

## BAB III

### LANDASAN TEORI

Landasan teori memuat dasar-dasar teori yang akan dipergunakan secara garis besar dan merupakan tuntunan yang digunakan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Bagian ini juga akan memuat teori-teori dinamika struktur, model-model matematik dan penjabarannya.

#### 3.1 Penentuan Angka Kekakuan Tiap Tingkat

Untuk penentuan angka kekakuan tiap tingkat terdapat 3 metode yang berbeda, antara lain

##### 1. Metode *Chopra*

Pada metode ini kekakuan kolom dan kekakuan balok dihitung tanpa memperhitungkan kekakuan joint.

Rumus:

$$k = \frac{2.12EI}{h^3} \frac{12\rho+1}{12\rho+4} \quad (3.1)$$

$$\rho = \frac{\sum \frac{I_b}{L_b}}{\sum \frac{I_c}{L_c}} \quad (3.2)$$

## 2. Metode *Shear Building*

Balok lantai tingkat dianggap tetap horisontal baik sebelum maupun sesudah penggoyangan. Pada prinsip ini dimungkinkan pemakaian *lump mass* model.

Rumus :

$$k = 12EI / h^3 \quad (3.3)$$

## 3. Metode *Muto*

Pada prinsip ini kekakuan joint ikat diperhitungkan sehingga perhitungan kekakuan balok maupun kolom menjadi lebih teliti.

Rumus :

$$k = \frac{0,5 + k'}{2 + k'} k_f \quad (3.4)$$

$$k_f = \frac{12EI}{h^3} \quad (3.5)$$

$$k' = \frac{\sum k_b}{k_c} \quad (3.6)$$

### 3.2 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF) Akibat Pembebanan Dinamik

Beban dinamik yang bekerja pada struktur dianggap bekerja secara langsung pada elevasi lantai, misalnya beban akibat putaran mesin  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ . Model sistem dengan derajat kebebasan tunggal akibat beban dinamik ditunjukkan dalam Gambar 3.1.

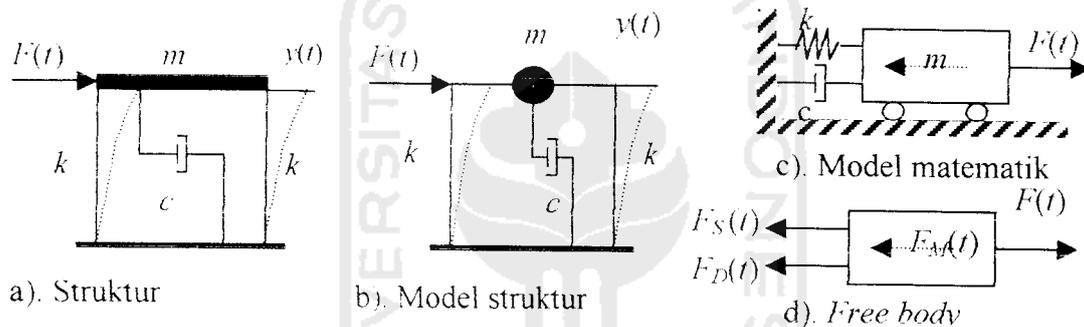
Keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1(d) adalah

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \quad (3.7)$$

dengan,

$$F_M(t) = m \cdot \ddot{y}(t), \quad F_D(t) = c \cdot \dot{y}(t), \quad F_S(t) = k \cdot y(t) \quad (3.8)$$

$F_M(t)$ ,  $F_D(t)$ ,  $F_S(t)$  masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom,  $F(t)$  adalah beban dinamik, dan  $\ddot{y}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $y(t)$  masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan, sedangkan  $m$ ,  $c$ ,  $k$  masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan tingkat.



**Gambar 3.1.** Model sistem SDOF akibat beban dinamik

Persamaan (3.8) disubstitusi ke dalam persamaan (3.7), maka akan didapatkan

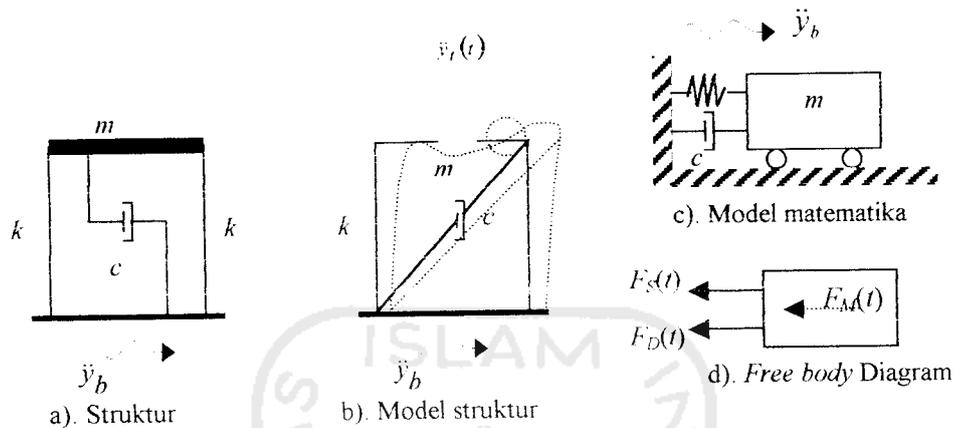
$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (3.9)$$

persamaan (3.9) disebut persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*).

