

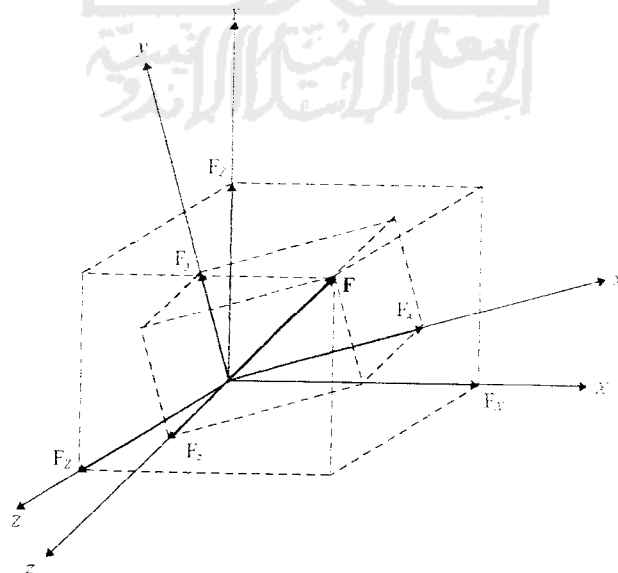
BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Transformasi dan Perakitan Elemen

Untuk elemen dengan sumbu lokal tidak paralel dengan sumbu global, transformasi sumbu harus diterapkan untuk beban titik buhul, anjakan, percepatan, matriks kekakuan, dan matriks massa konsisten. Setelah perakitan, hasil persamaan gerakan akan sesuai dengan arah global pada setiap titik buhul.

Konsep perputaran sumbu juga berlaku pada gaya, momen, translasi, rotasi, kecepatan, koordinat ortogonal, dan lain-lain yang ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Perputaran sumbu tiga dimensi.

Dari gambar terlihat vektor gaya \mathbf{F}_X , \mathbf{F}_Y , \mathbf{F}_Z pada arah X , Y , dan Z . Komponen F_x , F_y , F_z pada arah sumbu lokal x , y , dan z . Nilai skalar dari komponen pada arah sumbu global dapat dihitung dari nilai skalar dari komponen pada arah sumbu lokal, sebagai berikut.

$$F_x = (\mathbf{F}_X + \mathbf{F}_Y + \mathbf{F}_Z) \cdot \mathbf{i} = \lambda_{11}F_X + \lambda_{12}F_Y + \lambda_{13}F_Z$$

$$F_y = (\mathbf{F}_X + \mathbf{F}_Y + \mathbf{F}_Z) \cdot \mathbf{j} = \lambda_{21}F_X + \lambda_{22}F_Y + \lambda_{23}F_Z$$

$$F_z = (\mathbf{F}_X + \mathbf{F}_Y + \mathbf{F}_Z) \cdot \mathbf{k} = \lambda_{31}F_X + \lambda_{32}F_Y + \lambda_{33}F_Z$$

Dalam bentuk matriks, ketiga persamaan di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

atau

$$\mathbf{F}' = \mathbf{R}\mathbf{F} \quad (3.2)$$

Matriks \mathbf{R} berorde 3×3 di atas disebut matriks transformasi, terdiri dari cosinus arah dari sumbu lokal terhadap sumbu global yang dinyatakan dengan notasi λ_{jk} .

Matriks ini bersifat orthogonal, sehingga transformasi balik menghasilkan

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}' = \mathbf{R}^T\mathbf{F}' \quad (3.3)$$

Transformasi serentak terhadap vektor gaya \mathbf{F} dan momen \mathbf{M} dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.4) di atas terlihat \mathbf{R} adalah matriks transformasi perputaran sumbu terdiri dari dua matriks putaran identik pada posisi diagonal. Transformasi balik menghasilkan

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{M}' \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Sebagaimana dinyatakan di atas, vektor anjakan dan vektor lainnya dapat juga ditransformasikan ke dan dari arah lokal dan arah global. Dengan demikian, persamaan gerakan untuk elemen hingga dari sumbu lokal ke sumbu global harus diubah. Untuk ini, persamaan gerakan dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_b(t) \quad (3.6)$$

dengan:

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{M}' \hat{\mathbf{R}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{K}' \hat{\mathbf{R}} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{p}'(t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{p}_b(t) = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{p}'_b(t) \quad (3.10)$$

Matriks \mathbf{R} mengandung submatriks untuk seluruh titik buhul elemen.

Setelah matriks kekakuan, massa, dan beban titik buhul untuk tiap elemen ditransformasikan ke arah global, kemudian dirakit dengan Metode Kekakuan

Langsung (Weaver, 1980). Metode ini memerlukan penjumlahan sumbangan elemen untuk mendapatkan matriks kekakuan, massa, dan beban titik buhul seluruh struktur, atau dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_s &= \sum_{i=1}^{ne} \mathbf{M}_i \\
 \mathbf{S}_s &= \sum_{i=1}^{ne} \mathbf{K}_i \\
 \mathbf{A}_s(t) &= \sum_{i=1}^{ne} \mathbf{p}_i'(t) \\
 \mathbf{A}_{sb}(t) &= \sum_{i=1}^{ne} \mathbf{p}_{bi}(t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dengan ne adalah jumlah elemen. Pada persamaan di atas, \mathbf{M}_s , \mathbf{S}_s , masing-masing mewakili matriks massa struktur dan matriks kekakuan struktur untuk seluruh titik buhul. Demikian juga untuk vektor gaya $\mathbf{A}_s(t)$ dan $\mathbf{A}_{sb}(t)$ adalah beban aktual dan beban titik buhul ekuivalen untuk seluruh struktur. Dengan demikian, persamaan gerakan tak teredam pada persamaan (3.6) untuk struktur setelah dirakit menjadi

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{D}}_s + \mathbf{S}_s \mathbf{D}_s = \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}_{sb}(t) \tag{3.12}$$

dengan \mathbf{D}_s dan \mathbf{D}''_s masing-masing adalah vektor anjakan struktur dan vektor percepatan struktur. Persamaan (3.12) menyatakan persamaan gerak struktur untuk seluruh anjakan titik buhul, baik titik buhul terkekang maupun bebas.

