

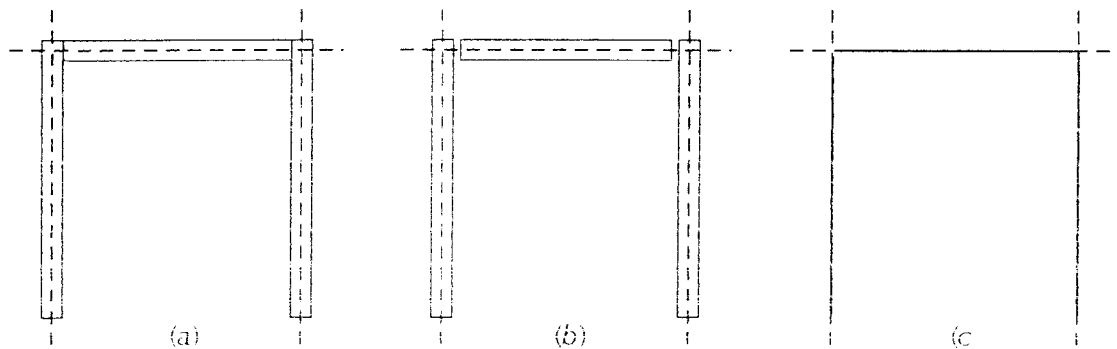
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Elemen Hingga

Metode Elemen Hingga semula diusulkan dan dikembangkan oleh ahli matematika dan fisika. Dalam perkembangan selanjutnya metode elemen hingga dikembangkan oleh insinyur teknik sipil. Tidak dipungkiri bahwa metode ini telah begitu banyak membantu dalam menganalisis berbagai masalah yang ada dalam kehidupan sehari-hari, tidak terbatas hanya pada masalah rekayasa, tetapi juga pada masalah lain. Konsep mendasar dari metode elemen hingga ini adalah prinsip diskritisasi yaitu membagi suatu benda menjadi benda-benda yang berukuran lebih kecil agar lebih mudah pengelolaannya. Hal ini timbul dari keterbatasan manusia yaitu ketidakmampuan memahami benda-benda di alam semesta dalam bentuk keseluruhan atau utuh. Singkatnya, manusia mendiskritisasikan ruang di sekeliling ke dalam bagian-bagian kecil, dan hasil rakitan dari bagian-bagian kecil ini diwujudkan sehingga merupakan tiruan dari ruang atau benda yang didiskritisasikan tersebut.

Berikut ini diberikan contoh masalah portal yang diidealisasikan berdasarkan prinsip metode elemen hingga yang didiskritisasikan menjadi tiga elemen.

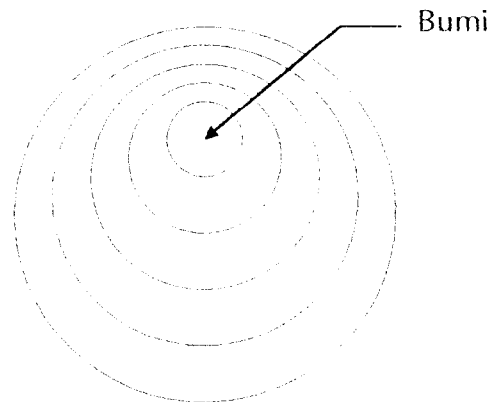


Gambar 2.1 Diskritisasi portal tiga elemen.

Selain contoh di atas, masih banyak contoh lain yang dapat ditemui dalam kehidupan manusia sehari-hari.