### 3.3 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF) Akibat Beban Gempa

Beban dinamik yang umum diperhitungkan adalah beban gempa. Gempa bumi akan menyebabkan getaran pada tanah, percepatan tanah serta simpangan

horizontal (Widodo, 1997).



**Gambar 3.2.** Model sistem SDOF akibat gerakan tanah

Model sistem dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah ditunjukkan dalam Gambar 3.2. Berdasar *free body diagram* yang ditunjukkan pada Gambar 3.2(d), maka persamaan differensial gerakan adalah

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0 \quad (3.10a)$$

dengan  $F_M(t) = m\ddot{y}_r(t)$ ,  $F_D(t) = c\dot{y}(t)$ ,  $F_S(t) = ky(t)$ . (3.10b)

Persamaan (3.10b) disubstitusi ke dalam persamaan (3.10a). Setelah terjadi gempa bumi, tanah mempunyai percepatan, kecepatan, simpangan masing-masing sebesar  $\ddot{y}_b(t)$ ,  $\dot{y}_b(t)$ , dan  $y_b(t)$  terhadap posisi awal, sedangkan hanya massa struktur saja yang mengalami percepatan akibat pergerakan tanah, maka persamaan (3.10) menjadi

$$m\ddot{y}_r(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0, \quad (3.11a)$$

dengan

$$\ddot{y}_r(t) = \ddot{y}_b(t) + \ddot{y}(t), \quad (3.11b)$$

Persamaan (3.11b) disubstitusi ke dalam persamaan (3.11a), maka persamaan (3.11a) dapat ditulis menjadi

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_b(t) \quad (3.12)$$

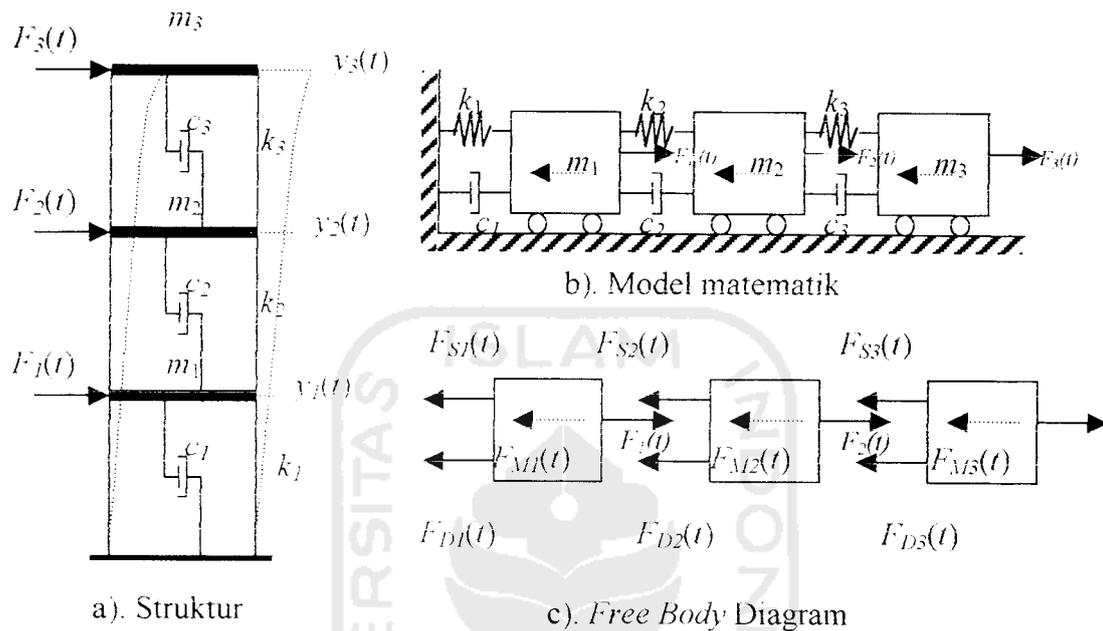
Persamaan (3.12) adalah persamaan differensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat beban gempa.

### 3.4 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF) Akibat Beban Dinamik

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan pada setiap lantai (*lumped mass*), dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan berubah menjadi struktur kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, maka dapat digunakan anggapan *shear building* sebagaimana pada struktur SDOF.

Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti pada Gambar 3.3(a), struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai  $n$  - tingkat akan mempunyai  $n$  - derajat kebebasan dan mempunyai  $n$  - *modes*.

Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur MDOF umumnya dipakai goyangan senada untuk *mode* pertama yaitu goyangan yang  $y_1(t) < y_2(t) < y_3(t)$  .



**Gambar 3.3** Model Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada Gambar 3.3(c), maka akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini.

