ANALISIS KORELASI KANONIK DAN TERAPANNYA

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Melaksanakan
Tugas Akhir Pada Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jurusan Statistika

Oleh :

Nama	**: Maya Damayanti**
No.Mhs	**: 97 611 002**
NIRM	**: 970051013206120002**

JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETEHUAN ALAM
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
JOGJAKARTA

2003

ANALISIS KORELASI KANONIK DAN TERAPANNYA

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Melaksanakan
Tugas Akhir Pada Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jurusan Statistika

Oleh :

Nama : Maya Damayanti
No.Mhs : 97 611 002
NIRM : 970051013206120002

JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETEHUAN ALAM
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
JOGJAKARTA
2003

LEMBAR PENGESAHAN PEMBIMBING

ANALISIS KORELASI KANONIK DAN TERAPANNYA

TUGAS AKHIR

Oleh :

Nama	: Maya Damayanti
No.Mhs	: 97 611 002
NIRM	: 970051013206120002

Jogjakarta, Juli 2003

Dosen Pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
(Prof.Dr.Suryo Guritno, M.Stats Ph.D)	**(Rohmatul Fajriyah M.Si)**

LEMBAR PENGESAHAN PENGUJI

Telah Dipertahankan di Depan Sidang Penguji Sebagai Salah Satu Syarat

Untuk Memperolah Gelar Sarjana S-1 pada Jurusan Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Islam Indonesia

Jogjakarta, Agustus 2003

Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Prof. Dr. Suryo Guritno, M.Stats Ph.D	....
2. Rohmatul Fajriyah M.Si	....
3. Jaka Nugraha M.Si	....
4. Edy Widodo M.Si	....

Mengatahui

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Islam Indonesia

(Jaka Nugraha, M.Si)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini Kupersembahkan kepada :

- Babeh H. Y.Nitisasmita BSc dan Ibu Hj. Nurhayati yang selalu memberikan do'a, kasih sayang dan kesabarannya.
- Kakak-kakaku : A Budi, A Dadi, A Yosef, A Yadi dan Teh Reni, terima kasih atas kasih sayangnya.
- Dessy Herpani ST, kata-katamu akan selalu kuingat.
- Keluarga besar Dede Rudi Supriadi, Mamah, Juni, Rani, terima kasih atas do'a, kebersaman, perhatian dan kasih sayangnya.
- Yudi Supriadi SE, yang selalu hadir dan singgah dalam setiap saat, pikiran dan hatiku.
- Yayu Masdianti, Meina Zehansyah, Shinta Farizatunisa, Siti Nurjanah, semoga persahabatan ini selalu tetap ada.
- Almamater dan semua sahabat-sahabatku.

HALAMAN MOTTO

- "....... Katakanlah : Apakah sama orang-orang yang berpengetahuan dengan yang tidak berpengetahuan ? Sesungguhnya orang yang berakalah yang dapat menerima pelajaran ".

(QS. Auzzmar)

- " Dan bersama kesukaran pasti ada kemudahan. Karena itu apabila selesai suatu tugas, mulailah tugas yang lain dengan sungguh-sungguh ".

(QS. Asy Syarh : 6 – 7)

- " Allah pasti akan meninggikan orang-orang yang beriman dan berpengetahuan diantara kamu beberapa derajat lebih tinggi ".

(QS. Al Mujadalah)

- " Cita-cita menghendaki perjuangan ...."
- " Perjuangan menghendaki pengorbanan ...."
- " Dan pengorbanan menghendaki kemantapan hati ...."

(Orang bijak)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Pertama-tama saya panjatkan puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas rahmat dan ridho-Nya maka penulis dapat menyelesaikan tulisan yang berjudul " Analisis Korelasi Kanonik dan Terapannya". Tulisan ini berbentuk skripsi dan wajib diselesaikan oleh para mahasiswa/i untuk memenuhi sebagaian dari syarat-syarat guna mencapai gelar kesarjanaan pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuaan Alam, Universitas Islam Indonesia.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, yang disebabkan oleh keterbatasan kemampuan yang penulis miliki juga adanya hambatan-hambatan lain yang dihadapi. Namun berkat petunjuk serta bimbingan yang berharga dari berbagai pihak akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan.

Dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas bantuan dari berbagai pihak, khususnya kepada :

1. Bapak Jaka nugraha M.Si Selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuaan Alam, Universitas Islam Indonesia.
2. Bapak Prof. Drs. Suryo Guritno, M.Stats Ph.D selaku pembimbing pertama
3. Ibu Rohmatul Fajriyah M.Si selaku pembimbing kedua dan Ketua Jurusan Fakultas MIPA, Universitas Islam Indonesia, yang telah memberikan

kesempatan, pengarahan serta bimbingan dengan penuh kesabaran kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

4. Bapak Edy Widodo, M. Si selaku Pembantu Dekan II dan dosen Pembimbing Akademik.
5. Ade-ku Adhari Donora, makasih atas dukungan dan keceriaannya.
6. Teman-teman Statistika'97 : Sadarrudin, Fakhriwan, Desi Istiqomah atas kebersamaannya.
7. Yayu Masdianti, Meina Zehansyah dan Shinta Farizatunisa, jangan lupa untuk membangun kampung halaman!
8. Keluarga besar "Wisma Mawar" Siti Nurjanah, Emma Jumatus Salamah, Sri Hastuti Wijayanti, Aprilia, Vita, Ari, Sopie, Anita dan sahabat-sahabatku Tomi Usiba, Ayub, Pahlawan, Mas Amar (Marcell), Mas Rinto terima kasih untuk saat-saat terindah bersama kalian dalam suka dan duka.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT menganugrahkan balasan yang lebih baik kepada semua pihak yang telah membantu penyelasaian Tugas Akhir ini.

Akhir kata penulis mohon maaf apabila ada kekurangan dan kesalahan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Penulis berharap agar hasil dari tugas akhir ini dapat bermanfaat untuk semuanya.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Jogjakarta, 2003

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAKSI

Analisis Korelasi Kanonik merupakan salah satu metode analisis statistik peubah ganda. Dalam analisis ini korelasi kanonik yang dihasilkan merupakan korelasi antara dua buah peubah kanonik. Peubah kanonik adalah peubah baru yang merupakan kombinasi linier dari peubah-peubah asal berdasarkan data yang ada.

Untuk mendapatkan hasil yang lebih memuaskan, maka perlu dilakukan pengujian terhadap korelasi kanonik. Pengujian korelasi ini membutuhkan asumsi yang harus dipenuhi, yaitu asumsi normal peubah ganda.

Sedangkan interpretasi yang dilakukan tidak semata-mata berdasarkan korelasi kanonik dan bobot kanoniknya melainkan juga dilakukan terhadap turunan dari analisis ini, yaitu beban kanonik, beban silang, proporsi keragaman yang dapat diterangkan, dan koefisien redundansi.

Dari data yang digunakan sebagai contoh terapan analisis korelasi kanonik ini, dapat disimpulkan bahwa semakin rendahnya rata-rata lamanya sekolah (tingkat pendidikan semakin rendah) dan rendahnya pengeluaran rata-rata perkapita sebulan maka akan semakin tinggi angka kematian bayi. Sedangkan angka harapan hidup, persalinan ditolong dokter atau bidan (kesadaran untuk bersalin ke dokter atau bidan), dan balita berstatus gizi baik akan semakin menurun.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam analisis statistik, sering ditemui permasalahan-permasalahan yang menyangkut banyak peubah. Masalah yang paling sederhana adalah masalah yang hanya terdiri dari satu peubah. Dan analisis yang dapat digunakan untuk menggambarkan peubah ini antara lain adalah ukuran-ukuran pemusatan seperti rata-rata, median, dan modus serta ukuran sebaran seperti variansi, simpangan baku dan koefisien variansi.

Untuk permasalahan yang terdiri dari dua peubah, metode yang mungkin untuk menyelidiki hubungan keduanya antara lain model regresi sederhana maupun polinomial, korelasi sederhana, dan analisis variansi. Sedangkan hubungan yang terjadi antara satu peubah yang tidak bebas dengan banyak peubah bebas dapat diselidiki melalui model regresi berganda, korelasi sederhana maupun korelasi parsial dan analisis variansi.

Selain itu, terkadang ditemui masalah yang berhubungan dengan beberapa himpunan peubah. Metode-metode analisis diatas sebenarnya masih dapat digunakan untuk menyelidiki hubungan antara peubah ini. Tetapi analisis tersebut menjadi tidak efisien dengan banyaknya model dan peubah. Selain itu metode tersebut menjadi tidak dapat mengungkapkan hubungan yang lebih rumit antar himpunan peubah tersebut. Untuk mengatasi masalah tersebut, maka digunakan metode lain yaitu analisis peubah ganda (*multivariate analysis*). Analisis ini mampu menyelidiki hubungan yang rumit antar himpunan peubah dengan peubah baru yang lebih sederhana. Analisis peubah ganda ini antara lain adalah analisis komponen utama (*pricipal component analysis*), analisis faktor (*faktor analysis*), analisis diskriminan (*discriminant analysis*), analisis gerombol (*cluster analysis*), analisis regresi linier ganda (*multivariate linier regression*), regresi polinom peubah ganda, analisis variansi peubah ganda, dan analisis korelasi kanonik (*canonical corelation analysis*).

Analisis korelasi kanonik merupakan analisis yang mampu menyederhanakan korelasi yang berdimensi banyak menjadi kombinasi-kombinasi linier peubah asli yang mudah dipahami. Analisis ini menjelaskan pasangan-pasangan kombinasi linier yang representatif dari setiap himpunan peubah. Selain itu analisis korelasi kanonik mengungkap korelasi antar pasangan kombinasi linier tersebut.

1.2. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

a. Untuk mengetahui korelasi yang berdimensi banyak menjadi kombinasi-kombinasi linier peubah asli yang mudah dipahami.
b. Untuk mengetahui hubungan antara Indikator Sosial Ekonomi dengan Indikator Kesehatan dan Gizi.

1.3. Manfaat

Dari penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat bermanfaat untuk menambah pengetahuan dan pemahaman tentang analisis korelasi kanonik beserta bentuk aplikasinya.

