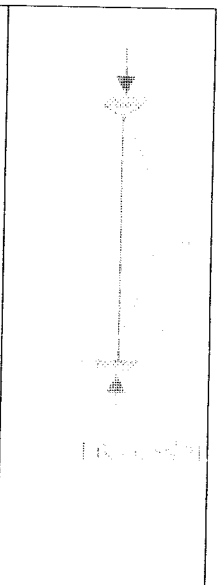
$$P_{kr} = \frac{2{,}05.\pi^2.E.I}{L^2} \quad \text{......................................} (2.44)$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2.E.I}{(0{,}7L)^2} \quad \text{......................................} (2.45)$$

Dari Persamaan (2.45) didapat faktor kondisi ujung (k)=0,7

Faktor panjang tekuk kolom ideal menurut teoritis ditunjukkan dalam tabel (2.1.)

Tabel 2.1. Faktor panjang tekuk kolom ideal

Bentuk kelengkungan				
k	1,0	2,0	0,5	0,7

Didalam merencanakan suatu batang desak dianggap lebih dulu bahwa batang itu mengikuti rumus Euler, kemudian apabila perlu ukuran –ukuran yang ditentukan menurut rumus Euler dapat diubah. (Suwarno, 1976)

$$P_{tk} = \frac{\pi^2.E.I}{n.L_{tk}^{\ 2}} \quad \text{......................................} (2.46)$$

$$i_{\min} = \frac{n.P_{tk}.l_k^{\,2}}{\pi^2.E} \qquad \text{.......(2.47)}$$

keterangan

n = faktor aman

P_{tk} = gaya tekuk

Jika $\pi^2 = 10$ dan untuk kayu kelas II dengan E = 100.000 kg/cm^2

Maka akan terdapat rumus Imin = 10 . n . P_{tk} . L_k^2

Untuk n = 5

I_{min} = 50 . P_{tk} . L_k^2 (Untuk kayu kelas II) dengan E = 100.000 kg/cm^2

I_{min} = 40 . P_{tk} . L_k^2 (Untuk kayu kelas I) dengan E =125.000 kg/cm^2

I_{min} = 60 . P_{tk} . L_k^2 (Untuk kayu kelas III) dengan E =80.000 kg/cm^2

Untuk balok persegi panjang

I_{min} = (1/12) . b^3. h

Bahwa yang dimaksud dengan nilai kelangsingan (λ) dirumuskan sebagai berikut

$$\lambda = \frac{L_k}{r}$$

$$r = \sqrt{\frac{i_{\min}}{A}}$$

Keterangan :

L_k = panjang tekuk

r = Jari-jari lembam minimum

A = luas tampang batang

Untuk menghindarkan bahaya tekuk pada batang desak, gaya yang didukung oleh batang itu harus digandakan dengan faktor tekuk ω, yaitu sebuah faktor yang besarnya tergantung daripada λ.

Maka :

$$\sigma = \frac{p.\omega}{A} \leq \overline{\sigma}_{ds} \quad \text{(2.48)}$$

Besar faktor tekuk (ω) sebagai fungsi daripada λ didapat dari Tabel (2.2) dibawah ini, yang dikutip dari PKKI, 1961. (PKKI, 1961)

Tabel 2.2 Faktor tekuk (ω) dan tegangan tekuk ijin ($\bar{\sigma}_{tk}$) untuk batang desak kayu

