BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Teori tentang Alat-alat Berat

3.1.1 Pertimbangan dalam penggunaan alat-alat berat

Pertimbangan yang perlu dilakukan agar penggunaan alat berat dapat menjadi salah satu alternatif yang menguntungkan antara lain sebagai berikut (Peurifoy, 1988):

a. Pemilihan alat berat yang sesuai dengan jenis pekerjaan, volume pekerjaan dan keadaan medan.

b. Penentuan kombinasi peralatan yang ekonomis.

c. Perencanaan metode operasi peralatan dan sarana pendukungnya.

d. Pemilihan tenaga operator dan pengawas yang terampil dan berpengalaman.

e. Perawatan peralatan secara teratur.

f. Pengaturan dan pengelolaan lingkungan kerja.

Disamping pertimbangan di atas, faktor-faktor di bawah ini juga perlu diperhatikan karena mempengaruhi produktivitas alat berat (Peurifoy, 1988) (Rochmanhadi, 1987):

a. Tanah

Faktor-faktor tanah yang berpengaruh terhadap produktivitas alat berat antara lain sebagai berikut:

1. Berat material tanah, yang berpengaruh terhadap tenaga tarik maupun dorong alat.
2. Kekerasan tanah, yang mempengaruhi kemudahan pekerjaan (*workability*).
3. Kohesi tanah, yang berpengaruh terhadap pekerjaan pengisian.
4. Bentuk komponen tanah (∅ butir dan rongga), yang berpengaruh terhadap pekerjaan pengisian.

Faktor-faktor tanah seperti tersebut di atas dipengaruhi oleh keadaan asli atau tidaknya tanah tersebut, karena bila tanah dipindahkan dari tempat aslinya, selalu akan terjadi perubahan isi dan kepadatannya dari keadaan yang asli. Keadaan tanah yang mempengaruhi volume tanah tersebut adalah sebagai berikut:

1. Keadaan tanah sebelum ada pengusikan. Dalam keadaan ini volume tanah dinyatakan dalam *bank measure* (*BM*).
2. Keadaan tanah lepas, yaitu keadaan tanah setelah adanya pengusikan. Pada keadaan ini volume tanah menjadi lebih besar dari keadaan aslinya, dan dinyatakan dalam *loose measure* (*LM*).
3. Keadaan padat, yaitu keadaan tanah setelah dilakukan pemadatan. Setelah tanah ditimbunkan kembali, maka volume tanah dapat lebih besar atau lebih kecil dari keadaan aslinya, tergantung besarnya usaha pemadatan tersebut. Pada keadaan ini volume tanah dinyatakan dalam *solid measure* (*SM*).

Pada keadaan dimana volume tanah menjadi lebih besar dari keadaan aslinya, gejala ini disebut dengan *swell*, dan untuk keadaan sebaliknya dimana volume tanah menjadi lebih kecil disebut dengan *shrinkage*.

Besarnya *swell* maupun *shrinkage* dinyatakan sebagai prosentase dari BM dengan menggunakan rumus berikut:

- Swell faktor (faktor kembang), $f = \dfrac{B - L}{L} \times 100\%$ (3.1)

- Shrinkage faktor (faktor susut), $Sh = \dfrac{C - B}{C} \times 100\%$ (3.2)

dimana: B = volume/berat jenis tanah dalam keadaan asli

L = volume/berat jenis tanah pada keadaan lepas

C = volume/berat jenis tanah pada keadaan padat

b. Tahanan gelinding (*rolling resistance*)

Tahanan gelinding (RR) adalah tahanan yang dialami roda kendaraan ketika melalui suatu jalan atau permukaan. Tahanan ini sangat dipengaruhi oleh jenis dan kondisi permukaan yang dilewati alat berat.

Rumus empiris untuk menghitung tahanan gelinding adalah:

$RR = Crr \times$ berat total kendaraan (3.3)

dimana: Crr = koefisien tahanan gelinding.

c. Pengaruh kelandaian (*grade resistance*)

Kelandaian suatu jalan atau permukaan yang dilewati alat berat mempengaruhi kinerjanya. Pada jalan menanjak, alat berat memerlukan tambahan tenaga traksi. Besar tenaga tergantung dari landai tanjakan. Jika alat berat/kendaraan menuruni kemiringan, maka pengaruh kemiringan akan membantu mesin. Rumus empiris untuk mendapatkan tenaga traksi adalah:

Tenaga traksi tambahan = % kelandaian × total berat kendaraan (3.4)

d. Koefisien traksi

Koefisien traksi (CT) adalah suatu faktor yang dikalikan dengan berat total kendaraan untuk mendapatkan traksi kritis.

Traksi kritis = CT × berat total kendaraan (3.5)

Pada saat kendaraan berjalan, tenaga mesin akan diubah menjadi tenaga traksi maksimum bila tersedia geseran yang cukup antara permukaan roda dengan permukaan jalan. Apabila geseran ini tidak cukup, kelebihan tenaga mesin akan ditranfer ke roda, sehingga mengakibatkan roda kendaraan menjadi selip. Besarnya koefisien traksi ini tergantung tipe dan keadaan permukaan tanah dan jenis roda kendaraan.

e. Pengaruh ketinggian (*altitude*)

Makin tinggi elevasi suatu tempat kadar 0_2 makin berkurang, sehingga hasil pembakaran dan tenaga yang dihasilkan kendaraan semakin kecil/turun. Pengurangan tenaga mesin ini dapat dinyatakan:

- 1 % tiap kenaikan tempat 100 m, di atas 750 m, atau
- 3 % tiap kenaikan tempat 1000 feet, di atas 2500 feet.

f. Rimpull

Rimpull yaitu tenaga gerak yang disediakan oleh mesin kepada roda-roda suatu kendaraan, dan tergantung kecepatan gerak, daya kuda maksimum, dan efisiensi mesin.