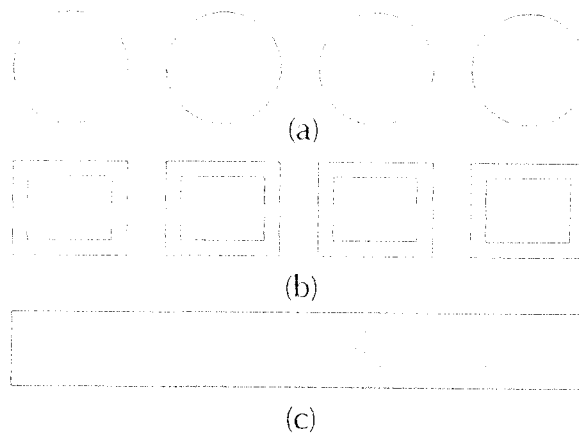
Proses diskritisasi berarti perpendekan dari suatu kenyataan dan kesinambungan. Dalam pengolahan pola diskritisasi dikenal beberapa istilah, antara lain (Desai, 1979):

1. Keberhinggaan : menurut Zeno, ruang adalah berhingga dan dapat dibagi menjadi tidak berhingga dan supaya benda-benda itu ada, benda-benda itu harus mempunyai besaran tertentu. Gambar 2.2 memperlihatkan konsep ruang berhingga. Jika bumi terletak dalam ruang, lalu ruang itu terletak dalam apa?



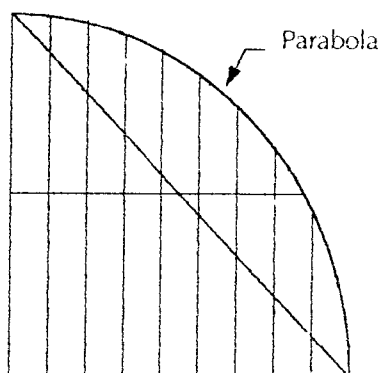
Gambar 2.2 Konsep ruang berhingga.

2. Kesenambungan : Aristoteles mengatakan bahwa suatu besaran yang berkesinambungan terdiri dari elemen-elemen yang dapat dibagi. Misalnya terdapat titik-titik lain di antara dua titik sembarang pada suatu garis, dan ada saat yang lain di antara dua saat dalam suatu periode waktu. Dengan demikian ruang dan waktu adalah berkesinambungan dan dapat dibagi menjadi tidak berhingga. Ide-ide keberhinggaan, pembagian, dan kesinambungan memungkinkan kita untuk membagi benda-benda kontinu menjadi komponen, satuan, atau elemen lebih kecil sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Konsep kesinambungan (a) berurutan; (b) bersebelahan; (c) kesinambungan.

3. Konvergensi : proses berurutan yang bergerak menuju ke jawaban pasti atau benar. Ide ini serupa dengan apa yang disebut Eudoxus dan Archimedes sebagai metode kelelahan (*method of exhaustion*). Konsep ini digunakan untuk mencari luas yang dibatasi oleh kurva-kurva, ruang yang tersedia diisi dengan bentuk-bentuk yang lebih sederhana dengan luasan dapat dengan mudah dihitung. Luas parabola seperti pada Gambar 2.4 dapat dihitung dengan memakai konsep ini. Archimedes menggambar rangkaian tak berhingga dari segitiga-segitiga kecil sampai diperoleh jawaban yang paling mendekati kebenaran. Di sini terlihat bahwa pencapaian konvergensi dengan cara numerik sangatlah melelahkan.



Gambar 2.4 Konsep konvergensi atau kelelahan.

4. Batas-batas : pendekatan terhadap jawaban yang diinginkan seringkali dilakukan dari sebelah dalam atau sebelah luar, sebelah atas atau sebelah bawah. Sebagai contoh dapat dilihat dari pendekatan luas sebuah lingkaran yang didekati dari sebelah luar lingkaran atau sebelah dalam lingkaran dengan menggambarkan garis-garis yang membentuk segibanyak. Hasil yang diperoleh dengan cara pendekatan dari dalam memberikan hasil di bawah luas eksaknya dan sebaliknya hasil yang diperoleh dari luar memberikan hasil di atas luas eksaknya. Hasil pertama disebut batas bawah, dan hasil kedua disebut batas atas.