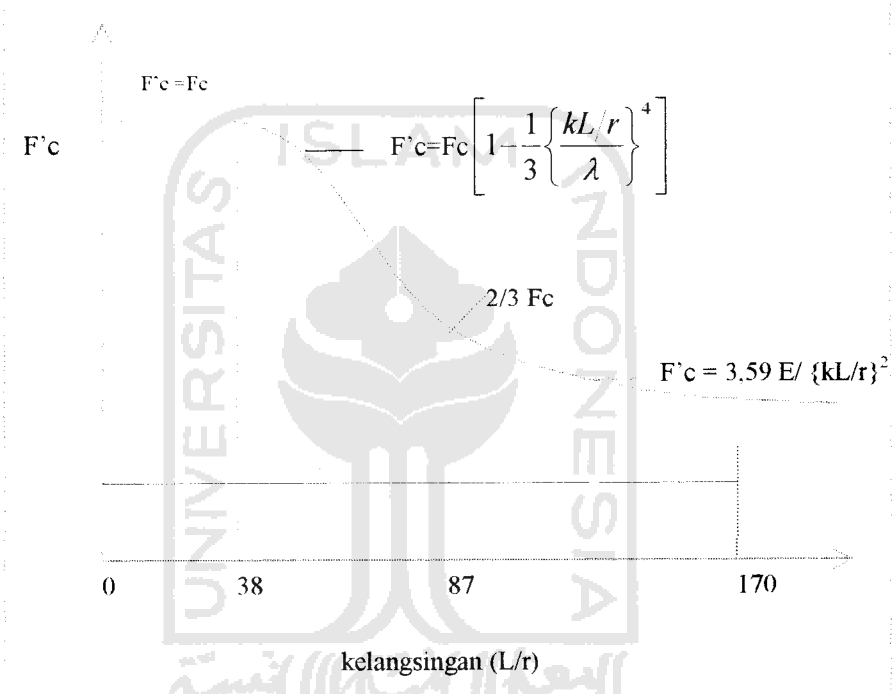
	Faktor tekuk	Tegangan tekuk yang diperkenankan				Faktor tekuk	Tegangan tekuk yang diperkenankan		
λ	ω	I kg/cm^2	II kg/cm^2	III kg/cm^2	λ	ω	I kg/cm^2	II kg/cm^2	III kg/cm^2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	1	130	85	60	40	1.36	95	62	44
1	1.01	129	84	60	41	1.38	94	62	44
2	1.01	128	84	59	42	1.39	94	61	43
3	1.02	126	83	59	43	1.4	93	61	43
4	1.03	126	83	58	44	1.42	92	60	42
5	1.03	125	82	58	45	1.43	91	59	42
6	1.04	124	82	58	46	1.44	90	59	42
7	1.05	123	81	57	47	1.46	89	58	41
8	1.06	122	80	57	48	1.47	89	58	41
9	1.06	120	80	57	49	1.49	87	57	40
10	1.07	121	79	56	50	1.5	86	57	40
11	1.08	120	79	56	51	1.52	85	56	39
12	1.09	119	78	55	52	1.53	85	56	39
13	1.09	119	78	55	53	1.55	84	55	39
14	1.1	118	77	55	54	1.56	83	55	38
15	1.11	117	77	54	55	1.58	82	54	38
16	1.12	116	76	54	56	1.6	81	53	38
17	1.13	115	75	53	57	1.61	81	53	37
18	1.14	114	75	53	58	1.63	80	52	37
19	1.15	113	74	52	59	1.65	79	52	36
20	1.15	113	74	52	60	1.67	78	51	36
21	1.16	112	73	52	61	1.69	77	50	36
22	1.17	111	73	51	62	1.7	77	50	35
23	1.18	110	72	51	63	1.72	76	49	35
24	1.19	109	71	50	64	1.74	75	49	35
25	1.2	108	71	50	65	1.76	74	48	34
26	1.21	107	70	50	66	1.79	73	48	34
27	1.22	107	70	49	67	1.81	72	47	33
28	1.23	106	69	49	68	1.83	71	46	33
29	1.24	105	69	48	69	1.85	70	46	32
30	1.25	104	68	48	70	1.87	70	45	32
31	1.26	103	67	48	71	1.9	62	45	32
32	1.27	102	67	47	72	1.92	68	44	31
33	1.28	102	66	47	73	1.95	67	44	31
34	1.29	101	66	47	74	1.97	66	43	30
35	1.3	100	65	46	75	2	66	43	30
36	1.32	99	64	46	76	2.03	64	42	30
37	1.33	98	64	45	77	2.05	63	42	29
38	1.34	97	63	45	78	2.08	63	41	29
39	1.35	96	63	44	79	2.11	62	40	28

Tabel 2.2 Faktor tekuk (ω) dan tegangan tekuk ijin ($\overline{\sigma}_{tk}$) untuk batang desak kayu

