BAB III

LANDASAN TEORI

Sebagai dasar teori dalam penelitian ini, akan dijelaskan beberapa teori tentang struktur dengan derajat kebebasan tunggal, struktur dengan derajat kebebasan banyak dan analisis kekakuan dari pengaku. Keseluruhan penjelasan analisis struktur dalam bab ini adalah dengan aggapan sistem linier elastis.

3.1 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF)

Untuk menyusun persamaan differensial gerakan suatu massa maka akan diambil suatu model struktur dengan derajat kebebasan tunggal seperti pada Gambar 3.1. Dengan anggapan kolom bangunan terjepit secara penuh dan massa struktur tergumpal disatu titik. Berdasarkan *free body* diagram, maka

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \qquad (3.1)$$

$$F_M(t) = m\ddot{y}(t) \quad ; \quad F_D(t) = c\dot{y}(t) \quad ; \quad F_S(t) = ky(t) \qquad (3.2)$$

F_M, F_D *dan* F_S masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom, $F(t)$ adalah beban dinamik dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) kedalam persamaan (3.1) menjadi :

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t) \qquad (3.3)$$

Persamaan diatas disebut persamaan differensial gerakan *(differensial equation of motion)* pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $F(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y dan F, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis dengan

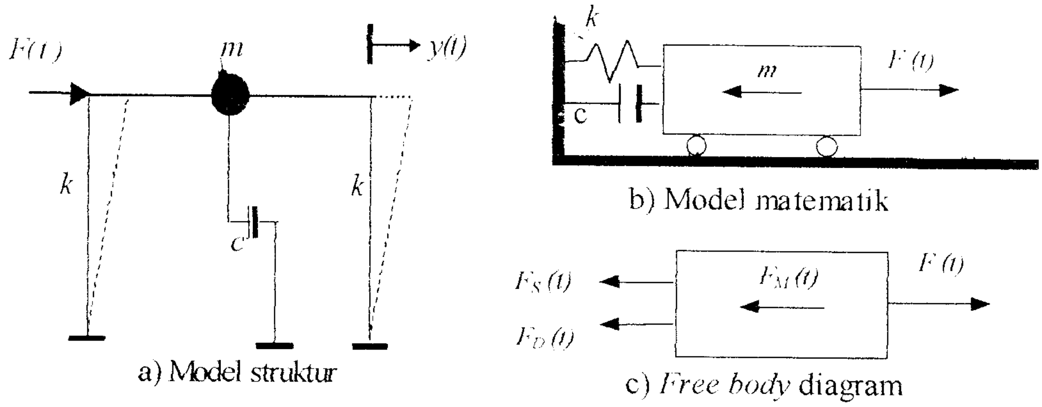
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \qquad (3.4)$$

Dalam prinsip dinamika struktur diperoleh hubungan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad / det) } \omega = \textit{anguler frekuensi} \qquad (3.5)$$

dan

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (detik) } T = \text{periode.} \qquad (3.6)$$

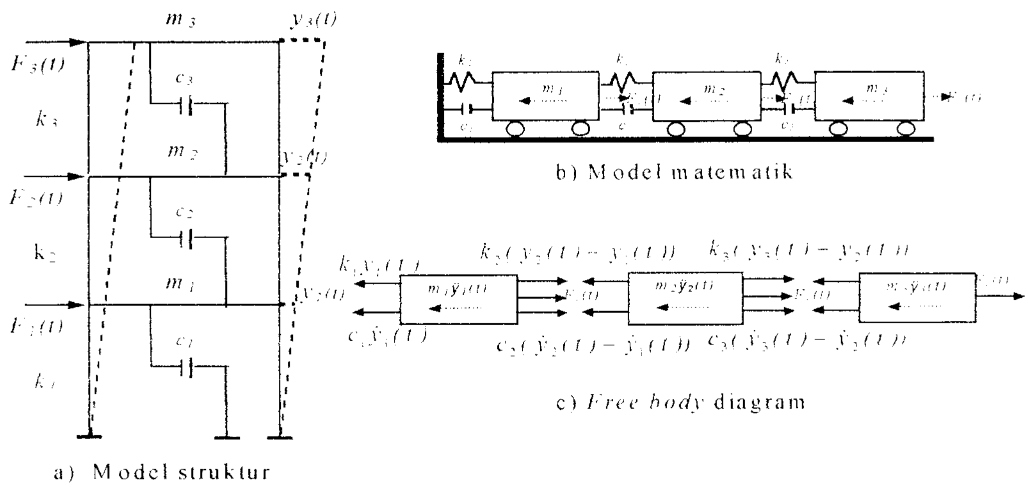


Gambar 3.1 Struktur SDOF akibat beban dinamika

3.2 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Umumnya struktur bangunan gedung juga mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF).