1.4. Rumusan Masalah

a. Bagaimanakah menyederhanakan korelasi yang berdimensi banyak menjadi kombinasi-kombinasi linier peubah asli yang mudah dipahami.

b. Bagaimanakah hubungan antara Indikator Sosial Ekonomi dengan Indikator Kesehatan dan Gizi.

1.5. Ruang Lingkup

Penulisan skripsi ini dibatasi pada pembahasan analisis korelasi kanonik antara dua himpunan peubah saja, sehingga masalah tentang korelasi kanonik parsial maupun biparsial tidak akan dibahas dalam skripsi ini. Selain itu skripsi ini mengkhususkan pembahasan metode analisis korelasi kanonik dengan data yang linier antar peubah.

Dalam penerapannya, data yang digunakan terbatas pada data yang telah memenuhi asumsi-asumsi yang diperlukan dalam analisis korelasi kanonik.

1.6. Sistematika Penulisan

Tulisan ini membahas analisis korelasi kanonik. Adapun urutan penulisan dalam pembahasan ini adalah sebagai berikut :

BAB I	:	Pendahuluan, berisi uraian latar belakang penulisan mengenai analisis korelasi kanonik, ruang lingkup, tujuan, manfaat, rumusan masalah dan sistematika penulisan.
BAB II	:	Teori Pendukung, mengandung penjelasan secara terperinci mengenai teori-teori pendukung yang digunakan sebagai landasan untuk pemecahan permasalahan.
BAB III	:	Analisis Korelasi Kanonik, berisi tentang perkembangan dan terapan analisis korelasi kanonik, konsep dasar, pengujian korelasi kanonik dan metode analisis atau interpretasinya.
BAB IV	:	Terapan Analisis Korelasi Kanonik, merupakan uraian tentang hasil output komputer kemudian dilakukan pembahasan hasil pengolahan data dari output komputer tersebut.
BAB V	:	Penutup, merupakan bab terakhir yang berisikan kesimpulan yang diperoleh dari analisis pemecahan masalah serta saran-saran.
LAMPIRAN	:	Digunakan untuk menjelaskan data atau keterangan lain yang sifatnya terlalu terperinci untuk dimuat di bagian utama skripsi, misalnya data hasil output komputer.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Tujuan penyusunan bab ini adalah menyajikan teori-teori dasar yang berkaitan dengan penurunan teori tentang analisis korelasi kanonik. Meskipun demikian, bab ini tidak menjelaskan secara rinci teori-teori dasar tersebut dengan anggapan bahwa teori ini telah cukup memberikan gambaran tentang dasar-dasar penyusunan teori korelasi kanonik.

2.1. Pengantar Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Matrik adalah suatu daftar bilangan yang disusun dalam sebuah empat persegi panjang di dalam baris-baris dan kolom-kolam, dan ditempatkan dalam kurung. Pada umumnya matriks dilambangkan dengan huruf besar. (Madyana A.M.2000).

Kumpulan m x n skalar, misalkan dalam bentuk angka, yang tersusun secara terurut menjadi m baris dan n kolom persegi empat disebut matriks X berorde m x n bila dapat ditulis dengan:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Matriks diatas dapat juga ditulis dalam bentuk $X = (X_{ij})$; $i = 1,2,..,m$ $j = 1,2,..,n$ dimana i menunjukan baris dan j menunjukan kolom.

2.1.2 Operasi Matriks

2.1.2.1 Definisi Operasi Penjumlahan dan Perkalian

Dua buah matriks X dan Y dengan orde yang sama mempunyai sifat penjumlahan yang didefinisikan dengan:

$$X + Y = (x_{ij}) + (y_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij}) \tag{2.2}$$

untuk semua i dan j. Perkalian skalar c dengan matriks X didefinisikan :

$$cX = Xc = (cx_{ij}) \tag{2.3}$$

Dua buah matriks X dan Y dapat dikalikan yang menghasilkan matriks baru $Z = XY$ dengan syarat banyaknya kolom X sama dengan banyaknya baris Y, misalnya :

$X = (x_{ij})$

$Y = (y_{jk})$; $i = 1,2,..,m$ $\quad j = 1,2,..,n$ $\quad k = 1,2,..,l$

Maka matriks dengan ordo mx l :

$$Z = (z_{ik}) = (x_{ij})(y_{jk}) \tag{2.4}$$

Contoh :

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & \cdots & x_{2n}+y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1}+y_{m1} & x_{m2}+y_{m2} & \cdots & x_{mn}+y_{mn} \end{pmatrix}$$

$$XY = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + .. + x_{1n}y_{m1} & x_{12}y_{12} + x_{12}y_{22} + .. + x_{1n}y_{m2} & \cdots & x_{11}y_{1n} + x_{12}y_{2n} + .. + x_{1n}y_{mn} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} + .. + x_{2n}y_{m1} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} + .. + x_{2n}y_{m2} & \cdots & x_{21}y_{1n} + x_{22}y_{2n} + .. + x_{2n}y_{mn} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}y_{11} + y_{m2}y_{21} + .. + x_{mn}y_{m1} & x_{m1}y_{12} + x_{m2}y_{22} + .. + x_{mn}y_{m2} & \cdots & x_{m1}y_{1n} + x_{m2}y_{2n} + .. + x_{mn}y_{mn} \end{pmatrix}$$

2.1.2.2 Definisi Transpose Matriks

Transpose matriks X adalah pertukaran elemen-elemen baris dengan elemen-elemen kolom dalam matriks X dengan simbol X' maka :

$$X' = (X_{ji}) \;;\; i = 1,2,..,m \qquad j = 1,2,..,n$$

atau

$$X' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Operasi transpose matriks memiliki sifat-sifat :

a. $(X')' = X$ (2.6)

b. $(X + Y)' = X' + Y'$ (2.7)

c. $(XY)' = Y'X'$ (2.8)

2.1.2.3 Definisi Matriks Bujursangkar

Matriks bujursangkar adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Matriks X disebut matriks bujursangkar berorde n bila banyaknya baris dan kolom n.

2.1.2.4 Definisi Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang elemen-elemen diagonal matriksnya x_{ij} ; $i = j$ minimal satu tidak sama dengan nol, sedangkan elemen-elemen selain diagonal matriks, x_{ij} ; $i \neq j$ sama dengan nol.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

2.1.2.5 Definisi Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang seluruh elemen-elemen diagonalnya bernilai satu.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

2.1.2.6 Definisi Determinan

Untuk setiap matriks bujur sangkar bertipe n x n kita kaitkan tunggal satu bilangan nyata yang dinyatakan *determinan*. Untuk matriks X kita lambangkan determinannya dengan *det X* atau $|X|$.

$$|X| = x_{11} \qquad \text{, bila } n = 1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\ |X|\ (-1)^{1+j} \qquad \text{, bila } n > 1$$

Dimana X_{1j} adalah matriks bertipe (n-1)(n-1) yang didapat dari matriks X dengan menghilangkan baris ke-1 kolom j. (Minor baris i kolom j). Disebut ekspansi menggunakan baris ke-1.

$$|X| = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ |X_{ij}|\ (-1)^{i+j}\ . \tag{2.11}$$

Ekspansi menggunakan baris ke-i. X_{ij} didapat dari matriks X dengan menghilangkan baris ke-i kolom ke-j. (Minor baris i kolom j).

Contoh :

1. $|X| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}(-1)^2 + x_{12}x_{21}(-1)^3 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

2. $|X| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}(-1)^2 + x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}(-1)^3 + x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}(-1)^4$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{3_2}$$

Sifat-sifat dasar determinan :

a. Jika c suatu skalar maka $|cX| = c^p|X|$ (2.12)

b. $|X| = |X'|$ (2.13)

c. $|XY| = |X||Y|$ (2.14)

2.1.2.7 Definisi Invers Matriks

Jika $|X| \neq 0$, maka akan terdapat matriks Y sehingga $XY = I$. Matriks Y disebut invers dari matriks X yang dinotasikan dengan X^{-1}.

Persamaannya adalah $x_{ij} = \frac{X_{ji}}{X}$

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|} X^{+} \tag{2.15}$$

dimana X^{+} disebut adjoint matriks X. Kenyataan bahwa X^{+} merupakan transpose matriks X dengan menggantikan semua elemen x_{ij} dengan kofaktor X_{ij}.

Sifat-sifat matriks invers :

1. Untuk suatu skalar c , $(cX)^{-1} = c^{-1}X^{-1}$ (2.16)
2. $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ (2.17)
3. Matriks bujur sangkar X_{nxn} mempunyai suatu invers jika dan hanya jika ia tak-singuler. (2.18)

2.1.2.8 Definisi Matriks Ortogonal

Matriks bujursangkar X dikatakan ortogonal jika $XX' = I$ dimana I adalah matriks identitas.

Sifat-sifat matriks ortogonal :

1. $X^{-1} = X'$ (2.19)
2. $|X| = \pm 1$ (2.20)

3. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} x_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} = 0$ (2.21)

4. $\sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_{ij}}^2 = 1$ (2.22)

2.1.2.9 <u>Definisi Akar Ciri dan Vektor Ciri</u>

Akar-akar ciri dari matriks bujursangkar X didefinisikan sebagai akar-akar persamaan determinan $|X - \lambda I| = 0$ (2.23)

Akar-akar ciri tersebut dinotasikan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Persamaan (2.23) mengakibatkan matriks $X - \lambda_i I$ dikatakan singular sehingga :

$$X\gamma = \lambda_i \gamma \qquad (2.24)$$

Vektor γ yang memenuhi persamaan (2.24) disebut dengan vektor ciri dari matriks X terkait dengan akar ciri λ_i.