λ	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan			λ	Faktor tekuk ω	Tegangan tekuk yang diperkenankan		
		I kg/cm²	II kg/cm²	III kg/cm²			I kg/cm²	II kg/cm²	III kg/cm²
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
80	2.14	61	40	28	121	4.64	28	18	13
81	2.17	60	39	27	122	4.73	28	18	13
82	2.21	59	39	27	123	4.82	27	18	12
83	2.24	58	38	27	124	4.91	27	17	12
84	2.27	57	37	26	125	5	26	17	12
85	2.31	56	37	26	126	5.09	26	17	12
86	2.34	56	36	26	127	5.19	25	16	12
87	2.38	55	36	25	128	5.28	25	16	11
88	2.42	54	35	25	129	5.38	24	16	11
89	2.46	53	35	24	130	5.48	24	16	11
90	2.5	56	34	24	131	5.57	23	15	11
91	2.54	51	33	24	132	5.67	23	15	11
92	2.58	50	33	23	133	5.77	23	15	10
93	2.63	49	32	22	134	5.88	22	15	10
94	2.68	49	32	22	135	5.98	22	14	10
95	2.75	48	31	22	136	6.08	21	14	10
96	2.78	47	31	22	137	6.19	21	14	10
97	2.83	46	30	21	138	6.29	21	14	10
98	2.88	45	30	21	139	6.4	20	13	9
99	2.94	44	29	20	140	6.51	20	13	9
100	3	43	28	20	141	6.62	20	13	9
101	3.07	42	28	20	142	6.73	19	13	9
102	3.14	41	27	19	143	6.84	19	12	9
103	3.21	41	26	19	144	6.95	19	12	9
104	3.28	40	26	18	145	7.07	18	12	9
105	3.35	39	25	18	146	7.17	18	12	8
106	3.43	38	25	18	147	7.3	18	12	8
107	3.5	37	24	17	148	7.41	18	11	8
108	3.57	36	24	17	149	7.43	17	11	8
109	3.65	36	23	16	150	7.65	17	11	8
110	3.73	35	23	16					
111	3.81	34	22	16					
112	3.89	33	22	15					
113	3.97	33	21	15					
114	4.05	32	21	15					
115	4.13	32	21	15					
116	4.21	31	20	14					
117	4.19	30	20	14					
118	4.38	30	19	14					
119	4.46	29	19	13					
120	4.55	29	19	13					

2.4 Hubungan tegangan – angka kelangsingan

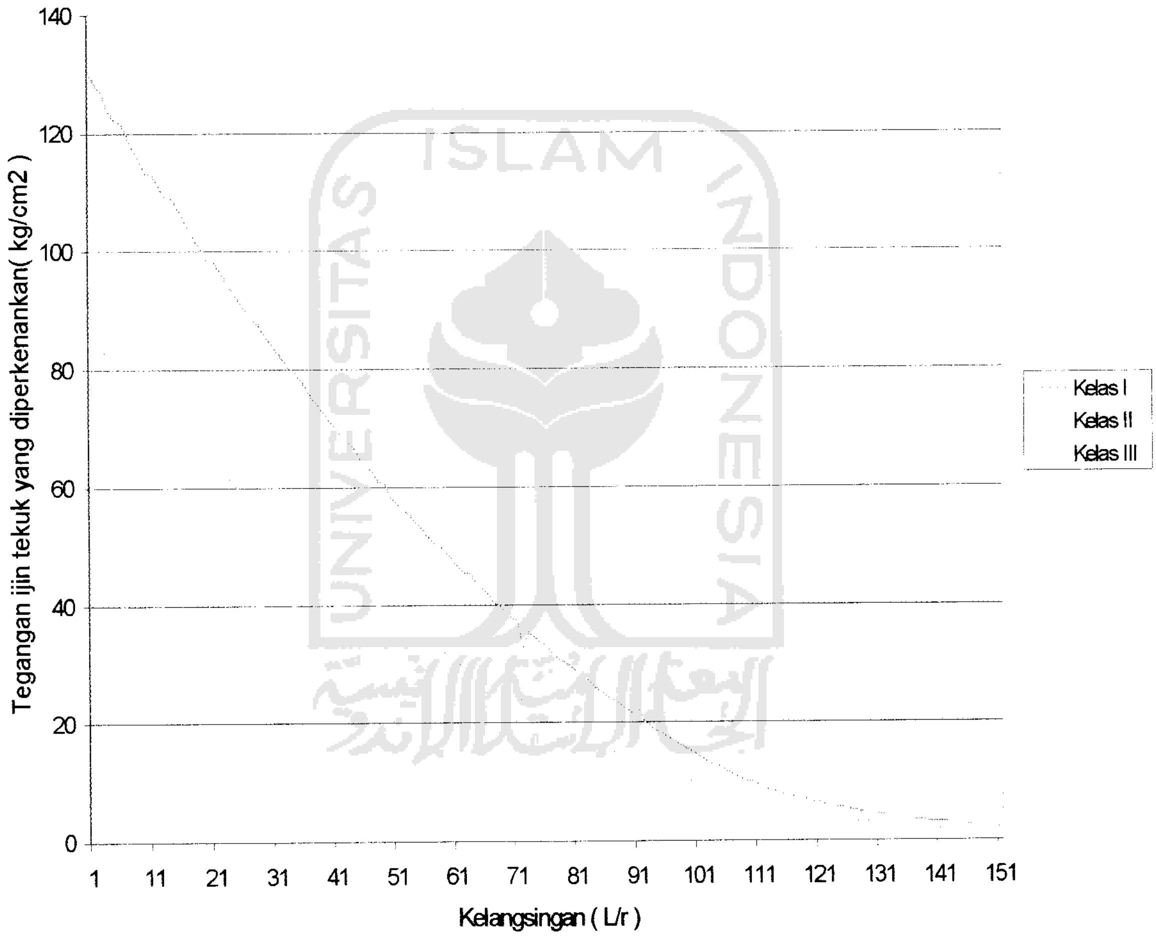
Angka kelangsingan merupakan faktor yang sangat mempengaruhi ragam kegagalan yang terjadi pada kolom. Kolom dengan angka kelangsingan kecil akan mengalami ragam kegagalan berupa kehancuran material sedangkan kolom dengan angka kelangsingan besar akan mengalami ragam kegagalan berupa tekuk.