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1 \dot{y}_1(t) + k_1 y_1(t) - c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - k_2 (y_2(t) - y_1(t)) = F_1(t) \quad (3.13a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 (y_2(t) - y_1(t)) - c_3 (\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) - k_3 (y_3(t) - y_2(t)) = F_2(t) \quad (3.13b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3(t) + c_3 (\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) + k_3 (y_3(t) - y_2(t)) = F_3(t) \quad (3.13c)$$

Selanjutnya persamaan (3.13) dapat ditulis menjadi matrik dengan ekspresi :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.14)$$

yang mana matrik ekspresi di atas (massa, redaman dan kekakuan) masing-masing adalah

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.15a)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.15b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.15c)$$

$$\{\ddot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \{\dot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} \text{ dan } \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

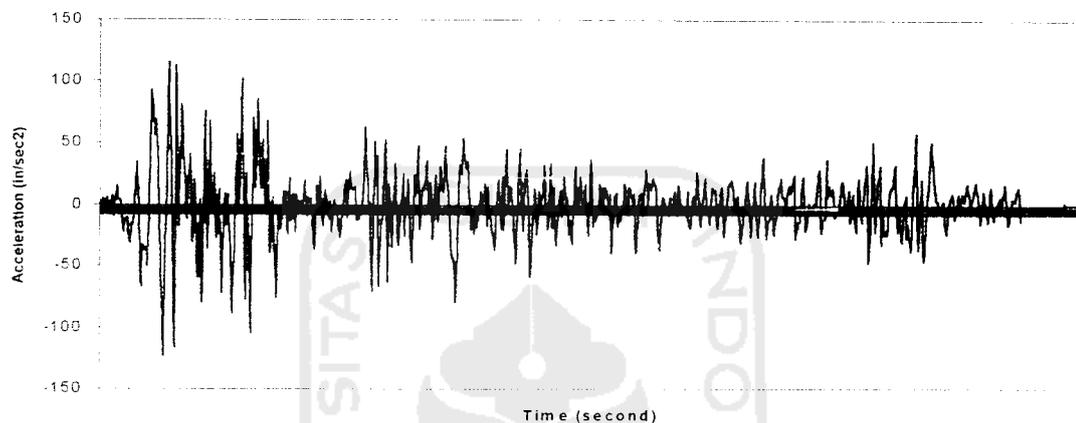
$\{\ddot{y}(t)\}$ ,  $\{\dot{y}(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$ , dan  $\{F(t)\}$  adalah vektor percepatan, kecepatan, simpangan, dan gaya.

### 3.5 Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF) Akibat Beban Gempa

Beban gempa adalah suatu beban yang unik. Umumnya beban yang bekerja pada struktur dalam satuan gaya, tetapi beban gempa berupa percepatan tanah, beban lain biasanya statis, tidak berubah pada periode waktu yang pendek. Tetapi beban gempa adalah beban yang dinamis yang berubah dengan sangat cepat dalam periode waktu yang pendek, dapat diartikan beban gempa berubah setiap detik. Beban lain biasanya bekerja pada arah vertikal, tetapi beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal maupun horisontal bahkan beban gempa dapat berupa putaran ( Hu, Liu and Dong, 1996 ).

Analisis yang didasarkan pada riwayat waktu dapat digunakan sebagai

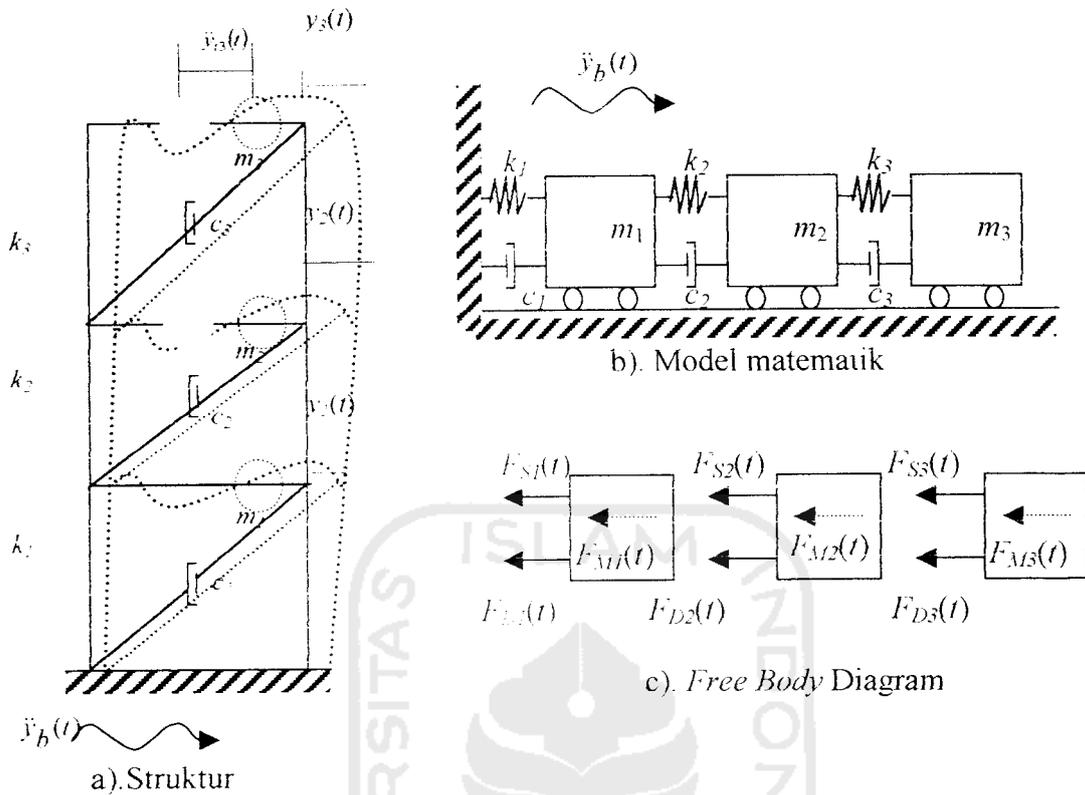
beban gempa yang berpengaruh pada struktur. Pada tugas akhir ini dipakai analisa riwayat waktu gempa El Centro tahun 1940 berupa percepatan tanah dalam satuan unit  $\text{cm}/\text{sec}^2$ , yang kemudian diubah ke dalam satuan unit  $\text{in}/\text{sec}^2$  seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.4.