Untuk menyelesaikan persamaan (3.12), perlu dilakukan pengaturan ulang dan pemisahan matriks, dengan maksud untuk mempercepat proses dan menghemat penggunaan memori komputer. Pemisahan dimaksudkan untuk meniadakan matriks yang mengandung nol yaitu pada elemen matriks terkekang,

yang menghasilkan nilai nol sehingga memperlambat proses perhitungan dan menghabiskan memori yang tersedia. Proses ini dijelaskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FR} \\ \mathbf{M}_{RF} & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}}_F \\ \ddot{\mathbf{D}}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{FF} & \mathbf{S}_{FR} \\ \mathbf{S}_{RF} & \mathbf{S}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_F \\ \mathbf{D}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F(t) \\ \mathbf{A}_R(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Pada persamaan ini, beban titik buhul aktual dan ekuivalen telah digabungkan ke dalam vektor gaya satuan. Indeks *F* (*free*) mewakili anjakan titik buhul bebas, sedangkan *R* (*restrained*) mewakili anjakan titik buhul terkekang. Dengan memisahkan masing-masing bagian matriks anjakan bebas dengan anjakan terkekang, persamaan (3.13) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathbf{M}_{FF} \ddot{\mathbf{D}}_F + \mathbf{M}_{FR} \ddot{\mathbf{D}}_R + \mathbf{S}_{FF} \mathbf{D}_F + \mathbf{S}_{FR} \mathbf{D}_R = \mathbf{A}_F(t) \quad (3.14)$$

dan

$$\mathbf{M}_{RF} \ddot{\mathbf{D}}_F + \mathbf{M}_{RR} \ddot{\mathbf{D}}_R + \mathbf{S}_{RF} \mathbf{D}_F + \mathbf{S}_{RR} \mathbf{D}_R = \mathbf{A}_R(t) \quad (3.15)$$

Jika gerakan dukungan (pada kekangan) adalah nol, kedua persamaan di atas menjadi

$$\mathbf{M}_{FF} \ddot{\mathbf{D}}_F + \mathbf{S}_{FF} \mathbf{D}_F = \mathbf{A}_F(t) \quad (3.16)$$

dan

$$\mathbf{M}_{RF} \ddot{\mathbf{D}}_F + \mathbf{S}_{RF} \mathbf{D}_F = \mathbf{A}_R(t) \quad (3.17)$$

kedua persamaan terakhir ini akan digunakan dalam perhitungan anjakan bebas \mathbf{D}_F dan reaksi dukungan $\mathbf{A}_R(t)$.

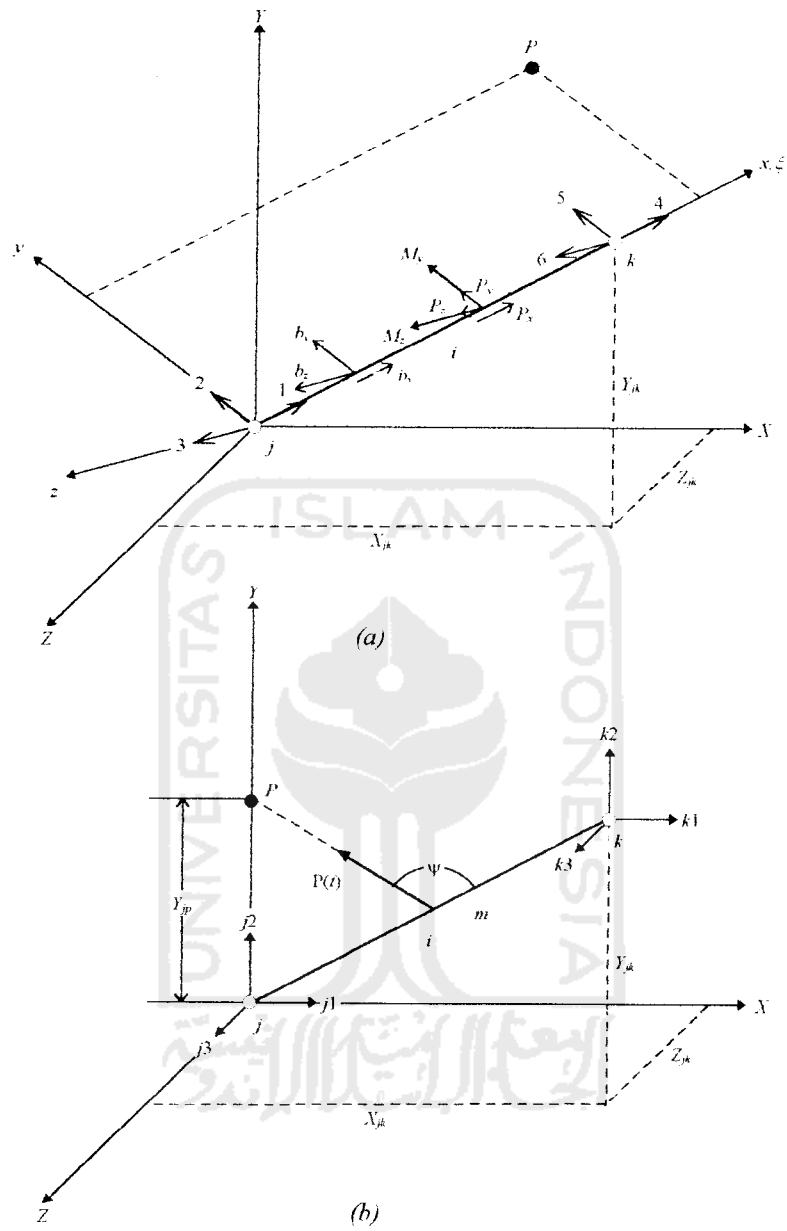
Dalam banyak kasus seringkali dianggap massa setiap elemen terkumpul pada koordinat titik buhul, yaitu pada tempat terdapat kemungkinan terjadi anjakan, lazim disebut Metode Massa Terkumpul. Dengan cara ini, waktu perhitungan yang dibutuhkan akan lebih singkat jika dibandingkan dengan Metode Massa Terdistribusi. Namun demikian, Metode Massa Terdistribusi memberikan hasil yang lebih mendekati hasil sesungguhnya jika dibandingkan dengan Metode Massa Terkumpul untuk jumlah elemen yang sama. Untuk alasan itulah dalam Tugas Akhir ini digunakan pendekatan Massa Terdistribusi. Berikut ini adalah matriks massa terkumpul \mathbf{M}_I untuk seluruh struktur

$$\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_j & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_{n_n} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

dengan n_n adalah jumlah titik buhul. Submatriks \mathbf{M}_j pada persamaan (3.18) berarti

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{I}_0 \quad (3.19)$$

dengan \mathbf{M}_j adalah massa terkumpul pada titik buhul j , sedangkan \mathbf{I}_0 adalah matriks identitas dengan elemen matriks bernilai 0 pada tempat terjadi anjakan non translasi. Keuntungan dari pendekatan massa terkumpul adalah matriks massa \mathbf{M}_I selalu diagonal, walaupun tidak selalu positif tertentu.