5. Kesalahan : harus dipahami bahwa diskritisasi hanyalah memberikan hasil pendekatan. Besar perbedaan jawaban antara hasil dengan jawaban eksak disebut kesalahan. Contoh kesalahan ini adalah perbedaan luas sebuah lingkaran yang didekati dari sebelah dalam (l) terhadap luas eksak lingkaran tersebut (L). Kesalahan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai $L-l=\varepsilon$, dengan L = luas eksak, l = luas pendekatan, ε = kesalahan.

2.2 Analisis Struktur

2.2.1 Beban Statis

Persoalan dunia rekayasa tidak dapat dilepaskan dari persoalan analisis struktur, baik itu rekayasa mesin, rekayasa kendaraan, rekayasa pesawat, rekayasa perkapalan, dan lain-lain. Usaha untuk menganalisis struktur telah dilakukan sejak lama bahkan sebelum mesin hitung semacam kalkulator digital ditemukan. Sesuai dengan waktu yang terlewat dalam usaha ini, kemajuan yang dicapai telah cukup pesat. Berbagai metode telah ditemukan dan disempurnakan. Konsep-konsep lama dikembangkan dan disesuaikan dengan kemajuan dan ketersediaan mesin penghitung (komputer).

Kemajuan dalam analisis struktur ditandai dengan perkembangan kemampuan untuk memperhitungkan gaya-gaya atau pengaruh-pengaruh dinamis dari luar struktur seperti gaya angin, gaya gempa, dan sebagainya. Sebagai akibat pengaruh ini, struktur selalu memberikan respons dalam rangka mempertahankan kestabilan yang ada. Respons ini dapat berupa perubahan percepatan, kecepatan, anjakan dan lain-lain.

Metode analisis struktur klasik yang telah dikenal seringkali tidak praktis dalam menjawab tuntutan analisis dinamis. Berdasarkan kenyataan ini, dikembangkanlah suatu metode analisis yang diharapkan dapat menjawab permasalahan di atas, yang tidak lain adalah elemen hingga.

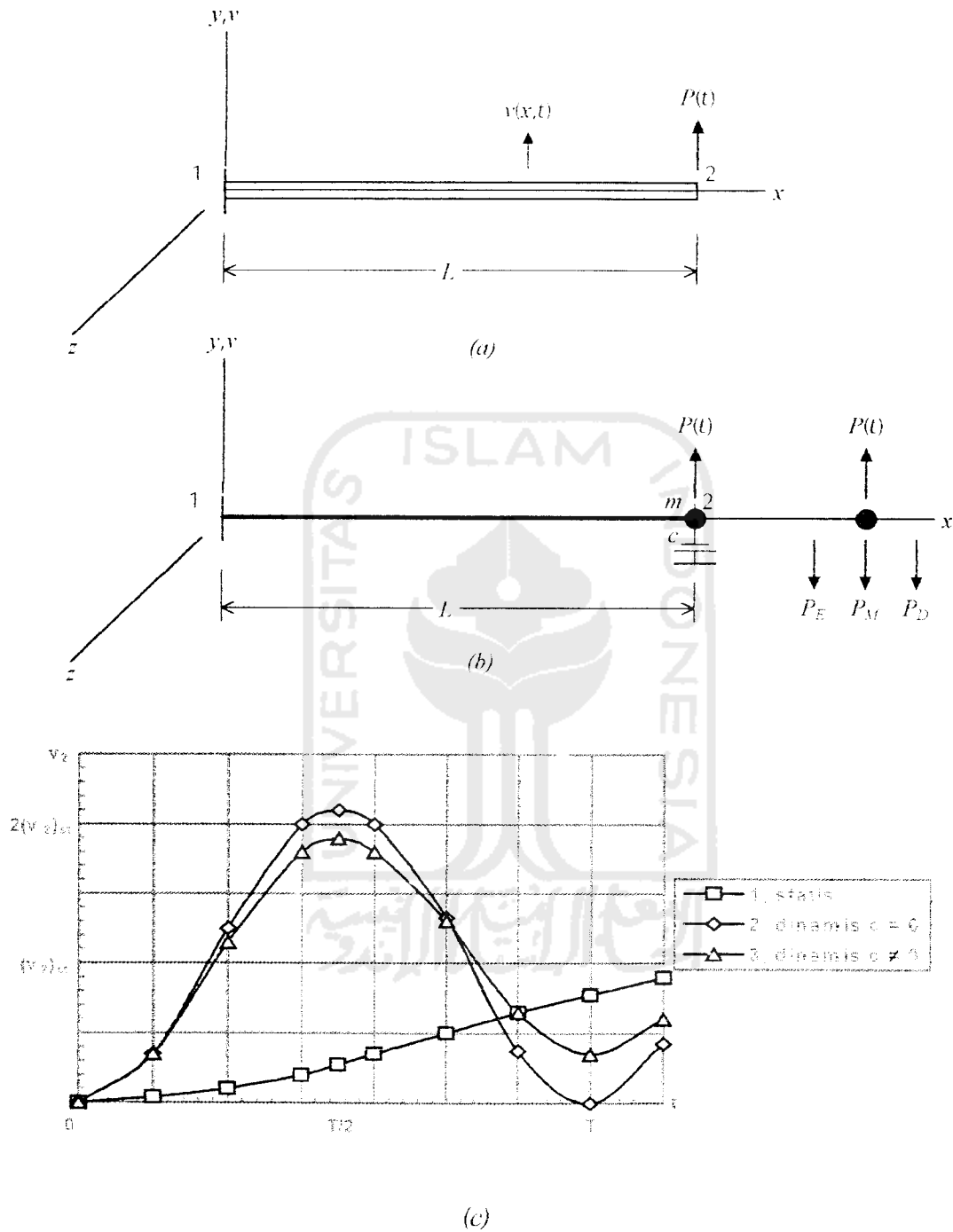
Metode elemen hingga ini tetap mengacu dan sesuai dengan prinsip-prinsip teori analisis struktur klasik, hanya saja metode ini juga menerapkan prinsip-prinsip aljabar matriks yang kemudian diwujudkan dalam program komputer untuk kemudahan dalam penggunaan yang lebih luas, mengingat cara ini cukup melelahkan dan menyita waktu jika dilakukan secara manual. Walaupun demikian ketepatan dan ketelitian yang dihasilkan oleh metode ini dapat dipertanggungjawabkan.