**Gambar 3.4.** *Ground Acceleration El Centro Earthquake 1940*

Percepatan tanah selama berlangsungnya gempa bumi bervariasi secara irregular, sehingga penyelesaian menggunakan metode numerik akan sangat membantu. Hasil respon yang akan disajikan pada tugas akhir ini diperoleh dari penyelesaian persamaan untuk percepatan tanah yang bervariasi secara linier setiap  $\Delta t = 0.02$  detik. Pada daerah rawan gempa, masalah prinsip yang perlu diperhatikan adalah perilaku struktur bawah akibat beban gempa. Perpindahan tanah dinotasikan dengan  $y_b(t)$ , sedangkan antara massa dengan tanah dinotasikan dengan  $y(t)$ , sehingga perpindahan total yang terjadi adalah (Chopra,1995)

$$y_t(t) = y(t) + y_b(t) \quad (3.17)$$



Gambar 3.5. Model Sistem MDOF dengan Beban Gempa

Persamaan gerakan struktur yang dikenai beban gempa, dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajat kebebasan tunggal. Dengan menggunakan model SDOF pada Gambar 3.2, maka akan didapatkan persamaan (3.12).

Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada Gambar 3.5(b), maka dari persamaan (3.12) akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini.

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1 \dot{y}_1(t) + k_1 y_1(t) - c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - k_2 (y_2(t) - y_1(t)) = -m_1 \ddot{y}_b(t) \quad (3.18)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 (y_2(t) - y_1(t)) - c_3 (\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) - k_3 (y_3(t) - y_2(t)) = -m_2 \ddot{y}_b(t) \quad (3.19)$$

$$m_3 \ddot{y}_3(t) + c_3 (\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) + k_3 (y_3(t) - y_2(t)) = -m_3 \ddot{y}_b(t) \quad (3.20)$$

Selanjutnya persamaan (3.13) dapat ditulis menjadi matrik dengan ekspresi :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_b(t) \quad (3.21)$$

yang mana matrik ekspresi di atas (massa, redaman dan kekakuan) masing-masing adalah

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.22a)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.22b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.22c)$$

$$\{\ddot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \{\dot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} \text{ dan } [M]\{\ddot{y}_b(t)\} = \begin{Bmatrix} -M_1\{\ddot{y}_b(t)\} \\ -M_2\{\ddot{y}_b(t)\} \\ -M_3\{\ddot{y}_b(t)\} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$\{\ddot{y}(t)\}$ ,  $\{\dot{y}(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$ , dan  $[M]\{\ddot{y}_b(t)\}$  adalah vektor percepatan, kecepatan, simpangan, dan gaya.

### 3.6 Mode Shape dan Frekuensi

Suatu struktur umumnya akan bergerak akibat adanya pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal (*initial condition*). Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar  $y_n$  dan apabila gaya tarik tersebut dilepas kembali maka massa akan bergerak. Peristiwa pergerakan massa tersebut disebut dengan getaran bebas (*free vibration system*). Gerakan suatu massa disebabkan adanya pembebanan dari luar misalnya beban angin, beban gempa dan lainnya. Maka gerakan massa dikelompokkan sebagai gerakan dipaksa (*forced vibration system*). Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamika struktur.

Persamaan differensial gerak getaran bebas pada struktur seperti pada persamaan (3.14) dalam kondisi khusus dapat dinyatakan dengan

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = 0 \quad (3.24)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, bila nilai rasio redaman (*damping ratio*) kecil.