Gambar 3.2 Elemen rangka ruang; (a) arah lokal; (b) arah global.

Matriks kekakuan 6 x 6 untuk arah sumbu lokal adalah:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{jj} & \mathbf{K}'_{jk} \\ \mathbf{K}'_{kj} & \mathbf{K}'_{kk} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \text{Sym} \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pada matriks kekakuan di atas, terlihat banyak elemen matriks bernilai nol, ini dikarenakan elemen rangka batang tidak memiliki kekakuan pada arah tegak lurus terhadap sumbunya.

Matriks massa 6 x 6 untuk arah sumbu lokal adalah:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{jj} & \mathbf{M}'_{jk} \\ \mathbf{M}'_{kj} & \mathbf{M}'_{kk} \end{bmatrix} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & \text{Sym} \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Beban titik buhul ekuivalen pada arah lokal yang disebabkan oleh beban merata pada rangka ruang diberikan oleh:

$$\mathbf{p}'_b(t) = L \int_0^1 \mathbf{f}^T \mathbf{b}'(t) d\xi \quad (3.22)$$

Untuk rangka ruang, terdapat tiga komponen beban garis bergantung waktu, yaitu:

$$\mathbf{b}'(t) = \{b_x, b_y, b_z\} \quad (3.23)$$

dengan satuan masing-masing gaya per satuan panjang pada arah sumbu lokal x , y , z . Matriks pada persamaan (3.22) di atas dapat dinyatakan kembali sebagai

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j & \mathbf{f}_k \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

dengan:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{I}_3 \cdot f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot f_1 \quad (3.25)$$

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{I}_3 \cdot f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot f_2 \quad (3.26)$$

dengan $f_1 = 1 - \xi$ dan $f_2 = \xi$.

Selain beban-beban di atas, struktur rangka ruang juga dapat menahan beban berupa gaya terpusat dan momen bergantung waktu. Komponen gaya dimaksud adalah P_x , P_y , P_z , dan momen M_y , M_z sebagaimana terlihat pada Gambar 3.2 (M_x tidak ada mengingat elemen rangka tidak dapat menahan momen searah dengan sumbu memanjangnya).

Gaya terpusat dan momen bergantung waktu dapat dihitung menurut:

$$p_{M2} = M_z \frac{df_1}{dx} = \frac{M_z}{L} \frac{df_1}{d\xi} = -\frac{M_z}{L} \quad (3.27)$$

$$p_{M3} = -M_y \frac{df_1}{dx} = -\frac{M_y}{L} \frac{df_1}{d\xi} = \frac{M_y}{L} \quad (3.28)$$

$$\rho_{M5} = M_z \frac{df_2}{dx} = \frac{M_z}{L} \frac{df_2}{d\xi} = \frac{M_z}{L} = -\rho_{M2} \quad (3.29)$$

$$\rho_{M6} = -M_y \frac{df_2}{dx} = -\frac{M_y}{L} \frac{df_2}{d\xi} = -\frac{M_y}{L} = \rho_{M3} \quad (3.30)$$

Untuk mengubah elemen matriks dari koordinat lokal ke koordinat global, diperlukan matriks transformasi yang sesuai. Pada Gambar 3.2 terlihat titik P untuk penentuan bidang lentur. Titik ini terletak pada bidang x - y dan bukan pada sumbu lokal x . Jika mungkin, titik P ini dapat dianggap sebagai titik buhul lain pada struktur yang koordinatnya diketahui.

Vektor yang diwakili oleh garis seperti tergambar dapat menyatakan gaya, momen, anjakan pada koordinat titik buhul dari titik hubungan suatu struktur. Komponen vektor pada Gambar 3.2 di atas diperoleh dengan cara memproyeksikan komponen-komponen X , Y , dan Z ke sumbu lokal x , y , dan z . Berikut ini diberikan komponen x , y , dan z dari vektor tergambar menurut koordinat x

$$\begin{aligned} x &= X \cos xX + Y \cos xY + Z \cos xZ \\ y &= X \cos yX + Y \cos yY + Z \cos yZ \\ z &= X \cos zX + Y \cos zY + Z \cos zZ \end{aligned} \quad (3.31)$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

atau dalam notasi ringkas

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{A} \quad (3.33)$$

dengan:

$\cos xX$ = sudut yang dibentuk oleh sumbu lokal x dengan sumbu global X ,

\mathbf{A}' = komponen dalam sistem koordinat lokal,

\mathbf{R} = matriks transformasi,

\mathbf{A} = komponen dalam sistem koordinat global.

Untuk penentuan elemen matriks pada persamaan (3.32) di atas, diperlukan koordinat titik P yaitu x_p, y_p, z_p yang terletak pada bidang x - y dari sistem koordinat lokal. Cosinus arah dari sumbu lokal x menurut elemen struktur diberikan oleh:

$$\cos xX = \frac{x_k - x_j}{L}, \quad \cos xY = \frac{y_k - y_j}{L}, \quad \cos xZ = \frac{z_k - z_j}{L} \quad (3.34)$$

Cosinus arah dari sumbu lokal z menurut elemen struktur dapat dihitung dari keadaan vektor Z harus tegak lurus bidang yang dibentuk oleh dua vektor sembarang pada bidang x - y dari koordinat lokal. Kedua vektor ini dapat berupa vektor X dari titik buhul j ke titik buhul k menurut sumbu x dan vektor P dari titik buhul j ke titik P . Kondisi orthogonal dapat dinyatakan oleh perkalian silang antara vektor X dan P sebagai berikut.