Gambar 2.5 memberikan gambaran mengenai perbedaan antara analisis struktur statis dan analisis struktur dinamis. Balok ini dikenai beban terpusat $P(t)$ pada arah Y di ujung bebas (titik 2).

Jika beban pada Gambar 2.5(a) diterapkan secara perlahan, anjakan tetap pada titik 2 diberikan oleh

$$(v_2)_{st} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (2.1)$$

dengan EI adalah kekakuan lentur penampang balok. Kurva respons pada Gambar 2.5(c) dengan angka 1 menunjukkan dengan penerapan secara perlahan, beban tersebut menghasilkan nilai asimptotis dari $(v_2)_{st}$. Anjakan $v(x)$ pada titik sembarang sepanjang bentang adalah merupakan fungsi dari x saja.



Gambar 2.5 (a) Balok dengan massa terdistribusi; (b) Pendekatan massa terkumpul; (c) Respons statis dan dinamis.

Jika beban pada Gambar 2.5(a) diterapkan secara tiba-tiba, balok tidak hanya akan beranjak, tetapi juga mengalami percepatan pada setiap titik sepanjang bentangan. Dengan demikian, anjakan $v(x,t)$ merupakan fungsi dari ruang (x) dan waktu (t).

Diskritisasi dari Gambar 2.5(a) diberikan pada Gambar 2.5(b). Pada titik 2 terlihat massa terpusat m , mewakili beberapa massa terdistribusi pada balok. Juga terlihat pada titik 2 redaman hipotesis yang menghasilkan gaya disipatif dalam hubungannya terhadap kecepatan. Ketiga gaya pada gambar dengan arah berlawanan dengan beban $P(t)$ adalah gaya elastis,

$$P_I = kv_2(t) = \frac{3EI}{L^3} v_2(t) \quad (2.2)$$

gaya inersia,

$$P_M = m\ddot{v}_2(t) \quad (2.3)$$

dan gaya disipatif,

$$P_D = c\dot{v}_2(t) \quad (2.4)$$

dengan c adalah konstanta redaman. Dari prinsip D'Alembert diketahui

$$P(t) - P_I - P_M - P_D = 0 \quad (2.5)$$

yang menyatakan keseimbangan dinamis dari massa m . Jika persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4) dimasukkan ke dalam persamaan (2.5) dengan penataan ulang, maka diperoleh

$$m\ddot{v}_2 + c\dot{v}_2 + kv_2 = P(t) \quad (2.6)$$

Penyelesaian persamaan diferensial gerakan ini menghasilkan respons pada Gambar 2.5(c) yang ditandai dengan kurva 2 dan 3. Kurva 2 adalah respons jika konstanta redaman $c = 0$, dan kurva 3 adalah respons jika konstanta redaman $c \neq 0$.

2.2.2 Beban Dinamis

Berbagai pengaruh baik alami maupun buatan manusia menyebabkan respons dinamis terhadap struktur. Jenis pengaruh yang paling umum adalah kondisi awal, aksi terapan, dan gerakan dukungan. Pengaruh-pengaruh ini memberikan akibat yang berbeda-beda terhadap respons struktur.

Untuk mempelajari struktur berderajat kebebasan banyak, perlu dipahami terlebih dahulu struktur berderajat kebebasan tunggal, mengingat terdapat persamaan prinsip pada keduanya. Struktur kedua merupakan pengembangan dari struktur pertama. Topik untuk struktur berderajat kebebasan tunggal terdiri dari gerakan harmonis bebas dan gerakan harmonis terpaksa dengan dan tanpa redaman, respons terhadap beban sembarang bergantung waktu atau gerak dukungan, dan respons spektra untuk beban dinamis.

Berikut ini diuraikan pengaruh dinamis yang sering diterapkan pada struktur.

1. Getaran bebas tak teredam

Gambar 2.6(a) menunjukkan analogi mekanis untuk sistem berbeberapa kebebasan tunggal. Massa m dan konstanta pegas k ditentukan dari sifat elastis struktur, dan simbol $u(t)$ menandakan koordinat anjakan tunggal. Juga terlihat pada Gambar 2.6(b) percepatan $\ddot{u}(t)$, yang merupakan turunan kedua dari $u(t)$ terhadap waktu ($\ddot{u}(t) = d^2u/dt^2$). Jika anjakan berupa perputaran, maka m , k , dan u dapat diganti dengan I_r , k_r , dan $\delta\theta$ (sudut perputaran kecil).

Dari diagram *free-body* sebagian pada Gambar 2.6(b), dapat dilihat

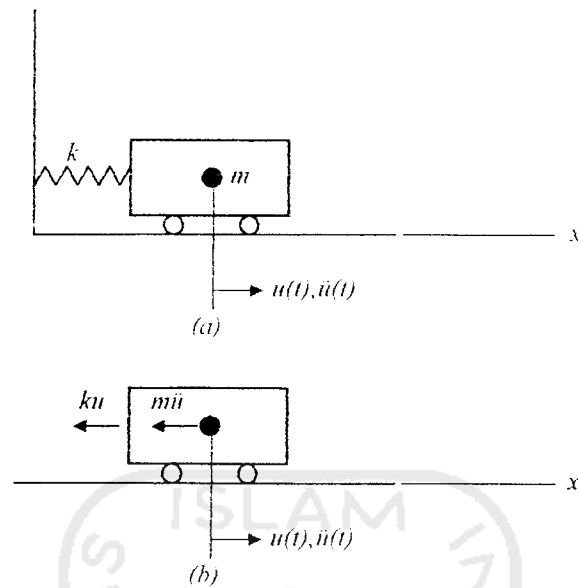
$$-ku - m\ddot{u} = 0 \quad (2.7)$$

yang merupakan terapan dari prinsip D'Alembert untuk keseimbangan dinamis.