Gambar 2.5 Grafik hubungan tegangan dengan angka kelangsingan

Pada Gambar 2.5 diatas menunjukkan bahwa hubungan tegangan desak kritis yang diperkenankan dengan kelangsingan menyatakan bahwa semakin besar nilai (l/r) semakin kecil nilai kuat tekan kayu. National Design Spesification mengambil tegangan ijin untuk kolom panjang, dengan cara membagi tegangan kritis Euler dengan angka aman sebesar 2,74 sehingga diperoleh rumusan seperti dalam grafik diatas. Batas perbandingan kelangsingan efektif kolom panjang diantara λ dan 170. Harga λ diperoleh dengan rumus $\lambda = 2{,}323\sqrt{E/Fc} = 87$. Kolom dengan kelangsingan antara 38 dan λ akan mengalami kegagalan tekuk inelastis dengan tegangan melebihi tegangan kritis kayu. (Fellow, 1971)

Gambar 2.6 dibawah ini menunjukkan grafik hubungan antara tegangan izin tekuk dengan angka kelangsingan. Besar tegangan kritis (σ_{kr}) berbanding terbalik dengan faktor tekuk (ω). (Suwarno, 1976)



Gambar 2.6 Grafik hubungan antara tegangan izin tekuk dengan angka kelangsingan kayu kelas I, II dan III

2.5 Analisa Kurva Fitting

Kurva fiting yaitu mencari kurva yang mewakili hasil penelitian dengan nilai kesalahan terkecil atau mengolah secara matematis sejumlah pasangan data diskrit hasil pengamatan (penelitian atau percobaan), dan menggambarkannya dalam bentuk kurva dengan fungsi yang lebih sederhana.

Bentuk kurva fiting ada 2 yaitu regresi kuadrat terkecil dengan fungsi linear dan fungsi polinomial (Steven C,1988)

2.5.1. Regresi kuadrat terkecil dengan fungsi linear

Bentuk tersederhana regresi kuadrat terkecil adalah garis lurus, persamaan garis lurus secara umum berbentuk :

$$y = a_0 + a_1 x_i \quad \text{.......(2.49)}$$

$$Sr = \sum_{i=1}^{m} (yi - a_0 - a_1 x_i)^2 \quad \text{.......(2.50)}$$

Keterangan:

Sr = jumlah kuadrat kesalahan yang terjadi a_0=parameter yang dicari

m = jumlah data

Selanjutnya, jika derivatif pertama Sr persamaan (2.50) terhadap a_0 disamakan nol akan diperoleh nilai parameter a_0, yaitu :

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{m} 2\,(yi - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} (yi - a_0 - a_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i - m a_0 - \sum_{i=1}^{m} a_1 x_i = 0$$

$$m a_0 = \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} a_1 x_i$$

$$a_0 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} a_1 x_i \right) \quad \text{.......(2.51)}$$

$$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_1 x_i$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \qquad (2.52)$$

Sedangkan dari derivatif pertama persamaan (2.50) terhadap a_1 yang disamakan dengan nol, kemudian memasukkan kepersamaan (2.51), akan diperoleh nilai a_1, yaitu

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{m} 2\,(yi - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{m} a_1 x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} a_0 x_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} a_1 x_i \right) \right\} x_i$$

$$m\sum_{i=1}^{m} a_1 x_i^2 = m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i + a_1 \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^2$$

$$a_1 \left\{ m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right) \right\} = m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$a_1 = \frac{m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^2} \qquad (2.53)$$

Berikut ini contoh data-data yang akan dibuat grafik fungsi linear

x_i	2	3	4	5	7	8	10	11	12	14
y_i	4	10	4	8	11	7	14	11	9	15

Penyelesaian :

Tabel 2.3 Perhitungan $x_I.y_i$ dan x_i^2

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
x_i	2	3	4	5	7	8	10	11	12	14	76
y_i	4	10	4	8	11	7	14	11	9	15	93
x_iy_i	8	30	16	40	77	56	140	121	108	210	806
x_i^2	4	9	16	25	49	64	100	121	144	196	728

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{m} = \frac{76}{10} = 7{,}60$$

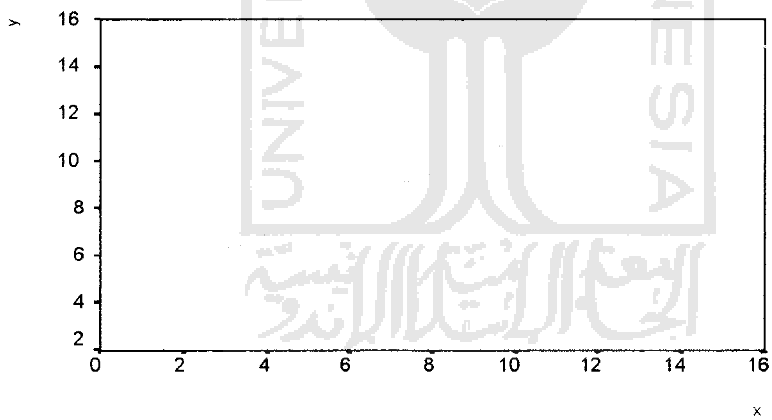
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{93}{10} = 9{,}30$$

persamaan linear garis $\quad y = a_0 + a_1 x$

$$dengan \quad a_1 = \frac{m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2} = \frac{10(806) - (76)(93)}{10(728) - (76)^2} = 0{,}6596$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = 9{,}3 - 0{,}6596(7{,}6) = 4{,}2870$$

sehingga persamaangaris menjadi $\quad y = 4{,}2870 + 0{,}6596x$



Gambar 2.8 Hubungan x dan y berupa garis lurus

2.5.2. Regresi kuadrat terkecil dengan fungsi polinomial

Steven C. Chapra (1988) mengemukakan Persamaan kurva tak linear fungsi polinomial berderajat n mempunyai bentuk persamaan :

$$y = a_o + a_1x_i + a_1x_i^2 + \ldots + a_nx_i^n \qquad (2.54)$$

dan jumlah kuadrat kesalahan adalah :

$$Sr = \sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{\,n})^2 \quad \ldots\ldots(2.55)$$

dengan parameter *aj* (untuk j = 0, 1, 2, ...n) yang dicari dengan menyamakan dengan nol setiap derivatif pertama Sr terhadap *aj*

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{n}) = 0$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{2} - \ldots - a_nx_i^{n})(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{n})(x_i)^2 = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_n} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{\,n})(x_i)^n = 0$$