$$\vec{Z} = \vec{X} \times \vec{P} \quad (3.35)$$

Dengan menerapkan perkalian silang seperti pada persamaan (3.35) di atas, diperoleh

$$z_x \hat{i} + z_y \hat{j} + z_z \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_k - x_j & y_k - y_j & z_k - z_j \\ x_p - x_j & x_p - x_j & x_p - x_j \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

dengan \hat{i} , \hat{j} , dan \hat{k} adalah vektor satuan menurut koordinat umum X, Y dan Z. Dengan demikian, cosinus arah dari sumbu lokal z menurut elemen struktur adalah

$$\cos zX = \frac{z_x}{|Z|}, \quad \cos zY = \frac{z_y}{|Z|}, \quad \cos zZ = \frac{z_z}{|Z|} \quad (3.37)$$

dengan:

$$\begin{aligned} z_x &= (y_k - y_j)(z_p - z_j) - (z_k - z_j)(y_p - y_j) \\ z_y &= (z_k - z_j)(x_p - x_j) - (x_k - x_j)(z_p - z_j) \\ z_z &= (x_k - x_j)(y_p - y_j) - (y_k - y_j)(x_p - x_j) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$|Z| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + z_z^2} \quad (3.39)$$

Cosinus arah dari sumbu lokal y dapat dihitung dari kondisi orthogonal antara sebuah vektor Y menurut sumbu lokal y dan vektor satuan X_1 dan Z_1 menurut sumbu lokal y dan z , dengan demikian

$$\vec{Y} = \vec{X}_1 \times \vec{Z}_1 \quad (3.40)$$

Dengan menerapkan perkalian silang seperti pada persamaan (3.35) di atas, maka diperoleh

$$y_x \hat{i} + y_y \hat{j} + y_z \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

dengan demikian,

$$\cos yX = \frac{y_x}{|Y|}, \quad \cos yY = \frac{y_y}{|Y|}, \quad \cos yZ = \frac{y_z}{|Y|} \quad (3.42)$$

dengan:

$$\begin{aligned} y_x &= \cos xY \cos zZ - \cos xZ \cos zY \\ y_y &= \cos xZ \cos zX - \cos xX \cos zZ \\ y_z &= \cos xX \cos zY - \cos xY \cos zX \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$|Y| = \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2} \quad (3.44)$$

Dari uraian di atas, terlihat bahwa cosinus arah dari matriks transformasi \mathbf{R} pada persamaan (3.33) dapat diperoleh jika koordinat titik-titik pada kedua ujung dari sebuah elemen (titik j dan k) dan koordinat sebuah titik P pada bidang x - y pada koordinat lokal diketahui. Penentuan koordinat titik P seringkali ditempatkan pada sumbu lokal y , walaupun demikian koordinat titik P dapat merupakan titik sembarang pada bidang yang dibentuk oleh sumbu lokal x - y .

Matriks transformasi \mathbf{R} pada persamaan (3.32) untuk koordinat titik buhul pada kedua ujung dari suatu elemen struktur rangka ruang, diberikan oleh:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Matriks kekakuan struktur, matriks massa konsisten struktur, matriks beban struktur dapat diperoleh dengan menerapkan operasi matriks seperti tertera pada persamaan (3.6), (3.7), (3.8), dan (3.9).

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya, matriks struktur di atas kemudian dirakit dengan Metode Kekakuan Langsung. Adapun masing-masing matriks dimaksud adalah:

Matriks kekakuan struktur:

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{R}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_{xx}^2 & & & & & & \\ C_{xx}C_{xy} & C_{xy}^2 & & & & & \\ C_{xx}C_{xz} & C_{xy}C_{xz} & C_{xz}^2 & & & & \\ -C_{xx}^2 & -C_{xx}C_{xy} & -C_{xx}C_{xz} & C_{xx}^2 & & & \\ -C_{xx}C_{xy} & -C_{xy}^2 & -C_{xy}C_{xz} & C_{xx}C_{xy} & C_{xy}^2 & & \\ -C_{xx}C_{xz} & -C_{xy}C_{xz} & -C_{xz}^2 & C_{xx}C_{xz} & C_{xy}C_{xz} & C_{xz}^2 & \\ & & & & & & \text{Sym} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Pada matriks kekakuan struktur di atas, hanya cosinus arah dari sumbu lokal x (sumbu elemen) yang mempengaruhi matriks kekakuan struktur.

Matriks massa konsisten elemen struktur:

$$\mathbf{M} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{M} \mathbf{R} = \frac{P \Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2(C_{xx}^e + C_{yy}^e + C_{zz}^e) & & & & & & \\ 2(C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x) & 2(C_{xx}^e + C_{yy}^e + C_{zz}^e) & & & & & \\ 2(C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx}) & 2(C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx}) & 2(C_{zz}^e + C_y^2 + C_z^2) & & & & \\ C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & 2(C_{xx}^e + C_{yy}^e + C_{zz}^e) & & & \\ C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x & 2(C_{xx}^e C_y + C_{yy}^e C_x + C_{zz}^e C_x) & 2(C_{xx}^e + C_{yy}^e + C_{zz}^e) & & \\ C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx} & C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx} & C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx} & 2(C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx}) & 2(C_y C_{xx} + C_y C_{yy} + C_z C_{xx}) & 2(C_{xx}^e + C_{yy}^e + C_{zz}^e) & \end{bmatrix} \quad \text{Sym.}$$

(3.47)

Perakitan matriks kekakuan elemen struktur, matriks massa konsisten elemen struktur, dan matriks beban titik buhul elemen struktur dilakukan dengan memperhitungkan sumbangan yang diberikan oleh masing-masing elemen struktur. Penataan indeks diperlukan guna menghindari terjadinya kesalahan letak komponen pada elemen rangka ruang. Gambar 3.2(b) menunjukkan hubungan:

$$\begin{aligned} I1 &= 3J - 2 & I2 &= 3J - 1 & I3 &= 3J \\ K1 &= 3K - 2 & K2 &= 3K - 1 & K3 &= 3K \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.2 Analisis Getaran

Jika tidak terdapat gaya, persamaan (3.16) yang merupakan persamaan gerakan tak teredam untuk anjakan titik buhul bebas dari struktur terdiskritisasi dapat ditulis kembali dalam bentuk homogen sebagai

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{S}\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

dan mempunyai penyelesaian sebagai berikut.

$$\mathbf{D}_i = \Phi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, 3 \dots, n) \quad (3.50)$$

dengan:

n = jumlah derajat kebebasan,

Φ_i = vektor amplitudo titik buhul atau disebut juga *mode shape* untuk mode ke- i dari getaran,

ω_i = frekuensi sudut mode ke- i ,

α = sudut fase.