Data mengenai besar nilai rimpull suatu alat berat, biasanya telah disediakan oleh pabrik pembuatnya berupa grafik dan tabel. Apabila data tersebut tidak disediakan oleh pabrik, nilai rimpull dapat didekati dengan persamaan berikut:

$$\text{Rimpull} = \frac{375 \times \text{HP} \times \text{dayaguna}}{\text{kecepatan (mph)}} \tag{3.6}$$

3.1.2 Kapasitas produksi

Suatu alat dinilai performanya dengan membandingkan kapasitas produksi alat per jam dengan biaya operasi dan pemilikan per jam alat tersebut (Caterpillar Tractor Co., 1976). Performa/biaya satuan produksi alat ini dalam Rp/m^3 atau Rp/ton.

$$\text{Biaya sat. prod. alat} = \frac{\text{biaya operasi dan pemilikan alat per jam}}{\text{produksi alat per jam}} \tag{3.7}$$

Kapasitas produksi alat berat pada umumnya dinyatakan dalam m^3/jam atau ton/jam. Produksi didasarkan pada pelaksanaan volume yang dikerjakan tiap siklus waktu dan jumlah siklus dalam satu jam. Hubungannya dinyatakan pada persamaan berikut (Peurifoy, 1988) (Rochmanhadi, 1987):

$$Q = q \times N = q \times \frac{60}{Cm} \tag{3.8}$$

dimana: Q = produksi per jam (m^3/jam, ton/jam)

q = produksi per siklus (m^3, ton)

N = jumlah siklus per jam, $N = \frac{60}{Cm}$

Cm = waktu siklus dalam menit

3.1.3 Loader

Loader merupakan alat pemuat dengan traktor sebagai penggerak utamanya, digunakan secara umum untuk memuati truk sampai ketinggian 8 sampai 15 feet, mengangkut (jarak dekat), dan menggali (tanah lunak).

Jika digunakan untuk menggali, tenaga gali diperoleh dengan cara memuat, kemudian mendorong sampai penuh. Tipe loader terdiri dari tipe *crawler-tractor-mounted* dan *wheel-tractor-mounted*. Loader diklasifikasikan berdasarkan kapasitas *bucket*-nya. Ukuran bucket bervariasi sampai 25 cuyd (± 3,5 m^3).

Pada loader terdapat kontrol. Fungsi kontrol hanya bersifat menaik-turunkan bucket (tidak mengandung tenaga gali). Pada umumnya dikendalikan secara hidrolis dan sedikit sekali (jarang) dengan kabel.

Cara pemuatan loader akan mempengaruhi waktu siklus yang nantinya akan mempengaruhi produksi loader, dan dibedakan menjadi 3, yaitu (Rochmanhadi, 1987):

a. pemuatan bentuk V
b. pemuatan melintang
c. muat angkut/buang.

Sedangkan waktu siklus loader setiap trip terdiri dari (Peurifoy, 1988) (Rochmanhadi, 1987):

a. Waktu untuk mengisi bucket, pindah gigi, berputar dan menumpahkan muatan, dan umumnya dianggap tetap.
b. Waktu untuk menempuh jarak dari tempat mengisi bucket menuju tempat membuang muatan.

c. Waktu untuk perjalanan kembali menuju posisi pengisian bucket.

Produksi loader dapat dihitung dengan persamaan 3.8 di atas, yaitu:

$$Q = q \times \frac{60}{Cms}$$

Produksi per siklus loader (kapasitas *bowl*/sudu) dapat dihitung dengan persamaan (Rochmanhadi, 1987):

$$q = q' \times k \tag{3.9}$$

dimana: q' = kapasitas munjung yang tercantum dalam spesifikasi alat

k = faktor bucket yang besarnya tergantung tipe dan keadaan tanah

Kapasitas bucket dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut (Rochmanhadi, 1987):

- Kapasitas peres: $$Vs = \mathrm{A} \cdot \mathrm{W} - \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot b \tag{3.10}$$
- Kapasitas munjung: $$Vr = Vs + \frac{b^2 \cdot w}{8} \times \frac{b^2}{6} \cdot (a + c) \tag{3.11}$$

dimana: A = penampang melintang di tengah-tengah bucket (mm^2)

W = lebar rata-rata bucket (mm, inch)

a = tinggi penahan tumpahan di tengah-tengah bucket, tegak lurus garis operasi (mm, inch)

b = panjang bukaan pada tengah-tengah bucket (mm, inch)

c = panjang garis normal ke garis operasi (mm, inch)

Waktu siklus loader (*Cms*) untuk berbagai cara pemuatan dapat dihitung dengan persamaan di bawah ini (Rochmanhadi, 1987):

- Pemuatan melintang, $Cms = \frac{D}{F} + \frac{D}{R} + Z$ (3.12)

- Pemuatan bentuk V, $Cms = 2\frac{D}{F} + 2\frac{D}{R} + Z$ (3.13)

- Muat angkut, $Cms = 2\frac{D}{F} + Z$ (3.14)

dimana: D = jarak angkut (m, yd)

F = kecepatan maju (m/menit, yd/menit), untuk alat-alat bermesin *torqflow*, kecepatan majunya diperhitungkan 80%-nya.

R = kecepatan mundur (m/menit, yd/menit)

Z = waktu tetap (menit), yaitu waktu loader untuk ganti persneling, memuat, putar, buang dan menunggu.

3.1.4 Truk

Truk (*dump truck*) merupakan peralatan/kendaraan yang dibuat khusus untuk alat angkut, karena kelebihannya dalam kecepatan, kapasitas dan fleksibilitasnya. Sebagai alat angkut, truk luwes dan mudah dikoordinasikan dengan alat-alat lain (alat-alat gali maupun pemuat). Berdasarkan cara menumpahkan muatannya, truk diklasifikasikan menjadi *rear-dump truck* dan *bottom-dump truck*.

Kemampuan memuat truk dinyatakan dalam berat muatan (ton), maupun dalam kapasitas bak (m^3). Pemilihan jenis truk harus mempertimbangkan dengan kemampuan produksi alat gali maupun pemuatnya, agar tidak terdapat alat yang menganggur, dan mempertimbangkan keuntungan maupun kerugiannya.