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan disatu titik pada lantai (*lumped mass*), dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan dapat dipandang sebagai struktur kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, dapat digunakan anggapan shear building. Selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $F(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, F sebagaimana penulisan pada struktur SDOF di muka. Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti pada Gambar 3.2a, struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai n-tingkat akan mempunyai n-derajat kebebasan dan mempunyai n-mode.



Gambar 3.2 Struktur MDOF

Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti Gambar 3.2 maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan. Berdasarkan prinsip keseimbangan dinamik pada diagram *free body* akan diperoleh persamaan :

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + c_1\dot{y}_1 - k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - F_1 = 0 \quad (3.7a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_3(y_3 - y_2) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - F_2 = 0 \quad (3.7b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - F_3 = 0 \quad (3.7c)$$

Dari persamaan (3.7) untuk memperoleh keseimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat ini disebut *coupled equation* penyelesaian persamaan *coupled* diselesaikan secara simultan atau saling tergantung.

Dengan menyusun persamaan (3.7) menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) maka diperoleh persamaan dibawah ini :

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = F_1 \quad (3.8a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3\dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = F_2 \quad (3.8b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 - c_3\dot{y}_2 + c_3\dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = F_3 \quad (3.8c)$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matrik :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

(3.9)

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matrik yang lebih komplek :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F\} \quad (3.10)$$

Dimana matrik massa, redaman dan kekakuan masing masing adalah sebagai berikut :

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},\ [C]=\begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},\ [K]=\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Sedangkan $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{y\}$ *dan* $\{F\}$ masing masing disebut vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban.

$$\{\ddot{y}\}=\begin{Bmatrix} \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix},\ \{\dot{y}\}=\begin{Bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix},\ \{y\}=\begin{Bmatrix} y_3 \\ y_3 \\ y_3 \end{Bmatrix},\ \{F\}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2.1 Mode Shape dan Frekuensi

Suatu struktur umumnya akan bergerak jika ada pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal (*initial condition*). Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar y_o dan apabila gaya tarik tersebut dilepas kembali maka massa akan bergerak. Peristiwa gerakan massa tersebut dikenal dengan getaran bebas (*free vibration system*). Gerakan massa yang diakibatkan adanya pembebanan dari luar misalnya beban angin atau beban gempa, maka gerakan massa tersebut disebut sebagai gerakan dipaksa (*force vibration system*). Untuk menyederhanakan permasalahan, anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamik struktur.

Persamaan diferensial pada getaran bebas ($F(t)$ = 0) pada struktur adalah

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=0 \quad (3.13)$$

Frekuensi pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur yang dianggap tanpa redaman apabila nilai *damping ratio* cukup kecil. Apabila hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka untuk nilai $[\, C \,] = 0$

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=0 \tag{3.14}$$

Persamaan 3.14 adalah persamaan diferensial gerakan tanpa redaman, maka respon struktur akan bersifat harmonik, sehingga :

$$\{Y\} = \{\phi\}\, Sin\,(\omega t) \tag{3.15}$$

$$\{\dot{Y}\} = \omega\,\{\phi\}\, Cos\,(\omega t) \tag{3.16}$$

$$\{\ddot{Y}\} = -\omega^2\,\{\phi\}\, Sin\,(\omega t) \tag{3.17}$$

Dalam hal ini $\{\phi\}$ adalah vektor *mode shape*. Subtitusi persamaan (3.15) dan (3.17) kedalam persamaan (3.14) akan diperoleh :

$$-\omega^2[M]\{\phi\}\, Sin\,(\omega t)+[K]\{\phi\}\, Sin\,(\omega t)=0 \tag{3.18a}$$

$$\{[K]-\omega^2[M]\}\{\phi\}=0 \tag{3.18b}$$

Persamaan (3.18b) merupakan persamaan *eigenproblem*, selanjutnya ,

$$\omega_i^{\,2}\,[M]\{\phi_i\} = [K]\{\phi_i\} \tag{3.19a}$$

$$\omega_j^{\,2}\,[M]\{\phi_j\} = [K]\{\phi_j\} \tag{3.19b}$$

Apabila transpose persamaan (3.19a) di*postmultiply* dengan $\{\phi_j\}$, maka

$$\left(\omega_i^{\,2}\,[M]\,\{\phi_i\}\right)^{T}\{\phi_j\}=\left([K]\{\phi_i\}\right)^{T}\{\phi_j\} \tag{3.20}$$