Dengan menurunkan dua kali persamaan (3.49) terhadap waktu t , diperoleh

$$\ddot{\mathbf{D}}_i = -\omega_i^2 \Phi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (3.51)$$

Substitusi persamaan (3.50) dan (3.51) ke dalam persamaan (3.49) untuk menghilangkan $\sin(\omega_i t + \alpha_i)$, diperoleh

$$(\mathbf{S} - \omega_i^2 \mathbf{M})\Phi = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

Bentuk persamaan (3.52) ini adalah masalah aljabar eigen. Menurut teori persamaan homogen, terdapat penyelesaian untuk persamaan ini hanya jika determinan dari koefisien matriks adalah sama dengan nol, atau

$$|\mathbf{S} - \omega_i^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.53)$$

Penguraian determinan persamaan di atas menghasilkan sebuah polinomial berorde n yang disebut persamaan karakteristik. Ke- n akar persamaan dari polinomial ini adalah nilai karakteristik atau disebut juga nilai eigen. Substitusi akar-akar persamaan ini pada persamaan (3.52) menghasilkan vektor karakteristik atau vektor eigen Φ_i dengan sembarang konstanta. Vektor eigen dapat diperoleh pada sembarang kolom dari matriks *adjoint* \mathbf{H}^a dari matriks karakteristik \mathbf{H}_i , yang diperoleh dari persamaan (3.52) sebagai berikut.

$$\mathbf{H}_i \Phi_i = \mathbf{0} \quad (3.54)$$

dengan:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{S} - \omega_i^2 \mathbf{M} \quad (3.55)$$

Cara paling efisien untuk penyelesaian persoalan getaran struktur adalah dengan mengubah persamaan di atas ke dalam bentuk standard simetris sebagai berikut.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

dengan:

\mathbf{A} = matriks simetris,

\mathbf{I} = matriks identitas,

λ_i = nilai eigen ke- i ,

\mathbf{X}_i = vektor eigen untuk n persamaan homogen.

Persamaan (3.52) dapat dinyatakan dalam persamaan (3.56) dengan memfaktorkan matriks kekakuan \mathbf{S} atau matriks massa \mathbf{M} dengan menggunakan Metode Akar Cholesky. Dari pemfaktoran matriks \mathbf{S} diperoleh

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (3.57)$$

dengan \mathbf{U} adalah matriks segitiga atas.

Substitusi persamaan (3.57) ke dalam persamaan (3.52) akan memberikan

$$(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

kemudian persamaan ini dikalikan dengan \mathbf{U}^{-T} dan $\mathbf{I} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}$ dimasukkan setelah matriks \mathbf{M} , memberikan

$$\mathbf{U}^{-T} (\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$(\mathbf{M}_U - \lambda_i \mathbf{I}) \Phi_{ui} = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

dengan:

$$\mathbf{M}_{ti} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{U}^{-1} \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad \Phi_{ti} = \mathbf{U} \Phi_i \quad (3.61)$$

Persamaan (3.60) telah berbentuk standard simetris seperti persamaan (3.56). Matriks \mathbf{A} digantikan oleh \mathbf{M}_{ti} yang selalu berbentuk simetris. Sebagai akibat dari pemfaktoran matriks \mathbf{S} , maka nilai eigen λ_i adalah $1/\omega_i^2$. Vektor eigen Φ_{ti} pada persamaan (3.60) berhubungan dengan Φ_i berdasarkan persamaan (3.61). Hal ini memerlukan perubahan koordinat menjadi serangkaian koordinat baru dengan matriks kekakuan sama dengan \mathbf{I} . Setelah nilai eigen dan vektor eigen diperoleh dari persamaan (3.60), frekuensi sudut dan *mode shape* pada koordinat asli dapat dinyatakan sebagai

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad \Phi_i = \mathbf{U}^{-1} \Phi_{ti} \quad (3.62)$$

karena pada koordinat yang baru matriks \mathbf{M}_{ti} simetris, maka seluruh vektor eigen bersifat bebas linier. Dua vektor eigen Φ_{ti} dan Φ_{tj} berhubungan dengan nilai eigen λ_i dan λ_j yang bersifat orthogonal satu dengan lainnya. Dengan demikian,

$$\Phi_{ti}^T \Phi_{tj} = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.63)$$

Pada koordinat aslinya vektor eigen Φ_{ti} dan Φ_{tj} bersifat orthogonal terhadap matriks kekakuan \mathbf{S} dan matriks massa \mathbf{M} , sebagai berikut.

$$\Phi_i^T \mathbf{S} \Phi_j = \Phi_{ti}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} \Phi_{tj} = \Phi_{ti}^T \Phi_{tj} = 0 \quad (3.64)$$

Pada analisis getaran untuk struktur, mungkin saja ditemui frekuensi terulang (nilai eigen terulang) sebagai akar persamaan karakteristik. Jika nilai eigen berulang m -kali, disebut *multiplicity* m . Dengan demikian dapat diketahui m vektor eigen bebas linier berhubungan dengan nilai eigen terulang, tetapi vektor ini tidak unik. Serangkaian nilai eigen baru selalu dapat dibentuk sebagai gabungan linier dari rangkaian asli dan masih memenuhi masalah nilai eigen, yaitu

$$\mathbf{M}_U \sum_{i=1}^m c_i \Phi_{Ui} = \lambda_m \sum_{i=1}^m c_i \Phi_{Ui} \quad (3.65)$$

dengan:

c_i = pengali dari vektor modal ke- i ,

λ_m = nilai eigen terulang.