Kapasitas produksi sebuah truk tergantung dari jumlah trip yang dapat dilakukan setiap jam dan jumlah muatan yang diangkut setiap trip. Produksi truk dapat dihitung dengan persamaan 3.8 di atas, yaitu:

$$Q = q \times \frac{60}{Cm}$$

dimana: q = kapasitas/volume bak (m^3, ton)

Cm = waktu siklus dalam menit

Waktu siklus (Cm) truk dapat diperoleh dengan persamaan berikut (Rochmanhadi, 1987):

$$Cm = T_{\text{muat}} + T_{\text{angkut}} + T_{\text{buang}} + T_{\text{kembali}} + T_{\text{tunggu,putar}}$$

$$Cm = n \, . \, Cms + \frac{D}{V1} + t_1 + \frac{D}{V2} + t_2 \qquad (3.15)$$

$$n = \frac{C_1}{q' \times k} \qquad (3.16)$$

dimana: n = jumlah siklus yang diperlukan pemuat untuk memuati truk

C_1 = kapasitas rata-rata truk (m^3, ton)

q' = kapasitas bucket pemuat, loader/excavator (m^3)

k = faktor bucket pemuat

Cms = waktu siklus pemuat, loader, excavator (menit)

D = jarak angkut truk (m, yd)

V_1 = kecepatan rata-rata truk bermuatan (m/menit, yd/menit)

V_2 = kecepatan rata-rata truk kosong (m/menit, yd/menit)

t_1 = waktu buang, menunggu sampai pembuangan mulai (menit)

t_2 = waktu untuk posisi pengisian dan pemuat mulai mengisi (menit)

Waktu siklus pemuat (*Cms*), tergantung jenis dan tipe alat pemuatnya, apakah loader atau excavator. Sedangkan jumlah siklus untuk mengisi truk (*n*) dipengaruhi oleh kemampuan alat pemuat untuk memuati truk, dan dapat didefinisikan sebagai berikut (Rochmanhadi, 1987):

a. Volume muatan (m^3)

$$n = \frac{\text{kapasitas truk}}{\text{kapasitas pemuat} \times \text{faktor bucket}} \tag{3.17}$$

b. Berat muatan (ton)

$$n = \frac{\text{kapasitas truk} \times \text{BJ tanah}}{\text{kapasitas pemuat} \times \text{faktor bucket} \times \text{BJ tanah}} \tag{3.18}$$

Waktu angkut dan kembali truk dihitung dengan membagi haul roda ke bagian-bagian yang disesuaikan dengan tahanan gelinding, kemiringan, dan lain-lain. Kemudian dihitung dengan urutan sebagai berikut (Rochmanhadi, 1987):

a. Dihitung tahanan total yang merupakan penjumlahan tahanan gelinding dan tahanan kemiringan masing-masing bagian jalan.
b. Tahanan kemiringan dapat dihitung dengan mengkonversikan sesuai dengan sudut kemiringannya (derajat, °) menjadi %.
c. Cara memilih kecepatan travel adalah dengan menggunakan grafik *Performance Curve* dari pabrik yang bersangkutan, dengan menggunakan data tahanan total, berat kendaraan dan tenaga tariknya
d. Hasil kecepatan di atas masih bersifat teoritis, sehingga perlu dikalikan dengan faktor kecepatannya, sehingga diperoleh kecepatan rata-ratanya.

$$\text{Waktu angkut dan kembali} = \frac{\text{panjang bagian jalan kerja}}{\text{kecepatan rata - rata}} \tag{3.19}$$

Kecepatan rata-rata tersebut berlaku untuk kondisi jalan yang normal. Jika terdapat faktor-faktor lain yang bisa berpengaruh pada kecepatan, maka faktor kecepatan harus dipertimbangkan benar-benar. Faktor-faktor tersebut misalnya (Rochmanhadi, 1987):

a. kendaraan-kendaraan bersimpangan pada jalan yang sempit
b. belokan tajam-tajam atau banyak belokan pada jalan tersebut
c. pandangan ke depan kurang baik
d. banyak jembatan sempit, persilangan kereta api, persimpangan jalan
e. perbedaan besar dalam tahanan gelinding.

Perhitungan waktu angkut dan kembali di atas dikerjakan untuk tahanan total positif. Jika tahanan total negatif (misal, karena jalan menurun, dan lain-lain), kecepatan kendaraan dibatasi fungsi alat, kecepatan maksimum truk (agar tetap aman).

Waktu bongkar muat/buang (t_1), yaitu periode truk memasuki daerah pembuangan sampai mulai berjalan kembali setelah membuang muatan dan dipengaruhi oleh kondisi pekerjaan (Rochmanhadi, 1987).

Waktu tunggu dan tunda (t_2), yaitu waktu untuk mengambil posisi dimuati, menunggu, ganti persneling, dan lain-lain. Besarnya juga dipengaruhi kondisi kerja (Rochmanhadi, 1987).

3.2 Teori tentang Model Simulasi

3.2.1 Model

a. Pengertian model

Model merupakan gambaran dari sistem yang sebenarnya (Pilcher, 1976) dan model dapat dipergunakan untuk mempelajari karakteristik dari sistem yang sebenarnya. Sedangkan sistem adalah kumpulan dari komponen yang dihubungkan dengan berbagai interaksi dan secara bersama-sama mempunyai fungsi tertentu (Meredith, 1992).

Model dimaksudkan untuk dapat menggambarkan suatu sistem yang sebenarnya dalam bentuk yang mudah untuk dipelajari tapi tetap mewakili sifat-sifat yang dimiliki oleh sistem aslinya.

Model dapat dibagi menjadi 3 tipe berdasarkan bentuk penyajiannya, yaitu (Pilcher, 1976):

1. Model Ikonik, yaitu model yang mempunyai bentuk fisik sesuai dengan keadaan sebenarnya dan dapat dalam ukuran yang sama, lebih besar, atau lebih kecil.