Dengan menata ulang persamaan (2.7), diperoleh

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.8)$$

yang berbentuk persamaan diferensial berorde 2.



Gambar 2.6 (a) Analogi mekanis untuk sistem berderajat kebebasan tunggal;
(b) diagram *free-body* sebagian.

2. Fungsi gaya harmonis

Satu fungsi gaya yang penting adalah fungsi harmonis sederhana $P \sin \Omega t$ (atau $P \cos \Omega t$), dengan Ω adalah frekuensi sudut dari fungsi tersebut. Fungsi $P \sin \Omega t$ dapat dilihat pada Gambar 2.7, diterapkan pada sistem berderajat kebebasan tunggal tak teredam. Dari Gambar 2.7 dapat diperoleh persamaan diferensial gerakan, yaitu

$$m\ddot{u} + ku = P \sin \Omega t \quad (2.9)$$

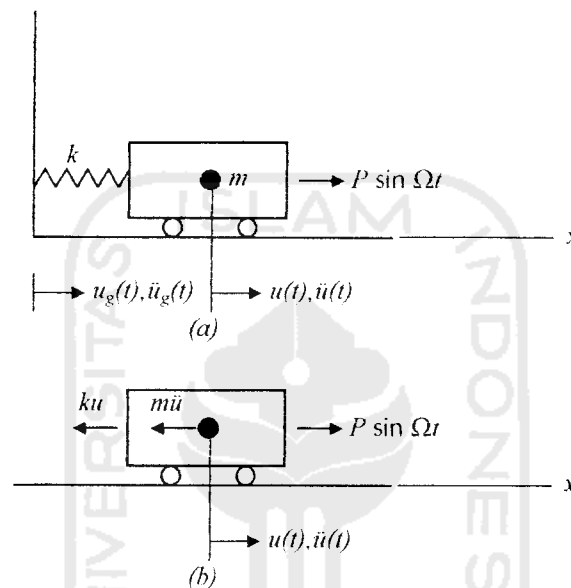
Untuk penyederhanaan, persamaan (2.9) dibagi dengan m sehingga diperoleh

$$\ddot{u} + \omega^2 u = p_m \sin \Omega t \quad (2.10)$$

dengan:

$$\rho_m = \frac{P}{m} \quad (2.11)$$

ρ_m mewakili gaya per satuan massa.



Gambar 2.7 (a) Fungsi gaya harmonis untuk sistem berberat kebebasan tunggal; (b) diagram *free-body* sebagian.

3. Pengaruh redaman

Pada bagian sebelumnya pengaruh redaman berupa gesekan atau tahanan udara tidak diperhitungkan, sehingga amplitudo getaran bebas tetap konstan terhadap waktu. Pada kenyataan, amplitudo semakin mengecil seiring waktu sehingga getaran teredam secara bertahap. Demikian juga dengan getaran tak teredam terpaksa, secara teori amplitudo getaran dapat berlangsung tanpa batas

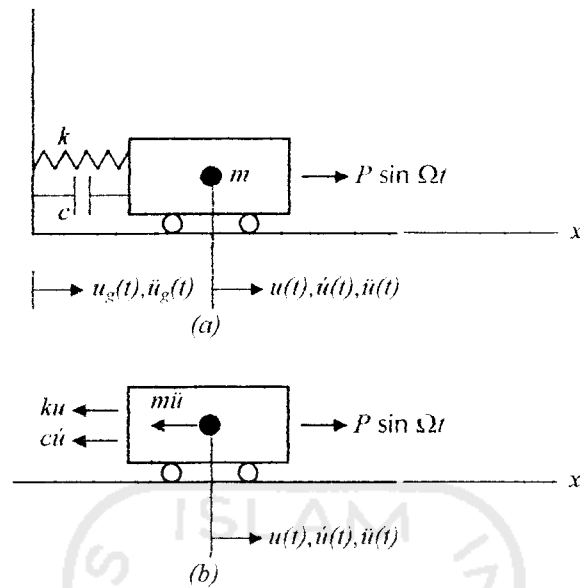
waktu. Walaupun pada kenyataan, terlihat karena pengaruh redaman selalu ada, batas amplitudo dari respons status tetap, bahkan pada resonansi juga ada.