Jika matriks kekakuan \mathbf{S} semi tertentu, matriks kekakuan tidak dapat difaktorkan sebagaimana dijelaskan di atas, karena paling tidak terdapat satu *mode rigid-body* dengan $\omega_i = 0$. Sebagai gantinya, jika diperlukan lebih mungkin memfaktorkan matriks massa \mathbf{M} menggunakan teknik reduksi yang diperkenalkan oleh Guyan untuk memperoleh matriks positif tertentu. Jika matriks massa bersifat diagonal (seperti pada metode massa terkumpul), faktorisasinya menjadi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{M}^{1/2} \quad (3.66)$$

dengan $\mathbf{M}^{1/2}$ mengandung elemen diagonal yang sama dengan akar persamaan elemen diagonal pada matriks massa \mathbf{M} . Untuk ini, transformasi ke bentuk standard simetris menghasilkan

$$(\mathbf{S}_M - \lambda_i \mathbf{I}) \Phi_{Mi} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

dengan:

$$\mathbf{S}_M = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1/2} \quad \lambda_i = \omega_i^2 \quad \Phi_{Mi} = \mathbf{M}^{1/2} \Phi_i \quad (3.68)$$

Pada persamaan pertama dari persamaan (3.68) matriks $\mathbf{M}^{-1/2}$ mengandung kebalikan dari elemen diagonal dari matriks $\mathbf{M}^{1/2}$. Setelah nilai eigen dan vektor eigen diperoleh dari persamaan (3.67), dapat ditentukan frekuensi sudut dan *mode shape* berdasarkan hubungan

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \Phi_i = \mathbf{M}^{-1/2} \Phi_{Mi} \quad (3.69)$$

Penyelesaian bentuk persamaan homogen seperti pada persamaan (3.56) di atas dapat dilakukan dengan banyak cara, seperti Faddeev-Leverrier's Method (Constantinides, A., 1987), The Power Method (Carnahan, Brice, et. al., 1969), Rutishauser's Method, Danilevsky's Method, Inverse Iteration Method (Weaver, W., Jr., 1987), Metode Transformasi yang termasuk Jacobi's Method, Givens's Method, Householder-QR (Mathews, J. H., tanpa tahun), Elementary Similarity Transformation (Constantinides, A., 1987), dan lain-lain.



Untuk penyelesaian persamaan eigen dalam analisis getaran dengan elemen hingga, matriks kekakuan maupun matriks massa mempunyai bentuk simetris. Bentuk ini memberi kemudahan dalam penyelesaian persamaan eigen dan untuk penyelesaian paling efisien adalah menggunakan metode khusus untuk matriks simetris yaitu Metode Householder-QR. Penyelesaian persamaan ini dapat juga dilakukan dengan metode Jacobi, namun perlu dilakukan penyesuaian terhadap bentuk matriks yang simetris ini, sehingga diperoleh prosedur paling efisien. Pada program yang disertakan, metode Jacobi yang telah disesuaikan untuk bentuk matriks simetris diterapkan dalam sub program FIND_EIGENPAIRS.

3.3 Pengaruh Redaman

Pengaruh redaman pada struktur tidak dipahami secara baik sebagaimana pengaruh kekakuan dan massa pada struktur. Walaupun demikian, pada kenyataannya redaman struktur selalu ada dan memainkan peranan penting dalam kestabilan struktur.

Jika struktur terdiskritisasi dianggap mempunyai redaman viskos, persamaan aksi gerakan struktur diberikan oleh:

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + SD = A \quad (3.70)$$

yang hanya berlaku untuk anjakan titik buhul bebas. Matriks redaman **C** memiliki bentuk umum sebagai berikut.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Menurut Rayleigh, matriks redaman dianggap berhubungan linier dengan matriks massa dan matriks kekakuan, dan dinyatakan sebagai

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{S} \quad (3.72)$$

dengan a dan b adalah konstanta. Persamaan (3.72) di atas disebut redaman sebanding karena matriks \mathbf{C} berbanding lurus terhadap kombinasi linier dari \mathbf{S} dan \mathbf{M} . Pada keadaan tertentu, persamaan (3.70) dibebaskan oleh transformasi yang sama seperti pada sistem struktur tak teredam. Dengan demikian, pada koordinat prinsipal diketahui

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{D}}_p + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{D}}_p + \mathbf{S}_p \mathbf{D}_p = \mathbf{A}_p \quad (3.73)$$

dengan:

$$\mathbf{C}_p = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = a\mathbf{M}_p + b\mathbf{S}_p \quad (3.74)$$

Simbol \mathbf{C}_p merupakan elemen matriks diagonal yang disebut matriks redaman prinsipal, yang terdiri dari gabungan linier antara \mathbf{M}_p dan \mathbf{S}_p . Jika matriks modal dinormalkan terhadap matriks massa \mathbf{M} , matriks redaman pada koordinat normal menjadi

$$\mathbf{C}_N = \Phi_N^T \mathbf{C} \Phi_N = a\mathbf{I} + b\omega^2 \quad (3.75)$$

Matriks diagonal ω^2 dalam persamaan (3.75) mengandung nilai karakteristik ω_i^2 untuk kasus tak teredam, dan berbentuk

$$\omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

dengan demikian, persamaan gerakan ke- i pada koordinat normal adalah

$$\ddot{D}_{Ni} + (a + b\omega_i^2)\dot{D}_{Ni} + \omega_i^2 D_{Ni} = A_{Ni} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.77)$$

bersama ini juga diperkenalkan notasi

$$C_{Ni} = 2n_i = a + b\omega_i^2 \quad \gamma_i = \frac{n_i}{\omega_i} \quad (3.78)$$

dengan:

C_{Ni} = konstanta redaman modal untuk normal mode ke- i ,

γ = rasio redaman modal yang berhubungan dengan C_{Ni} .

Dengan meniasukkan persamaan (3.78) ke dalam persamaan (3.77), maka diperoleh

$$\ddot{D}_{Ni} + 2n_i\dot{D}_{Ni} + \omega_i^2 D_{Ni} = A_{Ni} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.79)$$

Berdasarkan persamaan (3.78), rasio redaman modal γ_i dapat dinyatakan sebagai

$$\gamma_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (3.80)$$

persamaan ini merupakan bentuk dasar dari persamaan (3.72) yang berguna untuk memperlihatkan akibat dari beragam nilai konstanta a dan b . Jika diambil nilai $a = 0$, sedangkan $b \neq 0$, maka matriks redaman berbanding lurus terhadap matriks kekakuan dan disebut redaman relatif karena berhubungan dengan kecepatan relatif dari koordinat anjakan. Ini juga menyatakan rasio redaman pada mode prinsipal berbanding lurus terhadap frekuensi sudut tak teredam untuk mode tersebut. Dengan demikian persamaan (3.79) menjadi

$$\gamma_i = \frac{b\omega_i}{2} \quad (3.81)$$

Sebaliknya jika $a \neq 0$ dan $b = 0$, maka matriks redaman berbanding lurus terhadap matriks massa dan disebut redaman absolut karena berhubungan dengan kecepatan absolut dari koordinat anjakan, diberikan oleh

$$\gamma_i = \frac{a}{2\omega_i} \quad (3.82)$$

terlihat bahwa rasio redaman untuk tiap mode berbanding terbalik dengan frekuensi sudut tak teredam untuk mode tersebut.