Maka persamaan (3.24) akan menjadi

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = 0 \quad (3.25)$$

Persamaan (3.25) diasumsikan pada getaran bebas, maka vektor  $\{y\}$  berbentuk

$$\{y(t)\} = \{\phi\} z(t) \quad (3.26a)$$

$$\{\dot{y}(t)\} = \{\phi\} \dot{z}(t) \quad (3.26b)$$

dengan  $\{\phi\}$  adalah vektor *mode shape* yaitu suatu vektor yang tidak berdimensi, yang memiliki paling sedikit sebuah elemen yang tidak sama dengan nol. Sedangkan  $z$  dan  $\dot{z}$  adalah vektor perpindahan dan vektor percepatan. Jika persamaan (3.26) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.25) maka akan didapatkan

$$[M]\{\phi\}\ddot{z}(t) + [K]\{\phi\}z(t) = 0 \quad (3.27)$$

$[M]$  dan  $[K]$  adalah matrik konstan dan pada sebuah hipotesis disebutkan bahwa  $\{\phi\}$  juga merupakan matrik konstan, maka akan didapatkan

$$\ddot{z}(t) + (\text{constan}) z(t) = 0 \quad (3.28)$$

Jika konstanta di atas adalah  $\omega_n^2$  (*undamped natural frequency*), maka persamaan

(3.28) akan menjadi

$$\ddot{z}(t) + \omega_n^2 z(t) = 0 \quad (3.29)$$

Persamaan (3.29) diselesaikan dengan

$$z(t) = A \sin \omega_n t \quad (3.30)$$

Dengan demikian maka persamaan (3.26) akan menjadi

$$\{y(t)\} = \{\phi\} A \sin \omega t \quad (3.31a)$$

sehingga

$$\{\ddot{y}(t)\} = -\omega^2 \{\phi\} A \sin \omega t \quad (3.31b)$$

Persamaan (3.31) dimasukkan ke dalam persamaan (3.25) didapatkan

$$(-\omega^2 [M] \{\phi\} A \sin \omega t + [K] \{\phi\} A \sin \omega t) = 0 \quad (3.32)$$

Persamaan (3.29) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*), jika  $A$  dan  $\omega$

keduanya adalah tidak sama dengan nol, sehingga

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0 \quad (3.33a)$$

Persamaan (3.30) akan ada penyelesaiannya atau suatu sistem akan ada amplitudo

yang terbatas apabila nilai determinan ( $\{[K] - \omega^2 [M]\}$ ) adalah nol, maka

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (3.33b)$$

persamaan (3.33b) disebut dengan *eigenproblem*. Nilai determinan pada persamaan

(3.31) akan menghasilkan suatu persamaan polinomial dengan derajat ke- $n$  yaitu

$\lambda = \omega_n^2$ , kemudian nilai  $\lambda$  disubstitusikan dengan persamaan (3.27) maka akan

menghasilkan nilai *mode shape*  $\{\phi\}_n$  dan simpangan  $(y(t))_n$ . Indeks  $n$  menunjukkan

ragam/pola goyangan.

### 3.7 Persamaan Differensial Independen ( *Uncoupling* )

Pada kondisi standar struktur yang mempunyai  $n$  derajat kebebasan akan mempunyai  $n$  modes. Pada prinsip ini, masing-masing mode akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap-tiap massa. Simpangan massa ke- $n$  atau  $y(t)_n$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap modes. Kontribusi mode ke- $n$  terhadap simpangan horisontal massa ke- $n$  tersebut dinyatakan dalam produk antara  $\phi_{ni}$  dengan suatu modal amplitudo  $z_n$  yang

dinyatakan dalam bentuk

$$\{y(t)\} = [\varphi]\{\dot{z}(t)\} \quad (3.34a)$$

$$\{\dot{y}(t)\} = [\varphi]\{\ddot{z}(t)\} \quad (3.34b)$$

$$\{\ddot{y}(t)\} = [\varphi]\{\ddot{z}(t)\} \quad (3.34c)$$

Substitusi persamaan (3.34) ke dalam persamaan (3.14) akan diperoleh

$$[M][\varphi]\{\ddot{z}(t)\} + [C][\varphi]\{\dot{z}(t)\} + [K][\varphi]\{z(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.35)$$

Apabila persamaan (3.35) dikalikan dengan *transpose* suatu mode  $\varphi_n^T$ , maka

$$\{\varphi_n^T\} [M][\varphi]\{\ddot{z}(t)\} + \{\varphi_n^T\} [C][\varphi]\{\dot{z}(t)\} + \{\varphi_n^T\} [K][\varphi]\{z(t)\} = -\{\varphi_n^T\} \{F(t)\} \quad (3.36)$$