Penyelesaian persamaan diatas adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{n}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{n}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_i - ma_0 - a_1\sum_{i=1}^{m}x_i - a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^2 - \ldots - a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,n} = 0$$

$$ma_0 + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i + a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + \ldots + a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,n} = \sum_{i=1}^{m}y_i \quad \ldots\ldots(2.56)$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^{\,2} - \ldots - a_nx_i^{n})(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}(x_iy_i - a_0x_i - a_1x_i^{\,2} - a_2x_i^{\,3} - \ldots - a_nx_i^{n+1}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_iy_i - a_0x_i - a_1\sum_{i=1}^{m}x^2{}_i - a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^3 - \ldots - a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,n+1} = 0$$

$$a_0 x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \qquad (2.57)$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_n x_i^n)(x_i)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i - a_0 x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 - \ldots - a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} = 0$$

$$a_0 x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i \qquad (2.58)$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_n} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_n x_i^n)(x_i)^n = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i - a_0 x_i^n - a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} - a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} - \ldots - a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+n} = 0$$

$$a_0 x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+n} = \sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i \qquad (2.59)$$

Persamaan (2.56) sampai dengan (2.59) dapat disusun dalam bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \ldots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \ldots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \ldots & \sum x_i^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \ldots & \sum x_i^{n+n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \ldots \\ \sum x_i^n y_i \end{Bmatrix} \qquad (2.60)$$

Berikut ini contoh data-data yang akan dibuat grafik fungsi polinomial

x_i	0,5	1	2	3	5,5	8	10	11	12	14
y_i	1	2	4	4,5	8	7	1	10	6	4

Penyelesaian :

Fungsi polynomial derjat dua : $y = ao + a_1 x_i + a_2 x_i^2$

Jumlah kuadrat kesalahan:

$$Sr = \sum_{i=1}^{m}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$$

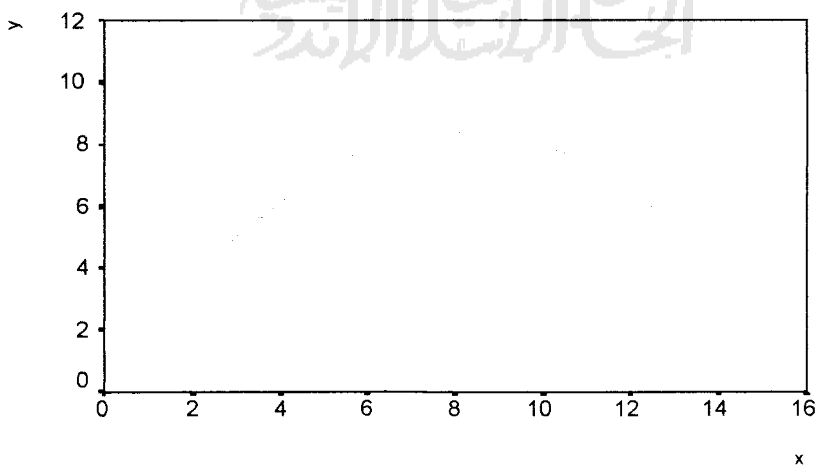
$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

No	xi	yi	xi^2	xi^3	xi^4	xiyi	xi^2yi
1	0,5	1	0,25	0,125	0,063	0,5	0,25
2	1	2	1	1	1	2	2
3	2	4	4	8	16	8	16
4	3	4,5	9	27	81	13,5	40,5
5	5,5	8	30,25	166,375	915,063	44	242
6	8	7	64	512	4096	56	448
7	10	10	100	1000	10000	100	1000
8	11	7	121	1331	14641	77	847
9	12	6	144	1728	20736	72	864
10	14	4	196	2744	38416	56	784
$\sum$	67	53,5	669,5	7517,5	88902,125	429	4243,75

$$\begin{bmatrix} 10 & 67 & 669{,}5 \\ 67 & 669{,}5 & 7517{,}5 \\ 669{,}5 & 7517{,}5 & 88902{,}125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 53{,}5 \\ 429 \\ 4243{,}75 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}0009 \\ 2{,}0742 \\ -0{,}1277 \end{Bmatrix}$$

Jadi persamaan garis diatas menjadi : $y = -0{,}1277x^2 + 2{,}0742x - 0{,}0009$



Gambar 2.9 Grafik hubungan x dan y dengan fungsi polinomial