Contoh :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka : $|X - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 8 = 0$

Jadi nilai-nilai karekteristik dari X adalah akar-akar persamaan $(1-\lambda)\,(2-\lambda) - 8 = 0$,

yaitu : $(1-\lambda)(2-\lambda)-8=0$

$\lambda^2-3\lambda+2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=2$

Untuk $\lambda_1=1$, sistem persamaan diatas menjadi:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)x + 2y = 0\lambda$

$4x + (2-\lambda)y = 0$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow (1-1)x + 2y = 0 \rightarrow 2y = 0$

$4x + (2-\lambda)y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$

- $Y = -\frac{4}{3}x$, *untuk* $\lambda_1=1$ vektor cirinya adalah : $\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{4}{3}x \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \rightarrow (1-2)x + 2y = 0 \rightarrow -x + 2y = 0$

$4x + (2-\lambda)y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$

- $Y = -\frac{3}{2}x$, *untuk* $\lambda_2=2$ vektor cirinya adalah : $\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x \end{pmatrix}$

2.1.2.10 Definisi Bentuk Kuadrat

Bentuk kuadratik $Q(\alpha)$ dalam variabel-variabel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ adalah $Q(\alpha) = \alpha' X \alpha$ dimana $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ dan X matriks simetris. Untuk Y matriks simetris bentuk kudratik $Q(\beta)$ dalam variabel-variabel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ adalah $Q(\beta) = \beta' Y \beta$ dimana $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q)$.

2.1.2.11 Definisi Matriks Simetris

Suatu matriks bujur sangkar $X = (x_{ij})$ disebut matriks simetris jika $X = X'$. Jadi matriks bujur sangkar $X = (x_{ij})$ adalah simetris jika $x_{ij} = x_{ji}$; untuk setiap i dan j.

2.1.2.12 Definisi Rank Matriks

Bila X adalah matriks $m \times n$ diambil sejumlah s baris (dimana $s \leq m$) dan t kolom (dimana $t \leq n$) maka matriks baru adalah sub-matriks yang dapat menjadi minor matriks X.

Misal X adalah matriks 5 x 5, dapat menghasilkan minor matriks 3 x 3, yaitu :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Rank adalah maksimum dari jumlah angka dalam baris serta kolom yang menghasilkan matriks determinan yang tidak singular (*non-singular matriks*).

2.2. Matriks Varian-Kovarians

3.2.1. Matriks Varians-Kovarians Berdasarkan Data Populasi.

Pada data populasi dengan N elemen yang terdiri dari dua peubah, x_1 dan x_2, kovarians kedua peubah tersebut adalah σ_{12} yang dinyatakan dengan :

$$\sigma_{12} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{1i} - \mu_1)(x_{2i} - \mu_2) \tag{2.25}$$

atau

$$\sigma_{12} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}\right) \tag{2.26}$$

dimana μ_i adalah rata-rata populasi untuk peubah x_i. Apabila peubah $x_1=x_2=x$ maka persamaan (2.23) merupakan varians peubah x dengan simbol σ_{xx} . Matriks varians-kovarians dari populasi berukuran N dengan peubah acak sebanyak p yaitu $x_1, x_2, .., x_p$ diberi simbol Σ_{xx} dinyatakan dengan :

$$\sum_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2p} \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \ldots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

3.2.2. Matriks Varians-Kovarians Berdasarkan Data Sampel.

Misalkan terdapat data dari suatu sampel sebanyak n yang terdiri dari dua peubah acak, X_1 dan X_2 maka penduga likelihood maksimum kovarians populasi adalah :

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \tag{2.28}$$

dimana $\bar{X}_i$ adalah penduga likelihood maksimum parameter μ_i .

Sedangkan penduga tak bias kovarians populasi dari X_1 dan X_2 berdasarkan penduga likelihood maksimum dengan simbol s_{12} dapat dinyatakan dengan :

$$s_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \tag{2.29}$$

atau

$$s_{12} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \right) \tag{2.30}$$

dimana $\overline{X}_i$ adalah rata-rata sampel untuk X_i. sebagaimana pada data populasi, untuk peubah $X_1 = X_2 = X$ kovarians pada persamaan (2.28) atau persamaan (2.29) dinyatakan sebagai varians sampel peubah X_1 dengan simbol $s_{11} = s_{22} = s_{xx}$.

Untuk dapat sampel berukuran n yang terdiri dari p peubah acak $X_1, X_2, .., X_p$ maka varians dan kovarians peubah tersebut dapat disusun menjadi sebuah matriks yang disebut matriks varians-kovarians dengan simbol S_{xx}.

$$S_{xx} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Matriks varians-kovarians baik berdasarkan data sampel maupun data populasi merupakan matriks bujursangkar yang simetris. Karena untuk setiap elemen matriks tersebut $s_{12} = s_{21}$ atau $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

2.3. Matriks Korelasi

Korelasi menyatakan keeratan hubungan linier dua peubah. Besarnya angka korelasi berkisar antara -1 sampai 1. Bila korelasi mendekati nol menunjukkan bahwa hubungan kedua peubah tersebut lemah. Korelasi nol berarti tidak ada hubungan antara kedua peubah. Sementara bila korelasi sama dengan 1 dan -1 menunjukkan hubungan sempurna antara kedua peubah.

2.3.1. Matriks Korelasi Berdasarkan Data Populasi.

Dari persamaan (2.23) korelasi antara dua peubah X_1 dan X_2 berdasarkan data populasi dengan simbol ρ_{12} dapat dinyatakan dengan rumus :

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{1_i} - \mu_1)(x_{2_i} - \mu_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{1_i} - \mu_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{2_i} - \mu_2)^2}} \tag{2.32}$$

Dalam matriks korelasi dengan p peubah acak $X_1, X_2,.., X_p$ berdasarkan data populasi adalah :

$$P_{xx} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & \rho_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

atau

$$P_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

karena korelasi ρ_{ii} merupakan korelasi suatu peubah dengan peubah itu sendiri sama dengan satu.

2.3.2. Matriks Korelasi Berdasarkan Data Sampel.

Dengan cara yang sama, korelasi antara dua peubah X_1 dan X_2 berdasarkan data sampel dapat dinyatakan dengan :

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}} \tag{2.35}$$

jadi matriks korelasi berdasarkan data sampel dengan p peubah acak $X_1, X_2, .., X_p$ dengan simbol R_{xx} dinyatakan dengan :

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

atau

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

2.4. Metode Pemaksimuman Fungsi

Teorema Pengganda Lagrange

Maksimumkan $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .Dengan kendala :

$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$

$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$

$g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$

$$\text{Solusi : } L = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \varphi_j g_j(x) \tag{2.38}$$

Dimana L = Lagrangean

φ_i = Pengganda Lagrange

Fungsi tersebut akan maksimum bila :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\varphi_j = 0 \,;\, g_j < 0 \text{ atau } g_j = 0 \,;\, \varphi_j \geq 0 \,;\, j = 1, 2, \dots, r \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L^2}{\partial x_1^2} \geq 0$$

2.5. Metode Pengujian Asumsi Normal Peubah Ganda

Dalam banyak model statistik, seringkali model yang dibuat menggunakan asumsi bahwa sampel yang digunakan berasal dari populasi yang mengikuti sebaran normal. Untuk menguji apakah suatu data berasal dari populasi yang mengikuti sebaran normal, dapat digunakan metode pengujian statistik non parametrik. Metode pengujian terhadap asumsi sebaran ini diperkenalkan oleh Kolmogorov (1933), Lilliefors (1967), Shapiro Wilk dan Chen (1960). Dari ketiga metode tersebut pengujian Shapiro Wilk merupakan metode yang terbaik, karena memiliki kuasa uji yang paling baik (Conover, 1980).

Metode pengujian diatas hanya berlaku untuk menguji asumsi sebaran normal satu peubah (*univariate*). Pengujian asumsi kenormalan dari peubah-peubah asal terhadap setiap peubah yang terdapat dalam model peubah ganda tidak dapat dikatakan menguji kenormalan peubah ganda. Sampai saat ini belum ditemukan metode pengujian yang digunakan secara khusus untuk menguji asumsi normal peubah ganda.

Beberapa penulis hanya melakukan perluasan metode pengujian dengan memenfaatkan metode pengujian dengan satu peubah, seperti Malkovich dan Afifi (1973), Gnanadesikan (1977), Small (1980), Cox dan Small (1978) memanfaatkan sifat bahwa untuk sebaran normal peubah ganda, regresi dari satu peubah terhadap peubah-peubah yang lain adalah linier. Henster dan Mehrotra, dan Michalek (1977), menyajikan pengujian normal peubah ganda berdasarkan sebaran bersyarat Mardia dan Foster (1983) menggunakan ukuran-ukuran kemencengan (*skewness*) dan kelancipan (*kurtosis*) untuk menyusun pengujian normal peubah ganda. Srivastava dan Hui (1987) mendefinisikan ukuran kemencengan dan kelancipan peubah ganda berdasarkan komponen-komponen utama dan menyajikan grafik untuk menguji kenormalan peubah ganda. Mudholkar, Mc Dermott dan Srivastava (1992) mengadaptasi uji Z untuk kenormalan satu peubah yang disajikan Lin dan Mudholkar (1980) dan menyajikan statistik Z_p untuk menguji kenormalan p peubah (Mudholkar, Govind S, Deo Kumar, 1995).

Dalam skripsi ini, pengujian terhadap asumsi normal peubah ganda menggunakan metode yang dikembangkan oleh Mudholkar, Srivastava dan Lin (1995). Metode pengujian ini merupakan penyesuaian dari pengujian kenormalan satu peubah yang disajikan oleh Shapiro-Wilk diatas.

Hipotesis untuk pengujian asumsi normal peubah ganda adalah sebagai berikut:

H_0 : Data sampel berukuran n dengan k peubah berasal dari populasi yang berdistribusi normal peubah ganda.

H_1 : Data sampel berukuran n dengan k peubah tidak berasal dari populasi yang berdistribusi normal peubah ganda.

Statistik uji untuk hipotesis tersebut adalah :

$$W_F = -2\ \Sigma \ln p_i \tag{2.39}$$

W_F merupakan statistik uji yang diperoleh dari kombinasi nilai $-p$ statistik uji Shapiro-Wilk dengan metode uji kombinasi yang diperkenalkan Fisher ini digunakan karena dari beberapa metode uji kombinasi seperti Logit, Liptak, Tippet, maupun metode lain yang berdasarkan kemencengan dan kelancipan, metode ini memiliki kuasa uji yang paling kuat (Mudholkar, Srivastava dan Lin, 1995). Sementara p_i adalah nilai$-p$ untuk menguji kenormalan Shapiro-Wilk pada langkah uji ke-i. W_F mengikuti sebaran khi-kuadrat dengan derajat bebas $2k$.

Berdasarkan statistik W_F diatas, hipotesis nol untuk pengujian asumsi normal ganda akan ditolak apabila W_F lebih besar dari $\chi^2_{(\alpha,2k)}$.