Karena matrik massa $[\, M \,]$ dan matrik kekakuan $[\, K \,]$ adalah matrik simetri, maka $[\, M \,]^T = [\, M \,]$ dan $[\, K \,]^T = [\, K \,]$, sehingga

$$\omega_i^{\,2}\,\{\phi_i\}^{T}[M]\{\phi_j\}=\{\phi_i\}^{T}[K]\{\phi_j\} \tag{3.21}$$

Apabila persamaan (3.19b) dikalikan $\{\phi_i\}^T$, maka

$$\omega_j^2 \{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = \{\phi_i\}^T [K]\{\phi_j\} \qquad (3.22)$$

Apabila persamaan (3.21) dikurangi dengan persamaan (3.22), maka akan diperoleh

$$\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = 0 \qquad (3.23)$$

Karena $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, maka $\omega_i^2 - \omega_j^2 \neq 0$ sehingga

$$\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = 0 \qquad (3.24)$$

Kondisi *orthogonal* berlaku pada matrik kekakuan $[K]$ dan kondisi *orthogonal* dianggap berlaku juga terhadap matrik redaman $[C]$, maka

$$\{\phi_i\}^T [K]\{\phi_j\} = 0 \qquad i \neq j \qquad (3.25a)$$

$$\{\phi_i\}^T [C]\{\phi_j\} = 0 \qquad i \neq j \qquad (3.25b)$$

Untuk menyelesaikan persamaan simultan pada persamaan (3.19), maka persamaan (3.18b) dapat ditulis kembali menjadi persamaan (3.26)

$$\left\{ [K] - \omega^2 [M] \right\} \{\phi\} = 0 \qquad (3.26)$$

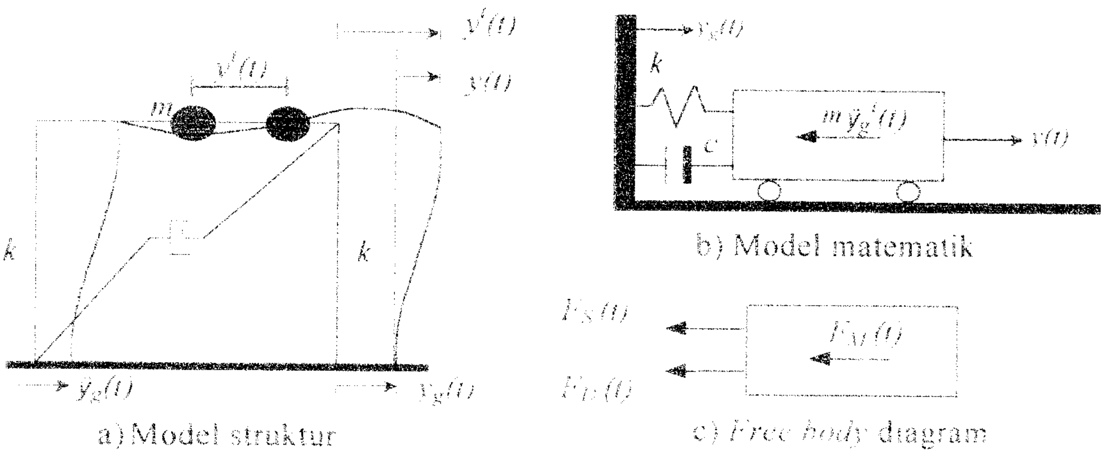
Persamaan (3.26) akan ada penyelesaian (*nontrivial solution*) atau sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan $\{ [K] - \omega^2 [M] \}$ adalah nol maka

$$\left\{ [K] - \omega^2 [M] \right\} = 0 \qquad (3.27)$$

Apabila jumlah derajat kebebasan adalah n, maka persamaan (3.27) akan menghasilkan suatu polinomial pangkat n yang selanjutnya akan menghasilkan untuk $i = 1, 2, 3, \ldots n$. Selanjutnya substitusi masing-masing frekuensi ω_i ke dalam persamaan (3.26) akan diperoleh nilai-nilai $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots \phi_n$