   Misalnya: model fisik pesawat, maket gedung.
2. Model Analog, yaitu model dengan menggunakan alat atau pembanding yang berbeda fisik tapi memiliki prinsip kerja yang sama.

   Misalnya: menggambarkan arus informasi dengan menggunakan arus listrik.
3. Model Matematika atau Simbolik, yaitu model yang menggunakan simbol, huruf dan angka untuk menggambarkan komponen-komponen pada sistem sebenarnya. Hubungan antara komponen-komponen dinyatakan dengan persamaan atau ketidaksamaan.

Misalnya: rumus matematika untuk menghitung tegangan beton.

Model berdasarkan kegunaannya atau sifatnya dapat dikatagorikan sebagai berikut (Meredith, 1992):

1. Model Deskriptif, yaitu model yang digunakan untuk menunjukkan spesifikasi detail mengenai apa saja yang terlibat dan yang ingin dicapai, secara ringkas dan sistematis.
2. Model Perilaku, yaitu model yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik dari sistem. Model dapat digunakan untuk merancang komponen sistem agar menghasilkan respon tertentu atau untuk menentukan respon sistem terhadap komponen dan bentuk sistem yang telah ditentukan terlebih dahulu.
3. Model Pengambilan Keputusan, yaitu model yang digunakan untuk memilih alternatif yang paling menguntungkan di antara sejumlah alternatif yang layak.

b. Model matematika

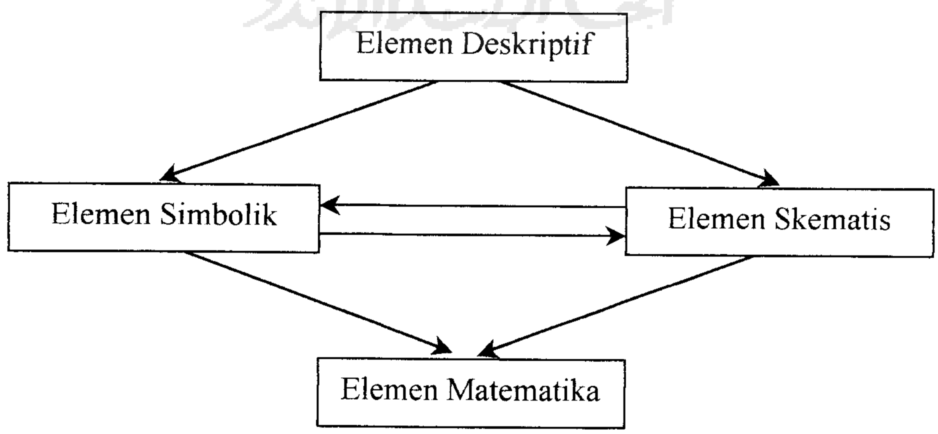
Model matematika merupakan model yang sering digunakan dalam menggambarkan suatu sistem. Model matematika ini dapat digolongkan sebagai berikut (Smith, 1983):

1. Model Deterministik, yaitu model matematika yang komponen-komponennya tidak mempunyai sifat ketidakpastian.
2. Model Probabilistik, yaitu model matematika dengan 1 (satu) atau lebih komponennya yang memiliki ketidakpastian. Model ini digolongkan lagi dalam:
   a) model statis, bila hanya komponen maupun bentuk model tersebut tidak bergantung terhadap waktu
   b) model dinamis, bila harga komponen atau bentuk model berubah menurut waktu.

Penggambaran suatu sistem secara matematis memerlukan elemen deskriptif dan elemen skematis dari sistem tersebut sebagai alat bantu dalam mengartikan simbol dan variabel yang digunakan dalam model matematika.

Proses pembuatan model matematika dapat dibagi menjadi beberapa elemen seperti terlihat pada gambar 3.1, yang mana (Meredith, 1992):

1. Elemen Deskriptif, yang memberikan definisi terhadap permasalahan yang akan dipecahkan dan cara pemecahannya.
2. Elemen Skematis, digunakan untuk memberikan pengertian terhadap simbol dan hubungan antara komponen sistem.
3. Elemen Simbolik, yang memberikan daftar dan gambaran semua simbol, variabel dan pembatas yang digunakan dalam model.
4. Elemen Matematika, yang merupakan hasil proses dari ketiga elemen terdahulu dan merupakan gambaran antara hubungan permasalahan, proses pemecahan dan solusi terhadap permasalahan.



Gambar 3.1 Skema proses pembuatan model matematika

3.2.2 Simulasi

a. Pengertian simulasi

Simulasi adalah proses penyelidikan dalam usaha mempelajari karakteristik suatu sistem dengan menggunakan model dari sistem tersebut (Meredith, 1992). Model yang digunakan dalam simulasi dapat berupa model ikonik, model analog, atau model matematika selama dapat menggambarkan karakteristik sistem yang dipelajari.

Pada penulisan Tugas Akhir ini pengertian simulasi yang dimaksud adalah simulasi Monte Carlo terhadap model matematika dan dengan menggunakan bantuan komputer.

Naylor (1986) mendefinisikan simulasi komputer sebagai teknik numerik untuk melakukan percobaan dengan komputer digital yang melibatkan hubungan matematika dengan logika tertentu yang diperlukan untuk menggambarkan suatu sistem dalam suatu periode waktu tertentu.

Simulasi dapat digunakan untuk melakukan analisa suatu sistem yang ada maupun untuk menyusun suatu sistem baru. Bila model simulasi dari sistem yang dipelajari telah terbentuk, model tersebut dapat digunakan untuk menganalisa maupun menyusun sistem yang baru (Lav, 1991).

Dalam menganalisa suatu sistem, model yang menggambarkan sistem tersebut telah ditentukan terlebih dahulu dan nilai komponen sistem maupun nilai hubungan antara komponen sistem dianggap tetap. Tujuan analisa dengan metode simulasi adalah menentukan tanggapan/keluaran sistem terhadap berbagai variasi harga masukan.