Sedangkan uji kenormalan Shapiro-Wilk langkah ke-1 dilakukan terhadap peubah pertama, misalkan X_1 sehingga diperoleh nilai$-p$ yaitu p_1. Nilai$-p_2$ diperoleh dari uji Shapiro-Wilk terhadap sisaan model regresi linier dengan peubah bebas x_1 dan peubah tak bebas y_2. Selanjutnya nilai p_3 diperoleh dari pengujian kenormalan terhadap nilai-nilai sisaan model regresi linier dengan peubah tak bebas y_3 dan peubah bebas x_1 dan x_2. Prosedur ini dilanjutkan sampai diperoleh nilai p sebanyak k peubah yang terdapat dalam himpunan peubah ganda.

Uji Shapiro-Wilk untuk Kenormalan

Misalkan terhadap sampel acak berukuran n yaitu X_1, X_2,…,X_n yang mempunyai fungsi sebaran $F(x)$ yang tidak diketahui. Hipotesis untuk pengujian kenormalan dapat disusun dalam hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $F(x)$ adalah fungsi sebaran normal dengan rata-rata dan varians tertentu

H_1 : $F(x)$ adalah bukan fungsi sebaran normal

Statistik uji untuk hipotesis tersebut adalah:

$$W = \frac{1}{D}\left[\sum a_i (X^{(n-1+i)} - X^{(i)})\right]^2 \tag{2.40}$$

dimana D adalah :

$$D = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{2.41}$$

dan $\overline{X}$ adalah rata-rata sampel. Sedangkan $X^{(i)}$ merupakan order statistik yang ke-i dari data yang diurutkan mulai dari data yang terkecil sampai yang terbesar,

$X^{(1)} \le X^{(2)} \le X^{(3)} \le ...... \le X^{(n)}$. (2.42)

Dari tabel Shapiro Wilk's, untuk data sampel berukuran n, diperoleh koefisien-koefisien a_1, a_2, ... , a_k dimana k adalah nilai pendekatan $\frac{n}{2}$.

BAB III

TEORI ANALISIS KORELASI KANONIK

3.1. Penggunaan Analisis Korelasi Kanonik.

Analisis korelasi kanonik diperkenalkan pertamakali oleh Hotelling (1935-1936). Pada saat ini, metode analisis ini dikembangkan terutama pada masalah-masalah turunan dari korelasi kanonik. Seperti korelasi antar peubah asal dengan peubah kanoniknya, korelasi antara peubah asal dengan peubah kanonik silang, proporsi keragaman yang dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya dan sebagainya. Secara umum analisis korelasi kanonik merupakan teknik statistik peubah ganda yang menjelaskan hubungan antara dua himpunan peubah. Dalam penerapannya, analisis ini kebanyakan menjelaskan hubungan antara dua himpunan peubah dimana satu himpunan peubah dinyatakan sebagai himpunan peubah bebas dan himpunan peubah lain dinyatakan sebagai himpunan peubah tak bebas.

Pada analisis regresi berganda diperoleh suatu kombinasi linier dari himpunan peubah bebas yang digunakan untuk menentukan ukuran bagi satu peubah tak bebasnya. Korelasi yang diperoleh antara kombinasi linier peubah bebas dengan peubah tak bebasnya menunjukkan keeratan hubungan antara peubah tak bebas dengan kombinasi linier peubah bebasnya.

Analisis korelasi kanonik mempunyai ide yang sama dengan analisis regresi berganda tersebut. Hanya saja analisis ini menghasilkan dua kombinasi linier, yaitu kombinasi linier dari peubah bebas dan kombinasi linier dari peubah tak bebas. Dari kedua kombinasi linier tersebut akan diperoleh nilai korelasi yang sebenar-benarnya.

3.2. Konsep Dasar dan Asumsi Dalam Analisis Korelasi Kanonik.

Misalkan dalam sebuah data terdapat p peubah bebas dan q peubah tak bebas. Tanpa kehilangan sifat umum, p dianggap < atau = q . Kedua himpunan peubah tersebut dinotasikan dengan $X'=(x_1,x_2,...,x_p)$ untuk himpunan peubah bebas dan $Y'=(y_1,y_2,...,y_q)$ untuk himpunan peubah tak bebas. Ide dasar analisis korelasi kanonik adalah mencari koefisien kombinasi linier dari kedua himpunan peubah tersebut sehingga dapat disusun dalam bentuk peubah kanonik sebagai berikut :

$$X^* = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p \tag{3.1}$$

$$Y^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_qy_q \tag{3.2}$$

Korelasi antara X^* dan Y^* disebut sebagai korelasi kanonik antara himpunan peubah X dan peubah Y. Besarnya angka korelasi ini diharapkan mempunyai nilai maksimum.

Dalam terapannya, apabila analisis korelasi kanonik ini digunakan untuk menggambarkan hubungan struktural korelasi semata, maka tidak diperlukan asumsi sebaran. Artinya baik peubah bebas maupun tak bebas dapat menggunakan data dengan ukuran nominal atau ordinal. Akan tetapi apabila korelasi kanonik tersebut akan diuji, maka data dari kedua himpunan peubah itu harus diasumsikan memiliki sebaran normal peubah ganda dan mempunyai variansi yang homogen.

Apabila ternyata asumsi tersebut, tidak dipenuhi maka dilakukan transformasi terhadap data sehingga mempunyai asumsi yang dikehendaki. Selain itu Levene (1977) menjelaskan bahwa terdapat asumsi secara implisit dalam teknik analisis korelasi kanonik yaitu hubungan antar peubah bebas dan antar peubah tak bebas merupakan hubungan linier.

3.3. Model Populasi Analisis Korelasi Kanonik.

Misalkan dalam suatu populasi dengan N anggota, terdapat p peubah bebas X yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_p$, dan q peubah tak bebas Y, yaitu $y_1, y_2, \ldots, y_q$ dimana $p+q = r$. Tanpa kehilangan sifat umum analisis korelasi kanonik, asumsikan $p \leq q$ nilai harapan kedua himpunan peubah tersebut dianggap sama dengan 0 atau $E(X) = E(Y) = 0$. Sedangkan matriks varians-kovarian himpunan peubah X dan Y dapat disusun dalam bentuk :

$$\sum = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sigma_{x_{11}} & \sigma_{x_{12}} & \cdots & \sigma_{x_{1p}} & \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{x_1 y_2} & \cdots & \sigma_{x_1 y_q} \\ \sigma_{x_{21}} & \sigma_{x_{22}} & \cdots & \sigma_{x_{2p}} & \sigma_{x_2 y_1} & \sigma_{x_2 y_2} & \cdots & \sigma_{x_2 y_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x_{p1}} & \sigma_{x_{p2}} & \cdots & \sigma_{x_{pp}} & \sigma_{x_p y_1} & \sigma_{x_p y_2} & \cdots & \sigma_{x_p y_q} \\ \hline \sigma_{y_1 x_1} & \sigma_{y_1 x_2} & \cdots & \sigma_{y_1 x_p} & \sigma_{y_{11}} & \sigma_{y_{12}} & \cdots & \sigma_{y_{1q}} \\ \sigma_{y_2 x_1} & \sigma_{y_2 x_2} & \cdots & \sigma_{y_2 x_p} & \sigma_{y_{21}} & \sigma_{y_{22}} & \cdots & \sigma_{y_{2q}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{y_q x_1} & \sigma_{y_q x_2} & \cdots & \sigma_{y_q x_p} & \sigma_{y_{q1}} & \sigma_{y_{q2}} & \cdots & \sigma_{y_{qq}} \end{array}\right] \tag{3.3}$$

atau

$$\sum = \begin{bmatrix} \sum_{xx} & \sum_{xy} \\ \sum_{yx} & \sum_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Selanjutnya akan dicari kombinasi linier dari kedua himpunan peubah X dan Y yang disebut peubah kanonik, yaitu :

$$X^* = \alpha' X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_p x_p \tag{3.5}$$

$$Y^* = \beta' Y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_q y_q \tag{3.6}$$

Sehingga menghasilkan korelasi antara X^* dan Y^* sebesar-besarnya. Untuk itu diperlukan normalisasi dari peubah kanonik tersebut sehingga :

$$E(X^{*^2}) = E(\alpha' XX'\alpha) = \alpha' \sum_{xx} \alpha = 1 \tag{3.7}$$

$$E(Y^{*^2}) = E(\beta' YY'\beta) = \beta' \sum_{yy} \beta = 1 \tag{3.8}$$

Nilai harapan dari X^* dan Y^* adalah :

$$E(X^*) = E(\alpha' X) = \alpha' E(X) = \alpha'.0 = 0 \tag{3.9}$$

$$E(Y^*) = E(\beta' Y) = \beta' E(Y) = \beta'.0 = 0 \tag{3.10}$$

Maka korelasi antara : $\rho(X^*, Y^*) = \dfrac{E(X^* Y^*)}{\sqrt{E(X^{*^2})E(Y^{*^2})}} = \alpha' \sum_{xy} \beta$ (3.11)

Sehingga masalahan pencarian korelasi antara X^* dan Y^* menjadi masalah pemaksimuman persamaan (3.11) dengan syarat persamaan (3.7) dan (3.8) . Dengan metode penggandaan Lagrange permasalahan tersebut menjadi :

$$L = \alpha' \sum_{xy} \beta - \varphi_1(\alpha' \sum_{xx} \alpha - 1) - \varphi_2(\beta' \sum_{yy} \beta - 1) \tag{3.12}$$

dimana φ_1 dan φ_2 adalah pengganda Lagrange. Kemudian persamaan (3.12) diturunkan terhadap α dan β serta disamakan dengan nol, sehingga diperoleh persamaan :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{xy} \beta - 2\varphi_1 \sum_{xx} \alpha = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{xy}\alpha - 2\varphi_2\sum_{yy}\beta = 0 \tag{3.14}$$