3.3. Akibat Gerakan Tanah

Beban dinamik yang umum diperhitungkan di dalam struktural analisis selain beban angin adalah beban gempa. Gempa bumi akan mengakibatkan getaran pada permukaan tanah yang terekam dalam bentuk aselerogram. Selain itu getaran tanah dipermukaan tanah juga akan menyebabkan percepatan tanah dan simpangan secara horisontal (*horisontal displacement*). Dalam hal ini masih ada anggapan bahwa pondasi dan tanah pendukungnya bergerak secara bersama sama atau pondasi dianggap menyatu dengan tanah. Anggapan ini tidak sepenuhnya benar karena tanah bukanlah material yang kaku dan menyatu dengan pondasi.



Gambar 3.3 Model struktur gerakan massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah

Sesungguhnya adalah antara pondasi dan tanah tidak akan bergerak secara bersama sama. Pondasi masih akan bergerak secara horisontal relatif terhadap tanah yang mendukungnya. Simpangan tanah secara horisontal dinamik akan berakibat struktur bangunan menjadi bergetar dan bergoyang. Persamaan diferensial gerakan massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah dapat diturunkan dengan mengambil model struktur seperti Gambar 3.3.

Berdasarkan pada *free body diagram* seperti gambar di atas maka akan didapatkan persamaan

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0 \tag{3.28}$$

$$F_M(t) = m\ddot{y}^t(t), \qquad F_D(t) = c\dot{y}(t), \qquad F_S(t) = ky(t) \tag{3.29}$$

Sedangkan $\ddot{y}^t(t)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.3a adalah

$$\ddot{y}^t(t) = \ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t) \tag{3.30}$$

F_M, F_D dan F_S masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan. Sedangkan *m*, *c*, *k* masing-masing adalah massa, redaman, dan kekakuan kolom. Substitusi persamaan (3.30) ke dalam (3.29), maka persamaan (3.28) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y}^t(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \tag{3.31}$$

$$m(\ddot{y}_g(t) + m\ddot{y}(t)) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \tag{3.32}$$

$$m\ddot{y}_g(t) + m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0, \tag{3.33}$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_g(t) \tag{3.34}$$

Persamaan (3.34) adalah persamaan differensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah *(base motion)*. Ruas kanan pada persamaan (3.34) biasa disebut sebagai beban gempa. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$ dan y sehingga persamaan (3.34) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \tag{3.35}$$

3.4 Jenis-jenis simpangan

Jenis-jenis simpangan yang terjadi pada struktur umumnya ada 3 macam yaitu simpangan relatif, simpangan antar tingkat, dan simpangan absolut. Jenis-jenis simpangan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.4 dan akan diuraikan sebagai berikut ini.

1. Simpangan relatif

Simpangan relatif tiap lantai menurut persamaan diferensial independen (*uncoupling*) adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap mode.

$$y_i = \sum \phi_{ij} . Z_j \tag{3.36}$$

dimana : y_i = simpangan relatif lantai ke-i,

ϕ_{ii} = *mode shapes*, dan

Z_j = modal amplitudo.

$$= \frac{\Gamma C g}{\omega^2}$$

2. Simpangan antar tingkat (*inter-strory drift*)

Simpangan antar tingkat adalah simpangan yang terjadi pada tiap lantai, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan relatif lantai atas dikurangi simpangan relatif lantai di bawahnya. *Inter-strory drift* sangat mungkin terjadi pada tingkat yang lemah. Terjadinya distribusi kekakuan struktur secara vertikal yang tidak merata akan menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah tersebut. *Inter-strory drift* dapat dihitung dengan rumus :

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \qquad (3.37)$$

dimana : Δy_i = simpangan absolut

y_i = simpangan relatif lantai ke-i, dan

y_{i-1} = simpangan relatif lantai ke-(i – 1).

3. Simpangan absolut

Simpangan absolut adalah merupakan penjumlahan antara simpangan relatif tiap lantai dengan simpangan akibat tanah. Simpangan absolut dihitung dengan rumus:

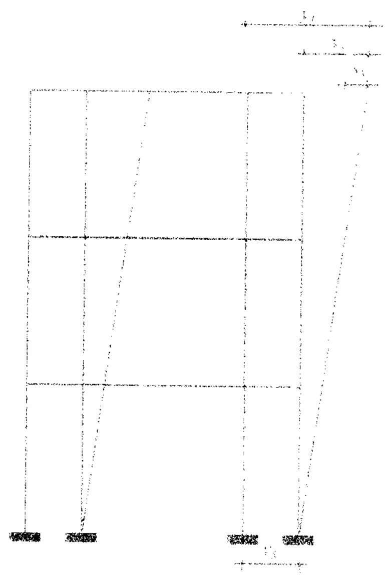
$$y_t = y_i + y_g \tag{3.38}$$

dimana : y_t = simpangan absolut

y_i = simpangan relatif lantai ke-i, dan

y_g = simpangan akibat tanah.