Untuk mendekati keadaan nyata, gaya redaman haruslah diperhitungkan. Gaya ini dapat ditimbulkan oleh beberapa sebab, seperti gesekan antara permukaan licin atau kering, tahanan cairan atau udara, impedansi listrik, gesekan dalam akibat ketidaksempurnaan elastisitas bahan, dan lain-lain. Dari semua sumber energi disipasi ini, kasus dengan gaya redaman sebanding dengan kecepatan, disebut redaman viskos.

Gambar 2.8 memperlihatkan sistem berderajat kebebasan tunggal yang memiliki redaman viskos dalam bentuk peredam. Dengan menganggap cairan viskos pada *dashpot* menahan gerakan sistem sebanding dengan kecepatan sistem, dapat diturunkan persamaan homogen untuk getaran bebas sebagai

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.12)$$

koefisien c pada persamaan ini menunjukkan konstanta redaman, yang berdimensi gaya per satuan kecepatan. Pada diagram *free-body* sebagian, gaya redaman bekerja pada arah berlawanan dengan kecepatan.



Gambar 2.8 (a) Pengaruh Redaman pada sistem berderajat kebebasan tunggal;

(b) Diagram *free-body* sebagian.

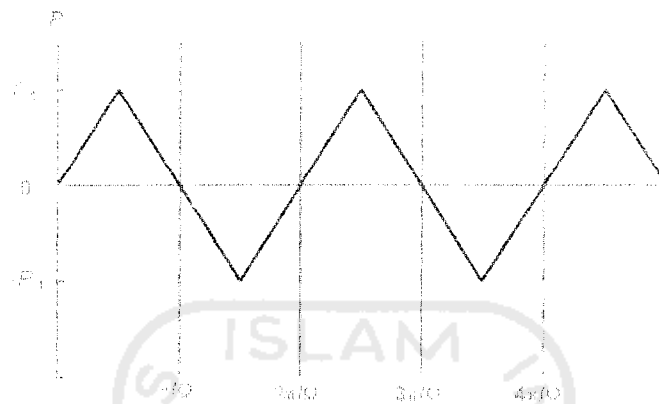
4. Fungsi gaya periodik

Segala bentuk beban dinamis periodik yang lebih rumit daripada fungsi harmonis sederhana $P \sin \Omega t$ (atau $P \cos \Omega t$), dapat dinyatakan dengan seri trigonometri (seri Fourier), sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 P(t) &= a_0 + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos \Omega t \dots + b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin \Omega t \dots \\
 &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \Omega t + b_i \sin \Omega t)
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Periode gaya adalah $T_f = 2\pi/\Omega$ dan simbol a_0 , a_i , dan b_i adalah konstanta yang ditentukan.

Gambar 2.9 menunjukkan sebuah contoh fungsi gaya periodik berupa fungsi segitiga periodik dengan periode $T_f = 2\pi/\Omega$.



Gambar 2.9 Fungsi segitiga periodik.

5. Fungsi gaya sembarang

Fungsi gaya sembarang adalah berupa beban dinamis yang tidak mempunyai bentuk periodik dan dapat berubah setiap waktu. Gambar 2.10 menunjukkan fungsi gaya umum $P(t')$ yang dinyatakan dalam variabel waktu baru t' . Nilai t' lebih kecil daripada t , yang merupakan waktu saat respons dihitung. Jika fungsi ini diterapkan pada sistem berderajat kebebasan tunggal teredam, persamaan diferensial gerakan menjadi

$$m\ddot{u} + k\dot{u} + cu = P(t') \quad (2.14)$$

Pada sembarang waktu t' , dapat dihitung beda impuls $P dt'$, sebagaimana terlihat pada Gambar 2.10. Impuls ini berpengaruh terhadap massa m berupa pertambahan tiba-tiba dalam kecepatan dan diberikan oleh