Selanjutnya sisi kiri persamaan (3.13) dikalikan dengan α' dan sisi kiri persamaan (3.14) dikalikan dengan β' , akan menghasilkan bentuk persamaan :

$$\alpha' = \sum_{xy}\beta - 2\varphi_1\alpha'\sum_{xx}\alpha = 0 \tag{3.15}$$

$$\beta' = \sum_{xy}\alpha - 2\varphi_2\beta'\sum_{yy}\beta = 0 \tag{3.16}$$

Dengan memasukkan persamaan(3.7) dan (3.8) kedalam persamaan (3.15) dan (3.16), maka dapat dinyatakan bahwa :

$$\lambda = 2\varphi_1 = 2\varphi_2 = \alpha'\sum_{xy}\beta \tag{3.17}$$

karena $\sum_{xy} = \sum_{yx}$, persamaan (3.13) dan persamaan (3.14) dapat dalam bentuk :

$$-\lambda\sum_{xx}\alpha + \sum_{xy}\beta = 0 \tag{3.18}$$

$$\sum_{yx}\alpha - \lambda\sum_{yy}\beta = 0 \tag{3.19}$$

Persamaan (3.18) dan (3.19) dapat disusun dalam sebuah matriks persamaan :

$$\begin{bmatrix} -\lambda\Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & -\lambda\Sigma_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \tag{3.20}$$

Supaya persamaan (3.20) dapat memenuhi persamaan (3.7) dan (3.8) maka matriks yang sebelah kiri harus singular, artinya determinannya harus nol, atau

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & -\lambda\Sigma_{yy} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

Determinan matriks pada persamaan diatas merupakan persamaan polinomial dengan derajat r dan akar-akar ciri $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_r$ dimana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r$. Sebanyak *2q* akar ciri bernilai nol, $\lambda = \pm\lambda_j$, $j = 1,2,..,q$ dan *p-q* akar ciri bernilai nol. Dari persamaan (3.17), λ merupakan korelasi antara X^* dan Y^*. Jadi λ_1 merupakan korelasi terbesar antara X^* dan Y^* yang disebut korelasi kanonik pertama. Sedangkan vektor α dan β yang memenuhi persamaan (3.20) dengan $\lambda = \lambda_1$ diberi simbol $\alpha^{(1)}$ dan $\beta^{(1)}$ merupakan koefisien kombinasi linier peubah kanonik pertama, yaitu $X^{(1)} = \alpha^{(1)}X$ dan $Y^{(1)} = \beta^{(1)}Y$.

Sesuai dengan sifat matriks sebagaimana dijelaskan dalam Bab II halaman 10, maka λ_2 merupakan korelasi terbesar kedua antara X^* dengan Y^* yang disebut dengan korelasi kanonik kedua. Dan kombinasi linier peubah kanonik $X^{(2)}$ dan $Y^{(2)}$ dari vektor yang dihasilkan korelasi ini, yaitu $\alpha^{(2)}$ dan $\beta^{(2)}$ akan ortogonal dengan $\alpha^{(1)}$ dan $\beta^{(1)}$. Artinya peubah kanonik kedua $X^{(2)}$ dan $Y^{(2)}$ tidak berkorelasi dengan peubah kanonik pertama $X^{(1)}$ dan $Y^{(1)}$. Dan seterusnya untuk korelasi kanonik ke-*3*, ke-*4*, ... , ke-*q* akan saling ortogonal atau tidak berkorelasi dengan kombinasi linier peubah kanonik sebelumnya.

3.4. Analisis Korelasi Kanonik Berdasarkan Sampel.

Dalam banyak terapan, matriks varians-kovarians sebagaimana persamaan (3.3) jarang sekali ditemukan. Oleh karena itu matriks varians-kovarians populasi persamaan (3.3) diestimasi dengan penduga tak bias matriks tersebut sebagaiman persamaan (2.30), yaitu matriks varians-kovarians sampel persamaan (3.22) sebagai berikut :

$$S = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

yang merupakan bentuk sederhana matriks varians-kovarians.

$$S = \left[\begin{array}{cccc|cccc} s_{x_{11}} & s_{x_{12}} & \cdots\cdots & s_{x_{1p}} & s_{x_1y_1} & s_{x_1y_2} & \cdots & s_{x_1y_q} \\ s_{x_{21}} & s_{x_{22}} & \cdots\cdots & s_{x_{2p}} & s_{x_2y_1} & s_{x_2y_2} & \cdots & s_{x_2y_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{x_{p1}} & s_{x_{p2}} & \cdots\cdots & s_{x_{pp}} & s_{x_py_1} & s_{x_py_2} & \cdots & s_{x_py_q} \\ \hline s_{y_1x_1} & s_{y_1x_2} & \cdots & s_{y_1x_p} & s_{y_{11}} & s_{y_{12}} & \cdots & s_{y_{1q}} \\ s_{y_2x_1} & s_{y_2x_2} & \cdots & s_{y_2x_p} & s_{y_{21}} & s_{y_{22}} & \cdots & s_{y_{2q}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{y_qx_1} & s_{y_2x_2} & \cdots & s_{y_qx_p} & s_{y_{q1}} & s_{y_{q2}} & \cdots & s_{y_{qq}} \end{array}\right] \quad (3.23)$$

Dari matriks varians-kovarians ini menghasilkan penduga korelasi kanonik yaitu $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_q$ melalui persamaan :

$$\begin{vmatrix} -\ell s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & -\ell s_{yy} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

Sedangkan kombinasi linier peubah kanonik yang bersesuaian dengan korelasi kanonik tersebut adalah $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_q, b_q)$.

3.5. Penggunaan Matriks Korelasi.

Selain menggunakan matriks varians-kovarians sebagaimana diatas, korelasi kanonik dapat dilihat melalui matriks korelasi, karena akar-akar pada persamaan (3.21) sama dengan akar-akar ciri dari matriks.

$$\begin{vmatrix} -\lambda P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & -\lambda P_{yy} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

Dan penduga persamaan matriks tersebut berdasarkan sampel adalah

$$\begin{vmatrix} -\ell \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & -\ell \rho_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

Yang akan menghasilkan penduga korelasi kanonik $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_q$. Dengan cara yang sama pula dapat diperoleh penduga koefisien kombinasi linier masing-masing himpunan peubah.

3.6. Pengujian Korelasi Kanonik.

Dari persamaan (3.24) akan diperoleh sebanyak q pasangan peubah kanonik berdasarkan sampel. Untuk menentukan apakah pasangan – pasangan peubah kanonik itu dapat diinterpretasikan dan dapat digunakan untuk melakukan estimasi, maka harus dilakukan pengujian terlebih dahulu. Ada kemungkinan tidak ada korelasi kanonik yang signifikan sehingga dapat dinyatakan bahwa tidak ada kaitan antara kedua himpunan peubah. Tetapi ada juga kemungkinan beberapa korelasi kanonik menunjukkan adanya korelasi yang signifikan antara kedua himpunan peubah tersebut.

Metode yang dapat digunakan untuk menguji koefisien tersebut antara lain melalui pendekatan sebaran khi-kuadrat seperti yang dikemukakan oleh Bartlett. Asumsi yang harus dipenuhi dalam pengujian hipotesis ini adalah bahwa data sampel menyebar mengikuti sebaran normal dan memiliki variansi yang homogen.

Pendekatan Sebaran Khi-Kuadrat

Untuk ukuran sampel yang besar, Bartlett (1947) menyajikan metode pengujian terhadap korelasi kanonik. Dari hasil pengujian ini, dapat diketahui banyaknya korelasi kanonik yang dapat digunakan untuk menjelaskan hubungan antara dua himpunan peubah. Pengujian korelasi kanonik pertama ekuivalen dengan pengujian bahwa kovariansi antara himpunan peubah X dan himpunan peubah Y adalah 0. Secara matematis dapat dinyatakan dengan pengujian hipotesis:

$$H_0 : \lambda_1 = 0$$

$$H_1 : \lambda_1 \neq 0 \tag{3.27}$$

yang ekuivalen dengan pengujian hipotesis

$$H_0 : \Sigma_{xy} = 0$$

$$H_1 : \Sigma_{xy} \neq 0 \tag{3.28}$$

untuk menguji hipotesis tersebut, Bartlett mendefinisikan

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{q} (1 - \ell^2{}_i) = \frac{\left| s_{xx}^{-1} s_{xy} s_{yy}^{-1} s_{yx} \right|}{\left| s_{xx} \right|} \tag{3.29}$$

dimana $\ell^2{}_i$ adalah penduga peramter korelasi kanonik populasi λ_i. Kemudian definisikan statistik uji :

$$\chi^2_{01} = -\left\{ (n-1) - \frac{1}{2}(p+q+1) \right\} \ln \Lambda_1 \tag{3.30}$$

dimana n banyaknya data sampel. Statistik uji χ^2_{01}, ini mengikuti sebaran khi-kuadrat dengan derajat bebas pq. Jika χ^2_{01} cukup besar artinya $\chi^2_{01} > \chi^2_{(pq)}$, maka dapat dinyatakan bahwa korelasi kanonik pertama dapat digunakan untuk menginterprestasikan keeratan hubungan antara kedua himpunan peubah tersebut. Sebaliknya jika χ^2_{01} tidak cukup besar maka korelasi kanonik pertama tidak dapat digunakan untuk menjelaskan keeratan hubungan kedua himpunan peubah tersebut. Bahkan secara umum dapat dikatakan bahwa tidak ada hubungan antara himpunan peubah X dan himpunan peubah Y.

Misalkan dari pengujian korelasi kanonik pertama menunjukkan bahwa χ^2_{01} signifikan. Maka langkah selanjutnya adalah menguji apakah korelasi kanonik kedua signifikan. Susun hipotesis untuk menguji korelasi kedua adalah sebagai berikut :

$$H_0 : \lambda_2 = 0$$

$$H_1 : \lambda_2 \neq 0 \tag{3.31}$$

statistik uji yang digunakan adalah menggunakan persamaan (3.30) dengan menghilangkan pengaruh korelasi kanonik pertama. Dengan mendefinisikan

$$\Lambda_2 = \prod_{i=1}^{q}(1 - \ell_i^2) \tag{3.32}$$

Maka statistik uji untuk korelasi kanonik kedua dinyatakan dengan :

$$\chi^2_{02} = -\left\{(n-1) - \frac{1}{2}(p+q+1)\right\} \ln \Lambda_2 \tag{3.33}$$

Statistik uji ini mengikuti sebaran khi-kuadrat dengan derajat bebas $(p-1)(q-1)$. Jika statistik uji ini cukup besar jika dibandingkan dengan nilai khi-kuadrat tabel sesuai dengan tingkat keyakinan yang diinginkan, maka berarti paling tidak dua korelasi kanonik yang signifikan. Tetapi jika pengujian korelasi kanonik kedua ini tidak signifikan maka dapat diartikan bahwa hanya korelasi kanonik pertama yang dapat digunakan untuk menjelaskan keeratan hubungan antara himpunan peubah X dan himpunan peubah Y.