Sedangkan penyusunan sistem baru, tujuannya menentukan hubungan antara komponen-komponen sistem dan menentukan harga komponen sistem tersebut agar sistem tersebut memberikan keluaran yang diinginkan terhadap suatu harga masukan tertentu.

Umumnya penggunaan metode simulasi digunakan dalam menganalisa suatu sistem bila metode yang lain tidak dapat memberikan hasil yang memuaskan.

b. Proses simulasi

Proses simulasi dengan menggunakan komputer dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut ini (Meredith, 1992) (Naylor, 1986) (Ravindran, 1987):

1. Definisi permasalahan, dilakukan untuk menentukan:
   a) komponen sistem,
   b) hubungan antar-komponen sistem,
   c) parameter yang mewakili komponen atau hubungan antara komponen,
   d) parameter yang menjadi masukan.
2. Membuat model sistem untuk menggambarkan sistem yang sebenarnya. Model yang akan digunakan dilakukan uji validasi untuk memastikan bahwa model tersebut sesuai dengan sistem aslinya. Model tersebut kemudian digunakan untuk membuat program komputer yang akan digunakan untuk melakukan simulasi.
3. Merencanakan proses penyelidikan yang akan dilakukan terhadap model. Proses penyelidikan ini, yaitu proses penyelidikan terhadap perilaku sistem

dan/atau optimisasi terhadap parameter sistem.

4. Melakukan simulasi yang merupakan proses iterasi.
5. Analisa hasil simulasi. Hasil simulasi merupakan tanggapan sistem yang menggambarkan perilaku sistem tersebut. Analisa hasil simulasi dapat dilakukan dengan analisa statistik.

3.2.3 Simulasi Monte Carlo

Pada tahun-tahun belakangan ini, teknik simulasi telah diaplikasikan ke banyak persoalan dalam berbagai disiplin ilmu, dan jika proses yang disimulasikan melibatkan suatu unsur untung-untungan (*chance*), maka teknik ini dinyatakan (*reffered*) dengan metode Monte Carlo. Sering kali penggunaan simulasi Monte Carlo mengeliminasi biaya pembuatan dan pengoperasian peralatan mahal. Penggunaannya, sebagai contoh pada penelitian tentang tubrukan elektron dengan *photon*, pemencaran (*scattering*) neutron, dan fenomena rumit yang serupa. Metode Monte Carlo juga berguna pada situasi di mana percobaan secara langsung tidak mungkin dilakukan. Tambahan pula, teknik Monte Carlo selalu diaplikasikan untuk memecahkan persoalan-persoalan matematika yang benar-benar tidak dapat dipecahkan dengan cara langsung, atau suatu pemecahan langsung terlalu mahal atau membutuhkan waktu yang lama (Miller, 1985).

a. Pengertian simulasi Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo adalah simulasi terhadap model matematika yang menggunakan variabel acak dengan distribusi probabilitas tertentu (Pilcher, 1976) (Lav, 1991). Salah satu fungsi pada simulasi ini adalah membangkitkan bilangan acak dan variabel acak yang digunakan untuk menggambarkan suatu kejadian atau proses secara numerik.

Simulasi Monte Carlo dapat dilakukan secara manual maupun dengan bantuan komputer. Bila simulasi Monte Carlo dilakukan dengan menggunakan komputer, maka yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut (Lav, 1991):

1. Membangkitkan bilangan acak
2. Membangkitkan variabel acak
3. Mengendalikan aliran waktu

b. Bilangan acak

Bilangan acak adalah bilangan yang didapat secara sembarang dari suatu proses percobaan dan berdistribusi probabilitas seragam. Bilangan acak yang berdistribusi probabilitas seragam dalam interval (0,1) disebut bilangan *pseudorandom* dan dapat digunakan untuk membangkitkan variabel acak (Ang, 1987) (Ravindran, 1987).

Distribusi probabilitas seragam adalah distribusi yang kontinu, dan berarti setiap harga dalam interval tersebut memiliki kemungkinan yang sama untuk terpilih. Distribusi seragam untuk harga x terletak dalam interval (0,1), dinyatakan sebagai (Ravindran, 1987):

$$f(x_o) = 1, \quad \text{untuk} \quad 0 \le x_o \le 1 \tag{3.20}$$

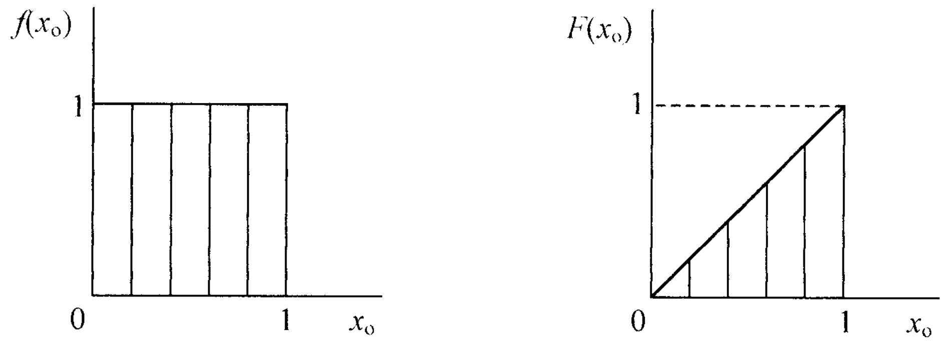
$$F(x_o) = x_o, \quad \text{untuk} \quad 0 \le x_o \le 1 \tag{3.21}$$

dimana: $f(x_o)$ = kemungkinan harga $x = x_o$

= fungsi kepekatan probabilitas

$F(x_o)$ = kemungkinan harga $x \le x_o$

= fungsi distribusi kumulatif



a. fungsi kepekatan probabilitas b. fungsi distribusi kumulatif

Gambar 3.2 Grafik distribusi seragam

Metode yang sering digunakan dalam menghasilkan bilangan acak dengan komputer adalah metode *Congruential*. Metode *Congruential* merupakan metode untuk menghasilkan bilangan acak secara berurutan dengan menggunakan harga sebelumnya untuk mendapatkan bilangan acak yang baru. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut (Ravindran, 1987):

$$r_{i+1} = [Ar_i + C] \text{ Modulo } M \tag{3.22}$$

yang berarti bahwa bila jumlah $[Ar_i + C]$ dibagi M sampai bilangan bulat terbesar, maka r_{i+1} adalah sisanya. Variabel r_i adalah harga awal atau bilangan acak sebelumnya dan r_{i+1} adalah harga bilangan acak yang baru.