Simpangan absolut mempunyai pengaruh terhadap kemungkinan terjadinya benturan antar bangunan yang berdekatan (*structrural pounding*). Masalah *structrural pounding* ini biasanya terjadi pada bangunan yang berdekatan untuk memaksimalkan penggunaan lahan, hal ini dapat menyebabkan kerusakan yang fatal pada bangunan bahkan dapat menyebabkan kerusakan total. Hal ini dapat diatasi dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan absolut pada setiap lantai.



Gambar 3.4 Model struktur dengan jenis-jenis simpangannya

3.5 Gaya Geser Dasar

Persamaan gaya horisontal atau gaya horisontal maksimum yang bekerja pada suatu massa akibat kontribusi dari suatu mode ke-j adalah sebagai berikut.

$$F_j = M\phi_j \frac{P_j^*}{M_j^*} C\, g \qquad (3.39)$$

dimana F_j = Gaya horisontal mode ke-j

ϕ_j = Nilai koordinat tiap pola/ragam goyangan mode ke-j

$P_j{*} = \{\phi\}_j^T\,[M]\,\{I\}$

$M_j{*} = \{\phi\}_j^T\,[M\}\,\{\phi\}_j$

C = Koefi sien gempa dasar

g = Percepatan gravitasi

Sedangkan gaya deser dasar merupakan jumlah dari hasil penjumlahan gaya horisontal tingkat tiap mode.

3.6 Momen Guling

Momen guling didapatkan dengan cara mengalikan gaya horisontal lantai ke-i terhadap tinggi lantai.

$$M_b = \sum_{i=1}^{N} F_i . h_i \qquad (3.40)$$

dimana M_b = momen guling dasar

F_i = gaya horisontal lantai ke-i

h_i = tinggi tingkat ke-i

N = jumlah lantai

3.7 Kekakuan Pengaku

Kekakuan dari pengaku vertikal berdasarkan Gambar 3.5 untuk semua jenis pengaku adalah sebagai berikut.

$$p = \frac{AE}{L}\delta \tag{3.41}$$

di mana p = gaya aksial

A = luas *bracing*

E = modulus elastisitas

L = panjang *bracing*

$$fs = p\ cos\,\theta \tag{3.42}$$

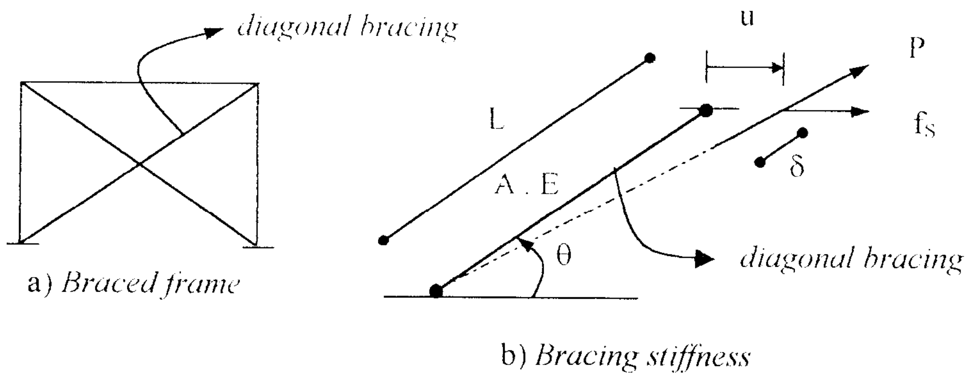
$$u = \frac{\delta}{cos\,\theta} \tag{3.43}$$

substitusi $p = \dfrac{fs}{cos\ \theta}$ dan $\delta = u\ cos\ \theta$ ke dalam persamaan (3.41)

akan mendapatkan :

$$fs = k_{brace}u \tag{3.44}$$

$$k_{brace} = \frac{AE}{L}\,cos^2\,\theta \tag{3.45}$$



Gambar 3.5 Portal dengan *Double diagonal bracing*