Selanjutnya jika χ^2_{01} dan χ^2_{02} kedua signifikan, maka pengaruh korelasi kanonik pertama dan korelasi kanonik kedua dihilangkan dari persamaan (3.30) untuk menguji apakah korelasi kanonik ketiga juga signifikan. Proses ini dilanjutkan sampai diperoleh pengujian yang menunjukkan bahwa korelasi kanonik tidak signifikan. Statistik uji yang digunakan untuk menguji signifikansi korelasi kanonik setelah pengaruh s korelasi kanonik pertama dihilangkan adalah :

$$\chi^2_{0(s+1)} = -\left\{(n-1) - \frac{1}{2}(p+q+1)\right\} \ln \Lambda_{(s+1)} \tag{3.34}$$

dengan derajat bebas $(p-s)(q-s)$.

3.7. Interpretasi Korelasi Kanonik.

Setelah pengujian dilakukan, maka masalah yang timbul adalah bagaimana interpretasi korelasi kanonik yang dihasilkan interpretasi terhadap koefisien kombinasi linier peubah kanonik yang tidak lain adalah bobot kanonik (*canonical weight*) menurut Dillon (1984) tidaklah tepat, karena kelemahan sifat-sifat bobot kanonik yang akan dijelaskan kemudian. Oleh karena itu, perlu dicari cara lain untuk menginterpretasi analisis korelasi kanonik ini. Dillon menyajikan beberapa cara untuk menginterpretasi analisis korelasi kanonik ini.

3.7.1. Bobot Kanonik (*canonical weight*)

Bobot kanonik merupakan koefisien-koefisien kombinasi linier pasangan peubah kanonik yang menunjukkan konstribusi suatu peubah terhadap korelasi kanonik yang dihasilkan. Interpretasi terhadap koefisien kombinasi linier peubah kanonik yang pertama merupakan interpretasi terbaik karena koefisien kombinasi linier ini menghasilkan korelasi kanonik yang terbesar. Dan tidak menutup kemungkinan untuk menginterpretasi koefisien kombinasi linier yang lain juga signifikan. Namun interpretasi terhadap bobot kanonik seringkali menyesatkan, karena dapat terjadi koefisien bobot kanonik suatu peubah bernilai positif, tetapi korelasi sederhana antara peubah tersebut dengan peubah kanoniknya bernilai negatif. Hal ini menimbulkan masalah, karena disatu sisi peubah ini dianggap berpengaruh positif, tetapi disisi lain peubah ini di interpretasi berpengaruh negatif.

Oleh karena itu diperlukan alat lain untuk menginterpretasi pengaruh suatu peubah terhadap korelasi kanonik. Banyak peneliti cenderung melakukan interpretasi dengan menggunakan beban kanonik (*canonical loading*) jika dibandingkan dengan interpretasi bobot kanonik, karena beban kanonik lebih stabil.

3.7.2. Beban Kanonik (*canonical loading*)

Beban kanonik menggambarkan hubungan antara peubah kanonik dengan peubah – peubah asalnya.

Beban kanonik dapat dihitung dengan mengalikan matriks koefisien korelasi suatu himpunan peubah dengan koefisien kombinasi linier peubah kanonik atau bobot kanoniknya.

$$r^{(j)}_{x^{*}x} = R_{xx}a^{(j)} \tag{3.35}$$

$$r^{(j)}_{y^{*}y} = R_{yy}b^{(j)} \tag{3.36}$$

Dimana :

$r_{y*y}^{(j)}$: Beban kanonik yang berasosiasikan dengan variabel *Y* pada canonical variate ke-*j*.

$r_{x*x}^{(j)}$: Beban kanonik yang berasosiasikan dengan variabel tidak bebas pada kanonical variate ke-*j*.

$a^{(j)}$ *dan* $b^{(j)}$: Vektor dari bobot kanonik untuk susunan variabel *X* dan susunan variabel *Y* pada canonical variate ke-*j* .

R_{xx} *dan* R_{yy} : Korelasi dalam susunan matriks-matriks yaitu susunan matriks *X* dan susunan matriks *Y*.

3.7.3. <u>Beban Silang (*Cross Loading*)</u>

Beban silang merupakan pengembangan dari beban kanonik. Ukuran-ukuran beban silang menggambarkan hubungan antara peubah kanonik dari sutau himpunan peubah asal dengan himpunan peubah yang lain. Ukuran-ukuran ini diperoleh melalui perkalian antara beban kanonik dengan koefisien korelasi kanonik secara matematis dapat disusun dengan rumus:

$$r_{x^* y_i}^{(j)} = \lambda_j r_{y^* y}^{j} \tag{3.37}$$

$$r_{y^* x_i}^{(j)} = \lambda_j r_{x^* x}^{j} \tag{3.38}$$

Dimana :

λ_j : Koefisien korelasi kanonik ke-*j*.

$r_{x^* y_i}^{(j)}$ dan $r_{y^* x_i}^{(j)}$: Beban silang untuk setiap ukuran yang diamati dari suatu himpunan dengan canonical variate dari himpunan yang lain.

3.7.4. Proporsi Keragaman Yang Dapat Diterangkan

Metode analisis lain yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara peubah adalah seberapa besar himpunan peubah asal dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya. Metode ini digunakan karena beban kanonik dan bobot kanonik hanya menjelaskan struktur hubungan antar peubah saja, tetapi tidak dapat menjelaskan seberapa jauh peubah-peubah asal tersebut dapat dijelaskan oleh peubah kanoniknya. Koefisien-koefisien ini dihitung dari penjumlahan kuadrat koefisien beban kanonik dibagi dengan banyaknya dalam himpunan. Dalam hal ini banyaknya peubah X adalah p dan banyaknya peubah Y adalah q. Jadi proporsi keragaman himpunan peubah bebas yang dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya dapat dinyatakan dengan rumus:

$$R^2_{(j)x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(r^j_{x^* x_i})^2}{p} \tag{3.39}$$

sedangkan proporsi keragaman himpunan peubah acak tak bebas yang dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya dapat dinyatakan:

$$R^2_{(j)y} = \sum_{i=1}^{q} \frac{(r^j_{y^* y_i})^2}{q} \tag{3.40}$$

Dimana :

$R^2_{(j)x}$: Proporsi yang dapat diterangkan oleh variabel X

$R^2_{(j)y}$: Proporsi yang dapat diterangkan oleh variabel Y

$r^j_{x^* x_i}$: Canonical loading yang berasosiasikan dengan variabel X ke-i pada canonical variate ke-j.

$r^j_{y^*y_i}$: Canonical loading yang berasosiasikan dengan variabel Y ke-i pada canonical variate ke-j.

p : Jumlah variabel X

q : Jumlah variabel Y

3.7.5. Koefisien Redundansi (*Redundantion Coefficient*)

Proporsi keragaman yang dapat diterangkan oleh peubah kanonik yang dapat dihitung hanya dapat menjelaskan beberapa besar keragaman suatu himpunan peubah asal dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya. Ukuran lain yang lebih nyata dikemukakan oleh Stewart dan Love (1968). Ukuran ini menyatakan seberapa besar keragaman himpunan peubah tak bebas dapat diterangkan oleh peubah kononik dari himpunan peubah bebasnya atau sebaliknya. Ukuran ini lebih dikenal dengan istilah koefisien redundansi.

Koefisen redundansi diperoleh dari perkalian kuadrat koefisien korelasi kanonik dengan proporsi keragaman yang dapat diterangkan himpunan peubah terhadap peubah kanoniknya. Koefisien redundansi untuk himpunan peubah tak bebas yang dijelaskan oleh peubah kanonik himpunan peubah bebas dinyatakan dengan:

$$R^2_{(j)y/x} = \lambda_j R^2_{(j)y} \tag{3.41}$$

sedangkan koefisien redundansi himpunan peubah bebas yang dapat diterangkan oleh peubah kanonik himpunan peubah tak bebas dapat dinyatakan dengan:

$$R^2_{(j)x/y} = \lambda_j R^2_{(j)x} \tag{3.42}$$

BAB IV

TERAPAN ANALISIS KORELASI KANONIK

Untuk menerapkan teori analisis korelasi kanonik sebagaimana diuraikan dalam Bab III, pada bab ini disajikan data tentang indikator kesehatan dan gizi dengan indikator sosial ekonomi untuk dianalisis dengan metode tersebut. Data ini diperoleh dari buku indikator kesejahteraan rakyat tahun 2000 yang diterbitkan oleh BPS Jogjakarta tahun 2001.

4.1. Konsep dan Definisi

Indikator kesehatan dan gizi merupakan salah satu indikator yang penting untuk melihat sejauh mana tingkat kesejahteraan rakyat. Semakin baik tingkat kesehatan dan gizi menunjukkan naiknya tingkat kesejahteraan rakyat oleh karena itu perlu dilihat peubah-peubah mana dari indikator kesehatan dan gizi yang memiliki konstribusi yang besar terhadap tingkat kesehatan dan gizi tersebut.

Lebih penting dari itu adalah melihat indikator mana yang mempunyai peranan dominan untuk meningkatkan tingkat kesehatan dan gizi. Dalam penulisan skripsi ini akan diambil beberapa peubah bebas yang merupakan himpunan beberapa indikator kesejahteraan rakyat. Peubah-peubah tersebut berasal dari indikator sosial ekonomi yang meliputi kependudukan, indikator pendidikan dan indikator pengeluaran dan pendapatan penduduk.