Metode *Congruential* antara lain terdiri dari (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

1. Metode *Mixed Congruential*, bila $C \neq 0$ dan digambarkan seperti persamaan 3.22 di atas:

   $$r_{i+1} = [Ar_i + C] \text{ Modulo } M$$

   dimana: C = bilangan ganjil

   A = 1 (Modulo p) bila p faktor prima M

2. Metode *Multiplicative Congruential*, bila $C = 0$ dan persamaan 3.22 menjadi:

$$r_{i+1} = [Ar_i] \text{ Modulo } M \tag{3.23}$$

dimana: $A = 8t + 3$

t = bilangan bulat

$M = 2^b$, dan $b>2$

3. Metode *Quadratic Congruential*, dengan persamaan:

$$r_{i+1} = [Dr_i^2 + Cr_i + A) \text{ Modulo } M \tag{3.24}$$

dimana: C = bilangan ganjil

D = bilangan ganjil

c. Variabel acak

Variabel acak, yaitu bilangan acak yang mempunyai bentuk distribusi probabilitas sembarang (Ang, 1987) (Dajan, 1984) (Ravindran, 1987). Variabel acak dapat merupakan variabel yang diskrit atau kontinu.

1. Variabel acak diskrit, bila variabel tersebut terbatas jumlahnya dan dapat dinyatakan dengan suatu bilangan bulat. Fungsinya $f(x)$ didefinisikan sebagai fungsi distribusi probabilitas (Ang, 1987) (Dajan, 1984) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = p(X = x); \qquad f(x) \geq 0, \qquad \sum f(x) = 1 \tag{3.25}$$

Dan fungsinya dapat juga dinyatakan sebagai fungsi distribusi kumulatif $F(x)$, seperti persamaan 3.26 berikut (Ang, 1987) (Dajan, 1984) (Ravindran, 1987):

$$F(x) = p(X \le x); \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{3.26}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$$

2. Variabel acak kontinu, bila harga variabel tersebut dapat dinyatakan dengan sembarang harga yang terletak di antara suatu batas atau beberapa interval. Jika X merupakan variabel acak yang kontinu dan yang dapat merupakan sebarang nilai antara $-\infty$ sampai dengan $+\infty$, maka fungsi kepekatannya yang menggambarkan probabilita X yang terdapat dalam interval a sampai b di mana $a \le b$ ialah (Ang, 1987) (Dajan, 1984) (Miller, 1985) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = p(a \le X \le \mathrm{b}) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.27}$$

Fungsi distribusi kumulatifnya $F(x)$ dapat dinyatakan dengan persamaan berikut (Ang, 1987) (Dajan, 1984) (Miller, 1985) (Ravindran, 1987):

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{3.28}$$

dengan ketentuan:

a) F merupakan fungsi yang tidak menurun

b) $F(-\infty) = 0$

c) $F(+\infty) = 0$

d) F kontinu

Variabel acak digunakan pada model yang memiliki sifat probabilitas. Pada simulasi Monte Carlo dengan komputer, variabel acak dari suatu bentuk distribusi tertentu didapat melalui proses pembangkitan (*generate*) seperti berikut (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

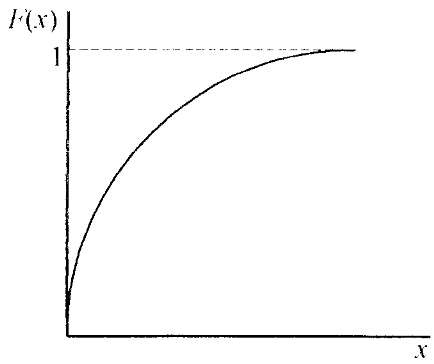
1. DibaPngkitkan suatu bilangan acak dari suatu distribusi probabilitas seragam yang berinterval (0,1) (bilangan *pseudorandom*).
2. Dilakukan transformasi matematika terhadap bilangan *pseudorandom* tersebut, untuk mendapatkan variabel acak sesuai dengan distribusi probabilitas yang diinginkan.

Metode transformasi matematika yang dapat digunakan untuk membangkitkan variabel acak berdasarkan suatu bentuk distribusi yang tidak seragam, antara lain (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

1. Metode transformasi invers (*the inverse transformation method*)

   Metode ini digunakan terhadap fungsi distribusi kumulatif, $F(x)$. Karena $F(x)$ memiliki harga antara 0 sampai 1, seperti terlihat pada gambar 3.4 dan bilangan *pseudorandom* juga memiliki harga dalam interval (0,1), maka dapat dibangkitkan suatu bilangan *pseudorandom* R dan menyamakan $F(x) = R$.

   Persamaan di atas berarti probabilitas suatu *pseudorandom* memiliki harga kurang atau sama dengan x, adalah sebesar R.



Gambar 3.3 Grafik fungsi distribusi kumulatif dari x

Sehingga x dapat ditentukan dengan menentukan fungsi invers dari R,

$$x = F^{-1}(R) \tag{3.29}$$

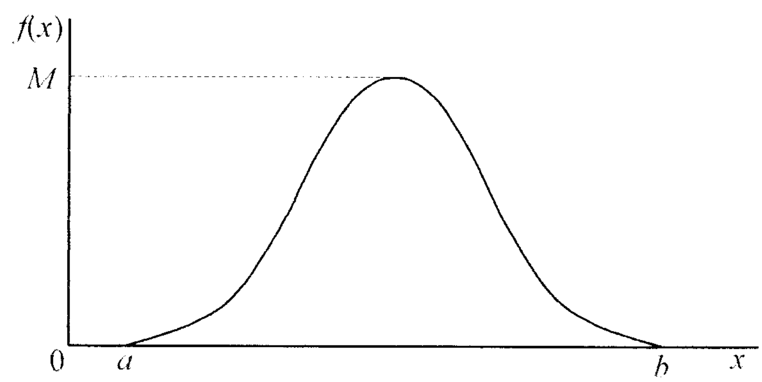
Metode ini digunakan bila tidak sulit untuk menentukan fungsi invers dari fungsi distribusinya.