Pendekatan paling sederhana adalah dengan menganggap bahwa persamaan gerakan dibebaskan dengan penggunaan matriks modal yang diperoleh untuk struktur tanpa redaman. Dengan kata lain matriks Φ dianggap

orthogonal tidak saja terhadap matriks \mathbf{M} dan \mathbf{S} , juga terhadap matriks \mathbf{C} , atau dapat dinyatakan

$$\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_j = \Phi_j^T \mathbf{C} \Phi_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.83)$$

akibat dari anggapan ini adalah bahwa hasil operasi $\mathbf{C}_p = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$ sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Untuk kepraktisan, lebih mudah mendapatkan rasio redaman γ_i untuk mode alami getaran dengan percobaan atau anggapan dibandingkan dengan penentuan angka redaman pada matriks \mathbf{C} secara langsung. Biasanya rasio redaman γ_1 (untuk mode pertama dari getaran) didapatkan dari percobaan langsung di lapangan atau dari data yang telah tersedia. Nilai rasio redaman ini untuk struktur logam adalah sekitar 0.01 s.d. 0.05, sedangkan untuk beton bertulang adalah 0.05 s.d. 0.10. Berdasarkan nilai rasio redaman γ_1 dapat pula ditentukan rasio redaman γ_i (untuk mode lainnya) dengan pendekatan

$$\gamma_i = \gamma_1 \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^{e_1} \quad (0.5 \leq e_1 \leq 0.7) \quad (3.84)$$

Persamaan (3.79) dapat ditulis kembali menjadi

$$\ddot{D}_{Ni} + 2\gamma_i \omega_i \dot{D}_{Ni} + \omega_i^2 D_{Ni} = A_{Ni} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.85)$$

dengan $C_{Ni} = 2\gamma_i \omega_i$. Untuk keperluan praktis dan agar persamaan ini dapat berlaku pada struktur dengan redaman rendah, ditentukan $0 \leq \gamma_i \leq 0.20$ untuk seluruh mode. Perlu diperhatikan bahwa konsep ini berdasarkan koordinat

normal untuk sistem tak teredam dan rasio redaman ditentukan pada koordinat tersebut.

Jika redaman modal dianggap berada pada koordinat normal struktur, dapat ditentukan matriks redaman \mathbf{C} pada koordinat asli (fisik) struktur. Matriks ini dapat diperoleh dengan cara transformasi balik sebagai berikut.

$$\mathbf{C} = \Phi_N^{-T} \mathbf{C}_N \Phi_N^{-1} \quad (3.86)$$

Berdasarkan hubungan $\Phi_N^{-1} = \Phi_N^T \mathbf{M}$, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi_N \mathbf{C}_N \Phi_N^T \mathbf{M} \quad (3.87)$$

Bentuk transformasi pada persamaan (3.87) di atas sangat cocok diterapkan jika tidak seluruh mode alami termasuk dalam analisis. Persamaan ini dijadikan sebagai prosedur dasar untuk menentukan matriks redaman struktur yang terdapat pada sub program DIRECT_NUMERICAL_INTEGRATION.

3.4 Metode Integrasi Numerik Langsung

Menurut kajian yang telah dilakukan Weaver, prosedur analisis respons struktur yang paling baik adalah prosedur *Newmark's Generalized Acceleration Method* dengan varian Hilber- α . Hal yang menarik dari metode ini adalah perbaikan kontrol terhadap redaman numerik, yang diwakili oleh parameter α dalam persamaan gerakan struktur.

Untuk mempelajari secara lengkap *Newmark's Generalized Acceleration Method* varian Hilber- α , diberikan persamaan gerakan struktur teredam untuk struktur berderajat kebebasan tunggal sebagai berikut.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (3.88)$$

Selanjutnya, persamaan gerakan struktur teredam untuk struktur berderajat kebebasan banyak dalam bentuk matriks adalah

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{S}\mathbf{D} = \mathbf{A}(t) \quad (3.89)$$

Untuk penentuan respons struktur berderajat kebebasan tunggal, perlu diketahui kecepatan awal, anjakan awal dan beban pada waktu $t_0 = 0$. Percepatan awal dapat diberikan oleh

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{m}(P_0 - ku_0 - c\dot{u}_0) \quad (3.90)$$

yang diturunkan dari persamaan (3.88) pada waktu $t_0 = 0$. Dengan cara yang sama untuk struktur berderajat kebebasan banyak, persamaan (3.89) memberikan

$$\ddot{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}_0 - \mathbf{S}\mathbf{D}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}_0) \quad (3.91)$$

Untuk penentuan respons struktur, metode Newmark mengusulkan pendekatan kecepatan dan anjakan pada sistem berderajat kebebasan tunggal pada waktu t_{j-1} sebagai berikut.

$$\dot{u}_{j+1} = \left[\dot{u}_j + (1-\gamma)\ddot{u}_j + \gamma\ddot{u}_{j+1} \right] \Delta t_j \quad (3.92)$$

$$u_{j+1} = \left[u_j + \dot{u}_j \Delta t_j + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_j + \beta \ddot{u}_{j+1} \right] (\Delta t_j)^2 \quad (3.93)$$

Parameter γ pada persamaan (3.92) menghasilkan redaman algoritmik dalam rentang waktu Δt_j . Jika $\gamma < 1/2$, akan terjadi redaman buatan negatif, sebaliknya jika $\gamma > 1/2$ redaman yang terjadi adalah positif. Untuk menghindari hal ini, nilai γ haruslah sama dengan $1/2$, dengan demikian persamaan (3.92) menjadi berbentuk *trapezoid*.