Secara rinci himpunan peubah tak bebas yaitu himpunan indikator kesehatan dan gizi, yang meliputi :

Indikator Kesehatan dan Gizi

1. AKB = Angka Kematian Bayi, menggambarkan probabilitas bayi meninggal sebelum mencapai satu tahun (dinyatakan dengan per-seribu kelahiran).
2. AHH = Angka Harapan Hidup, menunjukkan suatu perkiraan rata-rata lamanya hidup sejak lahir yang akan dicapai oleh penduduk.
3. PDDB = Persalinan Ditolong Dokter atau Bidan, persalinan yang ditolong atau menggunakan jasa doktor atau bidan.
4. BBGB = Balita Berstatus Gizi Baik, persentase balita berstatus gizi baik. Status gizi merupakan keadaan anak atau bayi dilihat dari berat badan menurut umur, kategorisasi status gizi dibuat berdasarkan standart WHO / NHCS.

Sedangkan himpunan peubah bebas yang merupakan himpunan indikator sosial ekonomi, meliputi :

Indikator Sosial Ekonomi

1. KPPK = Kepadatan Penduduk Per-Kilometer, menyatakan rata-rata banyaknya penduduk tiap propinsi perkilometer persegi.
2. RLS = Rata-rata Lamanya Sekolah, menyatakan rata-rata lamanya penduduk usia 10 tahun keatas yang bisa mengikuti sekolah. Semakin besar nilai rata-rata lamanya sekolah berarti tingkat pendidikannya semakin tinggi.

3. PRPS = Pengeluaran Rata-rata Per-kapita Sebulan, yaitu besarnya pengeluaran penduduk perkapita untuk makanan dan bukan makanan. Makanan mencakup seluruh jenis makanan termasuk makanan jadi, minuman, tembakau, dan sebagainya. Bukan makanan mencakup perumahan, sandang, biaya kesehatan, sekolah dan sebagainya.

4. KG = Koefisien Gini, menyatakan ukuran kemerataan pendapatan yang dilihat berdasarkan kelas pendapatan. Koefisien gini terletak antara nol yang mencerminkan kemerataan sempurna dan satu yang kemerataan tidak sempurna.

Tabel 4.1

Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2000

No	Propinsi	Indikator Kesehatan dan Gizi				Indikator Sosial Ekonomi			
		Angka Kematian Bayi	Angka Harapan Hidup	Persalinan Ditolong Dokter/Bidan (%)	Balita Berstatus Gizi Baik (%)	Rata-rata Lamanya Sekolah	Koefisien Gini	Kepadatn Penduduk Per-Km^2	Pengeluaran Rata-rata Per-Kapita Sebulan (Rp)
1	D.I. Aceh	39	68	67	64.4	7.2	0.251	75	135559
2	Sumatera Utara	41	67	79	64.7	7.9	0.263	167	149422
3	Sumatera Barat	48	66	79	66.0	7.4	0.275	107	171175
4	Riau	38	68	66	72.1	7.3	0.241	45	170792
5	Jambi	43	67	56	67.1	6.8	0.244	47	135110
6	Sumatera Selatan	48	66	67	73.6	6.6	0.269	70	136894
7	Bengkulu	49	65	70	70.0	7.0	0.264	78	147866
8	Lampung	46	66	57	70.9	6.4	0.292	200	119158
9	DKI Jakarta	24	71	94	76.4	9.7	0.317	1446	327944
10	Jawa Barat	53	64	49	72.8	6.8	0.296	980	153818
11	Jawa Tengah	36	68	57	69.5	6.0	0.273	953	122242
12	D.I. Yogyakarta	25	71	78	82.7	7.9	0.366	958	184199
13	Jawa Timur	48	66	62	69.3	5.9	0.303	734	129574
14	Bali	31	70	89	79.0	6.8	0.281	542	193340
15	Nusa Tenggara Barat	81	58	35	60.3	5.2	0.269	194	118091
16	Nusa Tenggara Timur	56	64	29	61.3	5.7	0.280	85	90991
17	Kalimantan Barat	54	64	45	58.0	5.6	0.284	26	141317
18	Kalimantan Tengah	32	69	56	69.5	7.1	0.250	15	164082
19	Kalimantan Selatan	67	61	54	71.0	6.6	0.265	85	149516
20	Kalimantan Timur	33	69	67	68.1	7.8	0.289	17	177935
21	Sulawesi Utara	37	68	68	74.2	7.6	0.278	102	152834
22	Sulawesi Tengah	60	63	47	65.1	7.0	0.295	34	130660
23	Sulawesi Selatan	36	68	53	66.1	6.5	0.297	129	143665
24	Sulawesi Tenggara	50	65	35	72.9	6.8	0.285	46	124359
25	Maluku	40	67	41	70.7	7.6	0.259	28	128210
26	Irian Jaya	52	65	46	71.7	5.6	0.378	8	129329

Sumber : BPS Jogjakarta, Indikator Kesejahteraan Rakyat / *Welfare Indicators* 1999 - 2000

4.2. Pemeriksaan Asumsi Normal Peubah Ganda

Untuk mengetahui apakah data-data diatas memenuhi asumsi yang diharapkan, maka dilakukan melalui metode statistik. Sebagaimana dijelaskan pada sub Bab 2.5, semua proses pengolahan untuk pemeriksaan ini menggunakan paket program SPSS 10 dan Microsoft Excel.

H_0 untuk pengujian kenormalan adalah bahwa data sampel berasal dari populasi yang berdistribusi normal peubah ganda. Sedangkan H_1 adalah data sampel tidak berasal dari populasi yang mengikuti sebaran normal peubah ganda. Table 4.2 merupakan tabel pengujian kenormalan untuk data tabel 4.1 dengan menggunakan metode statistik diatas.

Tabel 4.2

Uji Normal Peubah Ganda

No	Uji Kenormalan Sisaan dengan Peubah Tak Bebas	Statistik Uji Shapiro-Wilks	db	Nilai-p	ln p
1	AKB	0.977	26	0.785	-0.24207
2	AHH	0.965		0.506	-0.68122
3	PDDB	0.981		0.866	-0.14387
4	BBGB	0.985		0.943	-0.05869
5	RLS	0.977		0.782	-0.24590
6	KG	0.977		0.790	-0.23572
7	KPPK	0.981		0.868	-0.14156
8	PRPS	0.938		0.169	-1.77786
9	Stat W_F				7.05378
10	$\chi^2_{(0.05,16)}$				26.296

4.3. Pengujian Korelasi Kanonik Antara Indikator Sosial Ekonomi dengan Indikator Kesehatan dan Gizi.

Pengujian korelasi kanonik diperlukan untuk melihat apakah terdapat korelasi kanonik yang signifikan. Jika terdapat korelasi yang signifikan maka langkah selanjutnya adalah melihat berapa banyak korelasi kanonik yang signifikan, sehingga korelasi kanonik dan peubah-peubah kanoniknya dapat diinterpretasikan.

Melalui prosedur Cancor pada program SPSS, hasil pengujian terhadap korelasi-korelasi kanonik dapat ditunjukkan pada tabel 4.3 yaitu tabel uji korelasi kanonik. Dari tabel tersebut terlihat bahwa korelasi kanonik yang signifikan pada tingkat signifikansi 5% hanya pada korelasi kanonik pertama yaitu sebesar 0.892. dengan demikian interpretasi dalam analisis korelasi kanonik ini hanya akan dilakukan terhadap korelasi kanonik pertama.

Tabel 4.3

Uji Korelasi Kanonik

No	Canon Cor	db	χ^2_{obs}	$\chi^2_{0.05,db}$
1	0.892	16	38.473	26.296
2	0.432	9	8.528	16.919
3	0.343	4	3.443	9.488
4	0.048	1	0.49	3.841

4.4. Interpretasi Korelasi Kanonik antara Indikator Sosial Ekonomi dengan Indikator Kesehatan dan Gizi.

Dengan paket program yang sama, korelasi kanonik yang pertama menghasilkan turunan-turunan yaitu bobot kanoni, beban kanonik, beban silang, proporsi keragaman yang dapat diterangkan dan koefisien redudensi. Tabel 4.4.a dan tabel 4.4.b merupakan ringkasan output yang diperoleh dari prosedur Cancorr pada paket program SPSS.

Tabel 4.4.a Koefisien Peubah Kanonik untuk Himpunan Peubah Indikator Kesehatan dan Gizi

Indikator Kesehatan dan Gizi	AKB	AHH	PDDB	BBGB
Bobot Kanonik	0.816	0.701	-0.794	-0.209
Beban Kanonik	0.761	-0.756	-0.963	-0.690
Beban Silang	0.679	-0.674	-0.859	-0.615
Proporsi keragaman yang dapat diterangkan	0.639			
Koefisien Redundansi	0.508			

Tabel 4.4.b Koefisien Peubah Kanonik untuk Himpunan Peubah Indikator Sosial Ekonomi

Indikator Sosial Ekonomi	RLS	KG	KPPK	PRPS
Bobot Kanonik	-0.348	0.050	-0.315	-0.619
Beban Kanonik	-0.822	-0.183	-0.467	-0.932
Beban Silang	-0.733	-0.163	-0.417	-0.831
Proporsi keragaman yang dapat diterangkan	0.449			
Koefisien Redundansi	0.357			

Dengan korelasi kanonik pertama sebesar 0.892, dari bobot kanonik dapat dijelaskan bahwa indikator sosial ekonomi yang mempunyai kontribusi besar korelasi kanonik adalah pengeluaran rata-rata per-kapita sebulan (PRPS). Sedangkan indikator kesehatan dan gizi yang mempunyai kontribusi besar terhadap korelasi kanonik adalah angka kematian bayi (AKB), angka harapan hidup (AHH) dan persalinan ditolong dokter atau bidan (PDDB). Tetapi interpretasi langsung dari bobot kanonik ini akan menyesatkan karena jika diinterpretasikan dari bobot kanonik ini akan menyatakan bahwa semakin tinggi tingkat pengeluaran maka angka kematian bayi dan angka harapan hidup semakin tinggi, sedangkan persalinan ditolong dokter atau bidan semakin menurun. Dari kondisi semacam itu dinyatakan bahwa adanya hubungan non linier antar peubah. sedangkan kebanyakan penulis menyatakan bahwa kekeliruan ini disebabkan adanya korelasi sederhana antara peubah dalam satu indikator yang cukup besar. Hal ini dapat dilihat dalam tabel 4.4.c. dan tabel 4.4.d. dibawah ini.

