2.2.1.3 Sifat Penjumlahan

Teorema 2.2.1.3 :

Jika $x_i(i = 1,2,...,k)$ adalah variabel random yang saling independen dan masing-masing berdistribusi Chi Kuadrat dengan derajat bebas sama dengan n_i, maka $\sum_{i=1}^{k} x_i$ berdistribusi Chi Kuadrat dengan derajat bebas $\sum_{n=1}^{i} n_i$.

Bukti :

Dimuka sudah diperoleh bahwa fungsi pembangkit momen dari x_i adalah

$$M_{x_i}(t) = (1-2t)^{-n_i/2} \quad ; \; i = 1, 2, ..., k$$

Karena masing-masing x_i saling independen, maka fungsi pembangkit momen dari $\sum_{i=1}^{k} x_i$ adalah :

$$\begin{aligned} M_{\sum_{i=1}^{k} x_i}(t) &= M_{x_1}(t) M_{x_2}(t) ... \; M_{x_k}(t) \\ &= (1-2t)^{-n_1/2} (1-2t)^{-n_2/2} ... \; (1-2t)^{-n_k/2} \\ &= (1-2t)^{-\sum_{i=1}^{k} n_i/2} \end{aligned}$$

yang ternyata merupakan fungsi pembangkit momen distribusi Chi Kuadrat dengan derajat bebas $\sum_{i=1}^{k} n_i$, maka diperoleh bahwa $\sum_{i=1}^{k} x_i$ berdistribusi Chi Kuadrat dengan derajat bebas $\sum_{i=1}^{k} n_i$. Dari sifat penjumlahan diatas, maka dapat diturunkan beberapa akibat sebagai berikut :

1. Jika x adalah variabel random berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2, maka $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ adalah variabel random berdistribusi N (0,1)

tersebut tidak dijumpai dalam $\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)$. Lebih lanjut jika digunakan estimator tak bias untuk σ^2 yaitu $\hat{s}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$, karena adanya hubungan $ns^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (n-1)\hat{s}^2$, maka didapatkan $\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2}$ berdistribusi $\chi^2_{(n-1)}$

2.2.1.4 Grafik Fungsi Distribusi

Pertama-tama akan dicari untuk nilai x yang manakah fungsi distribusi Chi Kuadrat f(x) akan mencapai nilai ektrem. Dari distribusi Chi Kuadrat diperoleh :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-(\frac{1}{2})x}x^{(\frac{1}{2})n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-(\frac{1}{2})x}x^{(\frac{1}{2})n-1}\left[\frac{\frac{1}{2}n-1}{x}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= f(x)\left[\frac{\frac{1}{2}n-1}{x}-\frac{1}{2}\right] \qquad \text{.........(2.7)}$$

Harga ektrem dicapai jika $f'(x)=0$, sehingga dari (2.7) diperoleh:

$$\frac{\frac{1}{2}n-1}{x}-\frac{1}{2}=0$$

$$x = n-2 \qquad \text{.........(2.8)}$$

Kemudian dicari harga $f''(x)$, diperoleh :

- Grafik f(x) mencapai maksimum untuk $x = (n-2)$.

Seperti pada fungsi kepadatan probabilitas yang lain, luas daerah dibawah grafik Chi Kuadrat menunjukkan probabilitas. Tabel dari distribusi Chi Kuadrat dapat dibuat dalam bentuk detail (lengkap) seperti pada tabel distribusi Normal Standar, tetapi karena untuk nilai derajat bebas yang berbeda, maka tabel yang detail seperti tersebut tidaklah praktis. Tabel terlampir sudah memadai untuk tujuan praktis. Pada tabel tersebut kolom pertama menunjukkan derajat bebas sedangkan baris pertama menunjukkan tingkat signifikansi. Untuk derajat bebas n dan tingkat signifikansi α, maka dari tabel tersebut dapat diperoleh harga $P(\chi^2 \geq \chi^2_{(n,\infty)})$. Tabel distribusi Chi Kuadrat dapat dilihat pada lampiran 3.

➤ ***Skewness* Dan Kurtosis**

Disini akan dicari skewness untuk memperoleh gambaran tentang grafiknya. Dengan menggunakan koefisien korelasi Karl Pearson, *skewness* dari distribusi Chi Kuadrat adalah :

$$\textit{Skewness} = \frac{\text{mean} - \text{modus}}{\text{standar deviasi}} = \frac{n-(n-2)}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Karena *skewness* > 0 untuk $n \geq 1$, maka distribusi Chi Kuadrat dikatakan mempunyai *skew* positif dalam arti grafik condong kekiri. Lebih jauh karena *skewness* berbanding terbalik dengan akar derajat bebas, maka untuk n (derajat bebas) yang semakin besar grafik distribusi Chi Kuadrat akan semakin mendekati bentuk simetri. Akhibatnya jika $n \to \infty$, distribusi Chi Kuadrat akan semakin mendekati distribusi Normal. Sebagai

2.2.2.2 Sifat Penjumlahan

Teorema :

Jika $y_i (i = 1,2,...,k)$ adalah variabel random independen yang berdistribusi Chi Kuadrat Tidak Terpusat masing-masing dengan derajat bebas n_i dan parameter ketidakterpusatan λ_i, maka $\sum_{i=1}^{k} y_i$ berdistribusi Chi Kuadrat Tidak Terpusat dengan derajat bebas $\sum_{i=1}^{k} n_1$ dan parameter ketidakterpusatan $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Bukti :

Fpm dari y_i adalah $M_{y_i}(t) = (1-2t)^{-(\frac{1}{2})n_i} \exp(\frac{2\lambda_i t}{(1-2t)})$

karena y_i saling independen, maka:

$$M_{\sum_{i=1}^{k} y_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{y_i}(t)$$

$$= (1-2t)^{-\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2})n_i} \exp(\frac{2\sum_{i=1}^{k} \lambda_i t}{(1-2t)})$$

Yang merupakan fpm dari distribusi Chi Kuadrat Tidak Terpusat dengan derajat bebas $\sum_{i=1}^{k} n_i$ dan parameter ketidakterpusatan $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, maka $\sum_{i=1}^{k} y_i$ berdistribusi $\chi'^2_{(\sum_{i=0}^{k} n_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i)}$