Parameter β pada persamaan (3.93) mengontrol ragam percepatan pada tenggang waktu Δt_j . Berikut diberikan tabel pengaruh nilai β terhadap persamaan (3.93)

Tabel 3.1 Pengaruh nilai β terhadap persamaan (3.93)

Nilai β	Bentuk persamaan (3.93)	Identik dengan
0	$u_{j+1} = u_j + \dot{u}_j \Delta t_j + \frac{1}{2} \ddot{u}_j (\Delta t_j)^2$	Metode percepatan tetap
1/4	$u_{j+1} = u_j + \dot{u}_j \Delta t_j + \frac{1}{4} (\ddot{u}_j + \ddot{u}_{j+1}) (\Delta t_j)^2$	Metode percepatan rata-rata
1/6	$u_{j+1} = u_j + \dot{u}_j \Delta t_j + \frac{1}{6} (2\ddot{u}_j + \ddot{u}_{j+1}) (\Delta t_j)^2$	Metode percepatan linier

Analisis respons struktur dengan derajat kebebasan banyak dapat menerapkan prinsip yang diturunkan dari struktur derajat kebebasan tunggal sebagaimana dijelaskan di atas. Teknik yang digunakan dalam analisis ini adalah penerapan ekstrapolasi linier langsung terhadap anjakan tambahan yang diselesaikan dengan masalah *pseudostatic*.

Persamaan (3.92) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{D}}_j &= \left[(1-\gamma) \ddot{\mathbf{D}}_j + \gamma \ddot{\mathbf{D}}_{j+1} \right] \Delta t_j \\ &= \ddot{\mathbf{D}}_j \Delta t_j + \gamma \ddot{\mathbf{D}}_j \Delta t_j\end{aligned}\quad (3.94)$$

Demikian halnya dengan persamaan (3.93) dapat pula dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{D}_j &= \left[\dot{\mathbf{D}}_j \Delta t_j + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{D}}_j + \beta \ddot{\mathbf{D}}_{j+1} \right] (\Delta t_j)^2 \\ &= \dot{\mathbf{D}}_j \Delta t_j + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{D}}_j (\Delta t_j)^2 + \beta \Delta \ddot{\mathbf{D}}_j (\Delta t_j)^2\end{aligned}\quad (3.95)$$

Penyelesaian untuk $\Delta \mathbf{D}_j$ pada persamaan (3.95) memberikan

$$\Delta \ddot{\mathbf{D}}_j = \frac{1}{\beta (\Delta t_j)^2} \Delta \mathbf{D}_j - \frac{1}{\beta \Delta t_j} \Delta \dot{\mathbf{D}}_j - \frac{1}{2\beta_j} \Delta \ddot{\mathbf{D}}_j \quad (3.96)$$

Substitusi persamaan (3.96) pada persamaan (3.94) menghasilkan

$$\Delta \dot{\mathbf{D}}_j = \frac{\gamma}{\beta \Delta t_j} \Delta \mathbf{D}_j - \frac{\gamma}{\beta} \Delta \dot{\mathbf{D}}_j - \left(\frac{\gamma}{2\beta_j} - 1 \right) \Delta t_j \ddot{\mathbf{D}}_j \quad (3.97)$$

Untuk ringkasnya,

$$\hat{\mathbf{Q}}_j = \frac{1}{\beta \Delta t_j} \dot{\mathbf{D}}_j + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{D}}_j \quad (3.98)$$

dan

$$\hat{\mathbf{R}}_j = \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{D}}_j + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t_j \ddot{\mathbf{D}}_j \quad (3.99)$$

Persamaan (3.96) dan (3.97) dapat ditulis kembali menjadi

$$\Delta \ddot{\mathbf{D}}_j = \frac{1}{\beta(\Delta t_j)^2} \Delta \mathbf{D}_j - \hat{\mathbf{Q}}_j \quad (3.100)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{D}}_j = \frac{\gamma}{\beta \Delta t_j} \Delta \mathbf{D}_j - \hat{\mathbf{R}}_j \quad (3.101)$$

Untuk memperbaiki kontrol redaman numerik, Hilber dkk. mengusulkan parameter α ke dalam persamaan gerakan pada waktu t_{j-1} , sebagai berikut.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}_{j+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}}_{j+1} + (1 + \alpha) \mathbf{S} \mathbf{D}_{j+1} - \alpha \mathbf{S} \mathbf{D}_j = \mathbf{A}_{j+1} \quad (3.102)$$

dengan mengurangi persamaan gerakan pada waktu t_j dari persamaan (3.102) akan memberikan

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{D}}_j + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{D}}_j + (1 + \alpha) \mathbf{S} \Delta \mathbf{D}_j - \alpha \mathbf{S} \Delta \mathbf{D}_{j-1} = \Delta \mathbf{A}_j \quad (3.103)$$

Substitusi persamaan (3.100) dan (3.101) pada persamaan (3.103) memberikan

$$\hat{\mathbf{S}}_\alpha \Delta \mathbf{D}_j = \Delta \hat{\mathbf{A}}_{\alpha j} \quad (3.104)$$

dengan:

$$\hat{\mathbf{S}}_\alpha = \hat{\mathbf{S}} + \alpha \mathbf{S} \quad (3.105)$$

dengan:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \frac{1}{\beta(\Delta t_j)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t_j} \mathbf{C} \quad (3.106)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{A}}_{aj} = \Delta \hat{\mathbf{A}}_j + \alpha \mathbf{S} \Delta \mathbf{D}_{j-1} \quad (3.107)$$

dengan:

$$\Delta \hat{\mathbf{A}}_j = \Delta \mathbf{A}_j + \mathbf{M} \hat{\mathbf{Q}}_j + \mathbf{C} \hat{\mathbf{R}}_j \quad (3.108)$$

Dari persamaan-persamaan di atas, diketahui anjakan total, kecepatan total dan percepatan total pada waktu t_{j+1} masing-masing diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{D}_{j+1} = \mathbf{D}_j + \Delta \mathbf{D}_j \quad (3.109)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{j+1} = \dot{\mathbf{D}}_j + \Delta \dot{\mathbf{D}}_j \quad (3.110)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}_{j+1} = \ddot{\mathbf{D}}_j + \Delta \ddot{\mathbf{D}}_j \quad (3.111)$$

Untuk langkah waktu pertama, ditentukan $\Delta \mathbf{D}_{j-1} = 0$ pada persamaan (3.111).

Mengingat banyaknya operasi yang harus dilakukan dalam analisis ini, dirasakan perlu penerapan metode ini ke dalam bentuk program komputer untuk penggunaan yang lebih luas.

Dalam Tugas Akhir ini, metode di atas dituangkan ke dalam kode komputer berupa sub program yang dinamakan `DIRECT_NUMERICAL_INTEGRATION`. Program ini dapat melakukan perhitungan sampai sebanyak 32768 elemen atau sebanyak memori yang mampu disediakan komputer, sehingga dapat digunakan secara luas untuk memperoleh respons struktur yang diinginkan.