Misal, diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan (3.36) berbentuk

$$[\varphi_{11} \quad \varphi_{21} \quad \varphi_{31}] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \\ \ddot{z}_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Dengan catatan persamaan di atas dalam hubungan orthogonal,  $n = i$ . Pada kondisi orthogonal apabila  $n$  tidak sama dengan  $i$  maka perkalian matrik sama dengan nol, yaitu

$$\{\varphi_n^T\} [M] \{\varphi_i\} = 0 \quad (3.38a)$$

$$\{\varphi_n^T\} [K] \{\varphi_i\} = 0 \quad (3.38b)$$

$$\{\varphi_n^T\} [C] \{\varphi_i\} = 0 \quad (3.38c)$$

Untuk mode ke- $n$  maka secara umum bentuk pada persamaan (3.37) dapat ditulis dengan

$$\{\varphi_n^T\} [M] \{\varphi_n\} \{\ddot{z}_n(t)\} \quad (3.39)$$

Persamaan (3.36) pada suku ke-2 dan ke-3 diubah seperti pada persamaan (3.39),

maka persamaan akan menjadi

$$\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n \ddot{z}_n(t) + \{\phi\}_n^T [C] \{\phi\}_n \dot{z}_n(t) + \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_n z_n(t) = -\{\phi\}_n^T [M] \{1\} \ddot{y}_b(t) \quad (3.40)$$

Persamaan (3.40) adalah persamaan differensial yang bebas *independent* antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan orthogonal, baik orthogonal matrik massa, matrik redaman dan matrik kekakuan. Dengan demikian untuk  $n$  derajat dengan  $n$  persamaan differensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent uncoupling*. Dengan sifat-sifat tersebut maka persamaan differensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh *mode*.

Berdasarkan persamaan (3.40), maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass*), redaman dan kekakuan :

$$M_n^* = (\phi)_n^T [M] \{\phi\}_n, \quad (3.41a)$$

$$C_n^* = (\phi)_n^T [C] \{\phi\}_n = 2\xi\omega_n M_n^*, \quad (3.41b)$$

$$K_n^* = (\phi)_n^T [K] \{\phi\}_n = \omega_n^2 M_n^*, \quad (3.41c)$$

$$P_n^* = \{\phi\}_n^T [M] \{1\} \quad (3.41d)$$

Dengan definisi seperti pada persamaan (3.41) maka persamaan (3.40) akan menjadi

$$M_n^* \ddot{z}_n(t) + C_n^* \dot{z}_n(t) + K_n^* z_n(t) = -P_n^* \ddot{y}_b(t) \quad (3.42)$$

atau dengan cara lain,

$$\ddot{z}_n(t) + 2\tilde{\xi}\omega_n \dot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = P_n \ddot{y}_b(t) M_n \quad (3.43)$$

Terdapat suatu normalisasi bahwa

$$\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n = 1 \quad (3.44a)$$

yang menghasilkan

$$M_n^* = 1 \quad (3.44b)$$

Berdasarkan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.44), maka persamaan (3.37) akan menjadi

$$\ddot{z}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{z}_n(t) + \omega_n^2 z_n(t) = -\Gamma_n \ddot{y}_b(t) \quad (3.45)$$

$$\Gamma_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} = \frac{\{\phi\}_n^T [M] \{1\}}{\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n} \quad (3.46)$$

Persamaan (3.46) sering disebut dengan partisipasi setiap *mode* atau *mode participation factor*.

Selanjutnya persamaan (3.45) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{\ddot{z}_n(t)}{\Gamma_n} + 2\zeta_n \omega_n \frac{\dot{z}_n(t)}{\Gamma_n} + \omega_n^2 \frac{z_n(t)}{\Gamma_n} = -\ddot{y}_b(t) \quad (3.47)$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa

$$\ddot{q}_n(t) = \frac{\ddot{z}_n(t)}{\Gamma_n}, \quad \dot{q}_n(t) = \frac{\dot{z}_n(t)}{\Gamma_n} \quad \text{dan} \quad q_n(t) = \frac{z_n(t)}{\Gamma_n} \quad (3.48)$$

Maka persamaan (3.47) menjadi

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -\ddot{y}_b(t) \quad (3.49)$$

Persamaan (3.49) adalah persamaan diferensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap *mode*.

Nilai partisipasi setiap *mode* akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode  $\phi_{ni}$  telah diperoleh. Nilai  $q_n(t)$ ,  $\dot{q}_n(t)$  dan  $\ddot{q}_n(t)$  dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai  $z_n$  dapat dihitung. Dengan demikian simpangan horisontal setiap tingkat akan dapat dihitung.

### 3.8 Respon Struktur Terhadap Beban Gempa

Persamaan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.49). Nilai  $q_n(t)$  dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.49) dengan persamaan gerakan mode ke- $n$  sistem dari SDOF. Sistem SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency*) ( $\omega_n$ ) dan rasio redaman ( $\xi_n$ ) mode ke- $n$  dari sistem MDOF, dengan  $n = 1, 2, 3, \dots, i$ .