2. Metode penolakan (*the rejection technique*)

Metode ini digunakan bila fungsi kepekatan frekuensi $f(x)$ dibatasi sebagai berikut:

$$f(x) = 0 \qquad \text{untuk} \qquad a > x > b \tag{3.30}$$

$$0 \leq f(x) \leq M \qquad \text{untuk} \qquad a \leq x \leq b \tag{3.31}$$



Gambar 3.4 Fungsi kepekatan dari x

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menggunakan metode penolakan adalah sebagai berikut:

a) Dibangkitkan 2 buah bilangan acak yang berdistribusi seragam, R_1 dan R_2.

b) Definisikan x sebagai fungsi linier dari R_1, dinyatakan dengan $x = a + (b - a)R_1$.

c) Bila ketidaksamaan $R_2 \leq f(a + (b - a)R_1)/M$ terpenuhi, maka bilangan acak yang dicari adalah $x = a + (b - a)R_1$.

d) Bila ketidaksamaan tidak terpenuhi, diulangi langkah a sampai c di atas.

3. Mekanisme aliran waktu

Pada simulasi komputer terhadap model yang dinamis, variabel-variabel ada yang bergantung terhadap waktu. Pergerakan waktu dalam simulasi ini dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu:

a) Penambahan waktu tetap, yaitu waktu dalam simulasi bergerak dengan penambahan selang waktu yang tetap selama simulasi berlangsung.

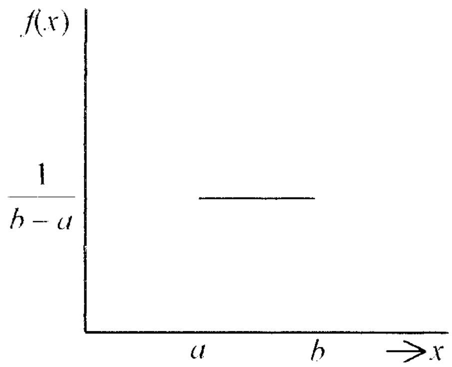
b) Penambahan waktu yang tidak tetap; pada cara ini waktu dalam simulasi bergerak sampai ada suatu kejadian, dan waktu antar kejadian tidak selalu sama.

3.2.4 Distribusi probabilitas kontinu

a. Distribusi seragam kontinu (*the continuous uniform distribution*)

Fungsi kepekatan dari distribusi seragam didefinisikan sebagai berikut (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = \frac{1}{b - a}; \qquad a \leq x \leq b \tag{3.32}$$



Gambar 3.5 Grafik dari distribusi seragam (Miller, 1985)

Sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah (Ang, 1987):

$$F(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{x-a}{b-a} \tag{3.33}$$

Nilai harapan dan sebarannya didapat sebagai berikut (Ravindran, 1987):

$$E(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x\, dx = \frac{b+a}{2} \tag{3.34}$$

$$V(x) = \int_a^b \frac{[x - E(x)]^2}{b-a} = \frac{[b-a]^2}{12} \tag{3.35}$$

Untuk membangkitkan variabel acak yang berdistribusi seragam antara wilayah (a,b), dilakukan transformasi invers terhadap persamaan (3.33):

$F(x) = R$, R = bilangan *pseudorandom* berdistribusi seragam dalam wilayah (0,1)

$$\frac{x-a}{b-a} = R, \quad \text{maka} \quad x = a + (b-a)R \tag{3.36}$$

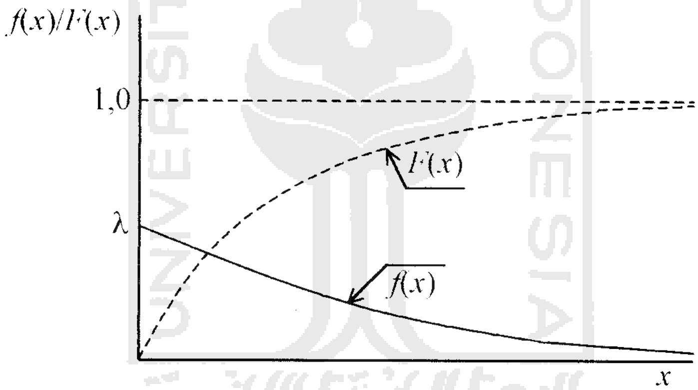
Persamaan (3.36) yang digunakan dalam membangkitkan variabel acak yang berdistribusi seragam dalam simulasi.

b. Distribusi eksponensial (*the negative exponential distribution*)

Distribusi eksponensial mempunyai fungsi kepekatan dan fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad \text{untuk} \quad x \geq 0 \tag{3.37}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}; \quad \text{untuk} \quad x \geq 0 \tag{3.38}$$



Gambar 3.6 Grafik dari distribusi eksponensial (Ang, 1987)

Nilai harapan dan sebaran x diekspresikan dengan (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

$$E(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda} \tag{3.39}$$

$$V(x) = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\alpha^2} = [E(x)]^2 \tag{3.40}$$

Untuk membangkitkan variabel acak dengan distribusi eksponensial digunakan metode invers, yaitu menyamakan fungsi distribusi kumulatif, $F(x)$ dengan suatu bilangan *pseudorandom* R (Ang, 1987) (Ravindran, 1987).

$$R = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{3.41}$$

maka: $x = F^{-1}(R)$ (3.42)

Untuk mencari harga inversnya, dari persamaan (3.41) didapat:

$$1 - R = e^{-\lambda x} \tag{3.43}$$

Karena $1 - R$ juga terdistribusi seragam, maka didapat:

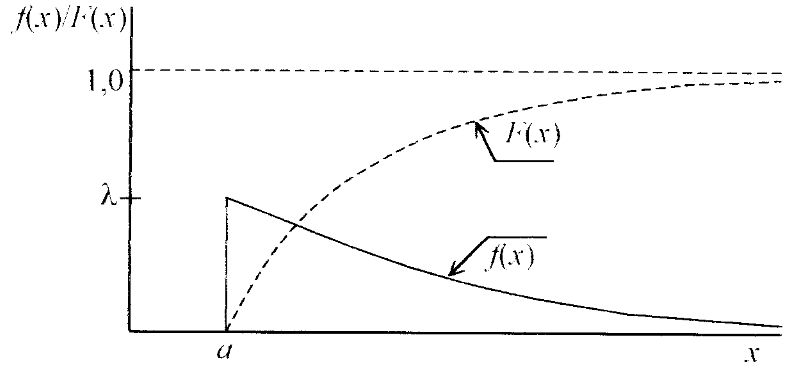
$$R = e^{-\lambda x} \tag{3.44}$$

$$X = -\frac{\text{Ln } R}{\lambda} = -E(x) \text{ Ln } R \tag{3.45}$$

Bila suatu distribusi eksponensial mempunyai suatu harga minimum lebih besar dari 0, didefinisikan sebagai berikut (Ang, 1987):

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda - e^{-\lambda (x-a)}; && x \geq a \\ &= 0; && x < a \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\lambda (x-a)}; && x \geq a \\ &= 0; && x < a \end{aligned} \tag{3.47}$$



Gambar 3.7 Grafik distribusi eksponensial untuk $x \geq a$ (Ang, 1987)

Dengan transformasi invers didapat persamaan untuk membangkitkan variabel acak sebagai berikut:

$$x = a - \frac{\text{Ln } R}{\lambda} = a - E(x)\,\text{Ln } R \qquad (3.48)$$

Persamaan (3.48) yang digunakan dalam membangkitkan variabel acak berdistribusi eksponensial dalam simulasi.

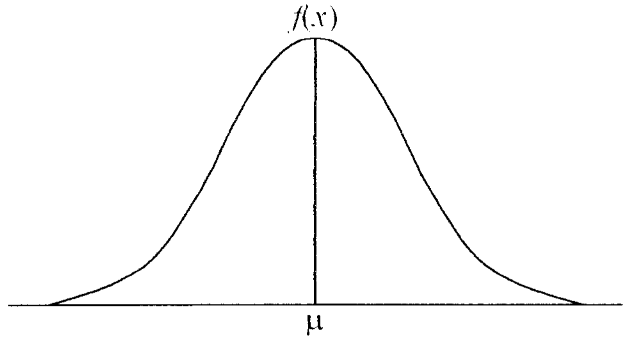
c. Distribusi normal (*the normal distribution*)

Distribusi normal mempunyai 2 buah parameter, yaitu: μ = nilai harapan, dan σ = deviasi. Fungsi kepekatannya didefinisikan sebagai berikut (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[(x-\mu)^2 \;\; 2\sigma^2\right]}; \qquad -\infty \leq x \leq \infty \qquad (3.49)$$

dan $\sigma = 1$, maka fungsi kepekatannya menjadi (Ang, 1987) (Ravindran, 1987):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x^2 \;\; 2)}; \qquad -\infty \leq x \leq \infty \qquad (3.50)$$



Gambar 3.8 Grafik dari distribusi normal (Ang, 1987)

Setiap variabel acak x yang terdistribusi normal dapat diubah menjadi variabel acak z yang terdistribusi normal standar dengan melakukan transformasi linier (Ravindran, 1987):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{3.51}$$

Untuk membangkitkan variabel acak x yang terdistribusi normal, dilakukan dengan membangkitkan variabel acak normal standar z dan kemudian dilakukan transformasi:

$$x = \sigma z + \mu$$

Salah satu cara untuk membangkitkan variabel acak normal adalah dengan pendekatan Teorema Limit Tengah (*Central Limit Theorem*), yang menyatakan bahwa jumlah N buah variabel x_i yang memiliki distribusi probabilitas sama dengan nilai harapan μ_i dan sebaran σ_i^2 mempunyai distribusi probabilitas mendekati distribusi normal dengan parameter μ dan σ untuk N yang besar (Ang, 1987) (Ravindran, 1987).

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \tag{3.52}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{\,2} \tag{3.53}$$

Sehingga jika r_1, r_2, ..., r_n adalah bilangan acak yang memiliki fungsi distribusi sama, dan $E(r_i) = \theta$ dan $V(r_i) = \sigma^2$, didapat distribusi normal standar sebagai berikut (Ang, 1987) (Miller, 1985) (Ravindran, 1987):

$$\lim_{N \to \infty} P\left[a < \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i - N.\theta}{\sigma\sqrt{N}} < b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-[\frac{1}{2} z^2]}\, dz \tag{3.54}$$

di mana dari persamaan (3.52), (3.53), dan (3.54) didapat:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right) = N.\theta \tag{3.55}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right) = N.\sigma^2 \tag{3.56}$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i - N.\theta}{\sigma.\sqrt{N}} \tag{3.57}$$

Proses pembangkitan variabel normal dilakukan dengan menjumlahkan k buah bilangan acak yang terdistribusi seragam r_1, r_2, ..., r_k; di mana r_i berada di dalam wilayah 0 dan 1 (Ang, 1987). Dari persamaan (3.34), (3.35), dan (3.56) diperoleh:

$$\theta = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \tag{3.58}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{1-0}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \tag{3.59}$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i - k/2}{\sqrt{k/12}} \tag{3.60}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.60) dengan (3.52) didapat:

$$x = \sigma.\left(\frac{12}{k}\right)^{1/2}.\left(\sum_{i=1}^{k} r_i - k/2\right) + \mu \tag{3.61}$$

Persamaan (3.61) yang digunakan dalam membangkitkan variabel normal dalam simulasi, dengan harga k antara 12 sampai 24.