$$du = \frac{P dt'}{m} = p_m dt' \quad (2.15)$$

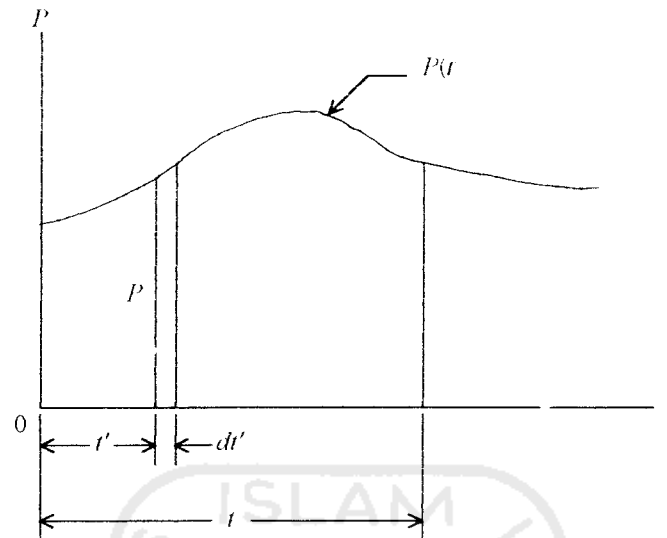
Persamaan (2.15) berlaku terhadap gaya lain (seperti gaya pegas) yang dapat diterapkan pada massa, anjakan dan kecepatan pada waktu t' . Dengan menganggap beda kecepatan sebagai kecepatan awal pada waktu t' , diperoleh beda anjakan dari massa pada waktu t berikutnya sebagai

$$du = e^{-\gamma(t-t')} \frac{p_m dt'}{\omega_d} \sin \omega_d(t-t') \quad (2.16)$$

Mengingat tiap beda impuls antara $t' = 0$ dan $t' = t$ mempunyai sebuah pengaruh, dapat ditentukan anjakan total akibat gaya dengan integrasi berikut ini.

$$u = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_d} \int_0^t e^{\gamma t'} p_m \sin \omega_d(t-t') dt' \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) dikenal sebagai integral Duhamel.



Gambar 2.10 Fungsi gaya sembarang.

6. Perhitungan respons struktur

Untuk menyelesaikan persamaan gerakan terredam maupun tak terredam guna memperoleh respons struktur akibat pengaruh-pengaruh dinamis sebagaimana diterangkan di atas, dapat dilakukan dengan cara (Weaver, 1987) *Normal Mode*, *Component Mode* (khusus untuk struktur rangka), dan Integrasi Numerik Langsung. Hal yang menguntungkan dari cara yang disebut terakhir adalah dapat digunakan baik untuk struktur linier maupun struktur nonlinier, sedangkan cara pertama hanya dapat digunakan pada struktur bersifat linier saja.

Persamaan gerakan baik untuk sistem berderajat kebebasan tunggal maupun sistem berderajat kebebasan banyak, merupakan persamaan non homogen berderajat 2 (*second order equation*). Dengan demikian, penyelesaian persamaan ini harus menerapkan cara-cara integrasi untuk persamaan non

homogen berderajat 2. Terdapat banyak cara integrasi yang tersedia untuk penyelesaian persamaan gerakan ini, antara lain (Weaver, 1987) Integrasi Romberg, Integrasi Gauss-Legendre, Ekstrapolasi dengan Persamaan Eksplisit, Iterasi dengan Persamaan Implisit, Ekstrapolasi Linier Langsung, dan *Newmark's Generalized Acceleration Method*.

Cara yang disebutkan terakhir dikembangkan oleh Nathan M. Newmark dalam makalah yang diterbitkan oleh ASCE, dan lazim disebut sebagai metode Newmark- β . Cara ini mempunyai dua varian yaitu metode Wilson- θ dan metode Hilber- α . Untuk memperoleh respons struktur, dalam Tugas Akhir ini digunakan metode Newmark- β dengan varian Hilber- α .