Nilai yang akan dicari adalah  $q_n(t)$ , misalnya dipakai metode *Newmark's Acceleration Method* untuk *unconditionally stable procedures*, maka proses integrasi adalah sebagai berikut.

$$\dot{q}_{n+1}(t) = \dot{q}_{n-1}(t) \left[ (1-\gamma) + \Delta t \right] \ddot{q}_n(t) + (\gamma \cdot \Delta t) \ddot{q}_{n+1}(t) \quad (3.50a)$$

$$q_{n+1}(t) = q_n(t) + (\Delta t) \dot{q}_n(t) + \left[ (0,5 - \beta)(\Delta t)^2 \right] \ddot{q}_n(t) + \left[ \beta(\Delta t)^2 \right] \ddot{q}_{n+1}(t) \quad (3.50b)$$

Parameter  $\gamma$  dan  $\beta$  untuk *Newmark's Average Acceleration Method* adalah  $\gamma=1/2$  dan  $\beta=1/4$ , persamaan (3.50) disubstitusikan ke persamaan berikut

$$\Delta q_n(t) = q_{n+1}(t) - q_n(t) \quad \Delta \dot{q}_n(t) = \dot{q}_{n+1}(t) - \dot{q}_n(t) \quad \Delta \ddot{q}_n(t) = \ddot{q}_{n+1}(t) - \ddot{q}_n(t) \quad (3.51a)$$

$$\Delta y_n(t) = y_{n+1}(t) - y_n(t) \quad (3.51b)$$

Dari substitusi persamaan (3.50) ke persamaan (3.51) diperoleh

$$\Delta \dot{q}_n(t) = (\Delta t) \ddot{q}_n(t) + (\gamma \cdot \Delta t) \Delta \ddot{q}_n(t) \quad (3.52a)$$

$$\Delta q_n(t) = (\Delta t) \dot{q}_n(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{q}_n(t) + \beta(\Delta t)^2 \Delta \ddot{q}_n(t) \quad (3.52b)$$

Dari persamaan (3.52b) diperoleh

$$\Delta \ddot{q}_n(t) = \frac{\gamma}{\beta \cdot (\Delta t)^2} \Delta q_n(t) - \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \dot{q}_n(t) - \frac{1}{2\beta} \ddot{q}_n(t) \quad (3.53a)$$

Substitusi persamaan (3.53a) ke dalam persamaan (3.52a), diperoleh persamaan

$$\Delta \dot{q}_n(t) = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta q_n(t) - \frac{\gamma}{\beta} \dot{q}_n(t) + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{q}_n(t) \quad (3.53b)$$

Substitusikan persamaan (3.53a) dan persamaan (3.53b) ke dalam persamaan (3.49) akan diperoleh

$$\left( \omega^2 + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta \cdot \Delta t} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \right) \Delta q_n(t) = \Delta y + \left( \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \right) \dot{q}_n(t) + \left[ \frac{1}{2\beta} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \xi\omega\gamma \right] \ddot{q}_n(t) \quad (3.54)$$

Persamaan (3.54) dapat ditulis menjadi

$$\Delta q_n(t) = \frac{\Delta \ddot{y}_n(t) + a \cdot \dot{q}_n(t) + b \cdot \ddot{q}_n(t)}{\hat{k}} \quad (3.55a)$$

dengan.

$$\begin{aligned} a &= \left[ \frac{4}{\Delta t} + 4\xi\omega \right], \\ b &= 2, \\ \hat{k} &= \left[ \omega^2 + \frac{4\xi\omega}{\Delta t} + \frac{4}{\Delta t^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.55b)$$

Setelah diperoleh nilai  $q_{n(t)}$  untuk tiap-tiap mode, selanjutnya nilai simpangan tiap mode dapat diperoleh  $y_n(t)$ ,

$$y_n(t) = \Gamma_n \phi_n q_n(t) \quad (3.56)$$

Selanjutnya gaya geser tingkat akibat mode ke- $n$  adalah

$$F_n(t) = [M]_n \Gamma_n \phi_n q_n(t) \quad (3.57a)$$

Sehingga gaya geser dasar

$$V_n(t) = - \left( \sum_{n=1}^i F_n(t) \right), \quad (3.57b)$$

dengan  $i=5$  pada model struktur 5 lantai dan  $i=7$  untuk model struktur 7 lantai. Momen guling didapat dengan mengalikan gaya lantai yang terjadi pada setiap tingkat ( $F_n(t)$ ) dengan jarak ( $h_n$ ), maka

$$M_n(t) = \sum_{i=i}^i (F_n(t) h_n) \quad (3.57c)$$

### 3.9 Kandungan Frekuensi (*Frequency Contents*)

Persamaan differensial gerakan suatu massa SDOF tanpa redaman dengan beban harmonik sederhana seperti pada persamaan (3.9) dalam kondisi khusus dapat dinyatakan dengan

$$y(t) = \frac{P_o}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \left\{ \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right\} \quad (3.58)$$

Persamaan (3.58) menunjukkan bahwa respon struktur akan dipengaruhi baik oleh frekuensi sudut beban dinamik ( $\Omega$ ) dan frekuensi sudut akibat getaran struktur ( $\omega$ ). Respon struktur terdiri dari dua bagian pokok yaitu *steady state response* yaitu respon yang ditunjukkan oleh suku  $\sin(\Omega t)$  dan *transient response* yang ditunjukkan oleh suku  $\sin(\omega t)$ .

Apabila frekuensi sudut beban dinamik sama dengan frekuensi sudut getaran struktur maka nilai penyebut persamaan di atas akan sama dengan nol sehingga respon struktur menjadi tak terhingga, keadaan ini disebut resonansi, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.6.

Persamaan (3.58) dapat ditulis dalam fungsi *dynamics load factor (DLF)* yaitu :

$$y(t) = y_{st} DLF, \quad y_{st} = \frac{P_o}{k} \quad \text{dan}$$

$$DLF = \frac{1}{1-r^2} \{ \sin(\Omega t) - r \sin(\omega t) \} \quad (3.59)$$

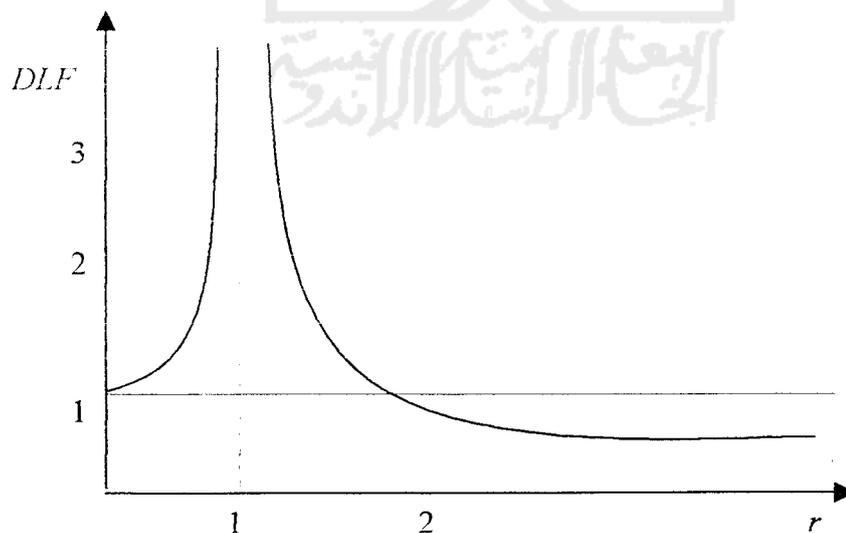
Di dalam soal-soal praktis, *transient response* sering diabaikan karena nilainya dianggap relatif kecil. Nilai *DLF* maksimum akan diperoleh apabila  $\sin(\Omega t) = 1$ , maka

$$DLF = \frac{1}{1-r^2} \quad (3.60)$$

dimana,

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad (3.61)$$

Plot antara *DLF* dan nilai frekuensi rasio  $r$  dapat dilihat pada Gambar 3.6.



**Gambar 3.6** *DLF* lawan Frekuensi Rasio

### 3.10 Jenis- jenis Simpangan dan Efeknya Terhadap Kerusakan

Jenis-jenis simpangan yang terjadi pada struktur umumnya ada 3 macam, yaitu simpangan relatif, simpangan antar tingkat dan simpangan absolut. Jenis-jenis simpangan tersebut akan diuraikan sebagai berikut ini.

#### 3.10.1 Simpangan Relatif

Simpangan relatif tiap lantai menurut persamaan diferensial independen (*uncoupling*) adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap mode.

$$y_r(t) = \sum_{n=1}^i \varphi_{nr} z_n(t) \quad (3.62)$$

dimana:  $y_n(t)$  = simpangan relatif lantai ke- $n$

$\varphi_{ni}$  = *mode shapes*, dan

$z_n(t)$  = modal amplitudo.

#### 3.10.2 Simpangan Antar Tingkat (*Inter-story drift*)

Simpangan antar tingkat adalah simpangan yang terjadi pada tiap tingkat, simpangan ini dihitung dengan simpangan relatif lantai atas dikurangi simpangan relatif lantai di bawahnya. *Inter-story drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada tingkat yang lemah. Terjadinya distribusi kekakuan struktur secara vertikal yang tidak merata akan menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah tersebut.

*Inter-story drift* dapat dihitung dengan rumus :

$$\Delta y_n(t) = y_n(t) - y_{n-1}(t) \quad (3.63)$$

dimana :  $\Delta y_n(t)$  = simpangan antar tingkat,

$y_n(t)$  = simpangan relatif lantai ke- $n$ , dan

$y_{n-1}(t)$  = simpangan relatif lantai ke- $(n-1)$

### 3.10.3 Simpangan Absolut

Simpangan absolut merupakan penjumlahan antara simpangan relatif tiap lantai dengan simpangan akibat tanah. Simpangan absolut mempunyai pengaruh terhadap kemungkinan terjadinya benturan antar bangunan yang berdekatan (*structural pounding*). Masalah *structural pounding* ini biasa terjadi pada bangunan yang berdekatan untuk memaksimalkan penggunaan lahan, hal ini dapat menyebabkan kerusakan yang fatal pada bangunan bahkan dapat menyebabkan kerusakan total. Hal ini dapat dicegah dengan memperkitungkan jarak antara dua bangunan yang berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan absolut pada setiap lantai.