Tabel 4.4.c Korelasi Sederhana Antara Peubah Dalam Himpunan Indikator Kesehatan Dan Gizi

	AKB	AHH	PDDB	BBGB
AKB	1			
AHH	-0.987	1		
PDDB	-0.657	0.678	1	
BBGB	-0.551	0.543	0.518	1

Tabel 4.4.d Korelasi Sederhana Antara Peubah Dalam Himpunan Indikator Sosial Ekonomi

	RLS	KG	KPPK	PRPS
RLS	1			
KG	-0.004	1		
KPPK	0.090	0.392	1	
PRPS	0.720	0.179	0.227	1

Dari tabel 4.4.c. terlihat bahwa ada korelasi yang tinggi antara peubah indikator kesehatan dan gizi, misalnya angka kematian bayi dengan angka harapan hidup, angka kematian bayi dengan persalinan ditolong dokter atau bidan, dan angka harapan hidup dengan persalinan ditolong dokter atau bidan. Sedangkan dari tabel 4.4.d. dapat dinyatakan bahwa terdapat korelasi sederhana yang tinggi antara rata-rata lamanya sekolah dengan pendapatan perkapita sebulan. Oleh karena itu digunakan metode analisis yang lain untuk menginterpretasikan hasil korelasi kanonik diatas.

Dengan melihat beban kanonik dapat dinyatakan bahwa peubah kanonik untuk indikator sosial ekonomi sangat dipengaruhi rata-rata lama sekolah, kepadatan penduduk, dan rata-rata pengeluaran perkapita. Sedangkan peubah kanonik untuk indikator kesehatan dan gizi dipengaruhi oleh angka kematian bayi, angka harapan hidup, persentasi persalinan balita ditolong dokter, dan persentase balita berstatus gizi baik. Berbeda dengan bobot kanonik, pada beban kanonik ini tanda untuk koefisien pada angka kematian bayi adalah plus (+). Dari koefisien-koefisien ini maka dapat dinyatakan bahwa semakin besar rata-rata lamanya sekolah (tingkat pendidikan semakin tinggi) dan pengeluaran rata-rata perkapita sebulan maka tingkat kematian bayi akan menurun, sedangkan angka harapan hidup, persalinan ditolong dokter atau bidan dan balita berstatus gizi baik akan semakin meningkat.

Selain dapat dinterprestasikan dengan beban kanonik, hubungan antara peubah diatas dapat dinyatakan dengan koefisien beban silang. Berdasarkan output diatas terlihat bahwa interpretasi terhadap koefisien beban silang identik dengan interpretasi yang dilakukan terhadap koefisien beban kanonik.

Disisi lain, ternyata proporsi keragaman indikator peubah sosial ekonomi yang dapat diterangkan oleh peubah kanoniknya begitu kecil. Peubah kanonik untuk indikator sosial ekonomi sebesar 44.9% saja. Sedangkan untuk keragaman himpunan untuk indikator kesehatan dan gizi yang dapat dijelaskan oleh peubah kanoniknya mencapai 63.9%.

Dari tabel 4.4.a dan tabel 4.4.b diatas, indikator sosial ekonomi tersebut hanya mampu dijelaskan oleh peubah kanonik indikator kesehatan dan gizi sebesar 50.8%. Sedangkan peubah kanonik indikator sosial ekonomi hanya menerangkan sekitar 35.7% terhadap keragaman himpunan indikator kesehatan dan gizi.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Analisis korelasi kanonik merupakan metode statistik yang mampu menjelaskan hubungan antara banyak peubah menjadi analisis yang sederhana. Dengan analisis ini, korelasi dua himpunan peubah yang banyak dapat disederhanakan menjadi analisis yang mudah dipahami dengan menjelaskan peubah-peubah yang mempunyai kontribusi yang besar terhadap korelasi kanonik.

Menurut Dillon (1984) penggunaan koefisien beban kanonik lebih menggambarkan struktur yang sebenarnya dari pada koefisien bobot kanonik.

Penerapan analisis korelasi kanonik dengan menggunakan koefisien beban kanonik terhadap data tentang indikator kesejahteraan rakyat, terutama indikator kesehatan dan gizi dan indikator sosial ekonomi menunjukkan bahwa semakin rendahnya rata-rata lamanya sekolah, pengeluaran rata-rata per-kapita sebulan maka semakin tinggi angka kematian bayi. Sedangkan angka harapan hidup, persalinan ditolong dokter, dan balita berstatus gizi baik akan semakin menurun.

5.2. Saran

Analisis korelasi kanonik merupakan metode analisis yang menggunakan data dengan banyak peubah. Menghadapi kendala tidak terpenuhinya asumsi-asumsi yang diperlukan, maka perlu dilakukan pembahasan lebih lanjut terhadap analisis korelasi kanonik.

DAFTAR PUSTAKA

Alhusin, S., 2002, *Aplikasi Statistik Praktis dengan SPSS 10.0 for window.* J & J Learning, Jogjakarta.

Anderson, T. W., 1984, *An Introduction to Multivariate Statistic Analysis.* John Wiley and Sons. New York.

Anton, H., 1995, *Aljabar Linier Elementer.* Erlangga. Jakarta.

Assauri, S., 1983, *Aljabar Linier Dasar Ekonometri.* Edisi kedua, Rajawali, Jakarta

Ayres, F., Susilo, I.N., 1994, *Matriks.* Penerbit Erlangga, Jakarta.

BPS. 2001. *Indikator Kesejahteraan Rakyat Tahun 2000*, BPS Jakarta.

Conover, W. J., 1980, *Practical Non Parametrik Statistic*, John Wiley and Sons. New York.

Dillon, W, R., and Goldstein, M., 1984, *Multivariate Analysis Methods and Application*, John Wiley and Sons Inc, Canada.

Gaspersz, V., 1991, *Tehnik Analisis Dalam Penelitian Percobaan*, Jilid I, Tarsito, Bandung.

Haryatmi, S,K., 1988, *Metode Statistika Multivariat*, Karunika, Jakarta.

Kuncoro, M., 2001, *Metode Kuantitatif : Teori dan Aplikasi Untuk Bisnis dan Ekonomi*, UPP AMP YKPN, Yogjakarta.

Madyana, M, A., 2000, *Matriks dan Ruang Vektor*, Universitas Atma Jaya Jogjakarta

Mudholkar, G, S., McDermott, M., and Srivastava, D, K., 1992, A Test of p-variate Normality. *Biomerika* 79 (4), pp. 850-854.

Mudholkar, G, S., Srivastava, D, K., and Lin, C, T., 1992, Some p-variate Adaptations of The Shapiro-Wilk Test of Normality, *Comunication in Statistic, Theory and Methods* 24 (4), pp. 953-985.

Royston, J, P., 1995, A Remark on Algorithm AS 181, The W-test Normality, *Applied Statistic* 44, pp. 547-551.

Santoso, S., 2002, *Buku Latihan SPSS Statistik Multivariat*, Elek Media Komputindo, Jakarta.

Sudjana., 2001, *Tehnik Analisis Regresi dan Korelasi Bagi Para Peneliti.*, Tarsito, Bandung.

Soejoeti, Z., 1985, *Metode Statistika I*, Modul 3, Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

LAMPIRAN

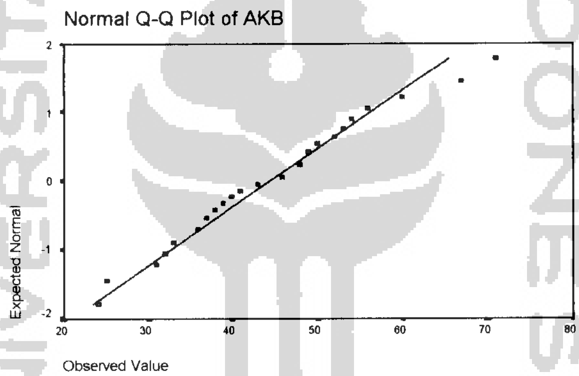
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
AKB	.078	26	.200*	.977	26	.785
AHH	.109	26	.200*	.975	26	.746
PDD	.098	26	.200*	.981	26	.866
BBGB	.100	26	.200*	.985	26	.943
RLS	.097	26	.200*	.981	26	.868
KG	.068	26	.200*	.977	26	.782
KPPK	.113	26	.200*	.938	26	.169
PRPS	.106	26	.200*	.977	26	.791

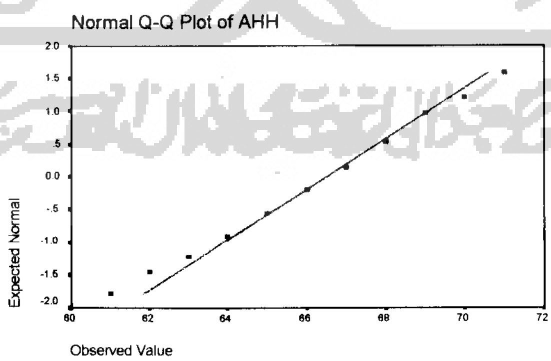
*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

AKB

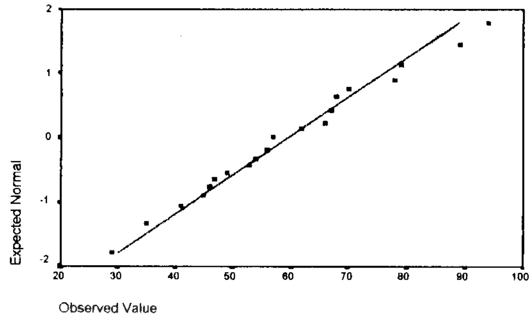


AHH



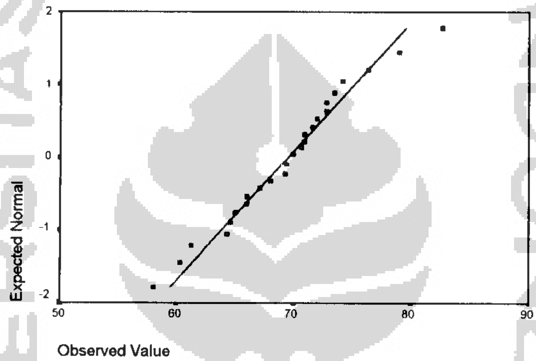
PDD

Normal Q-Q Plot of PDD



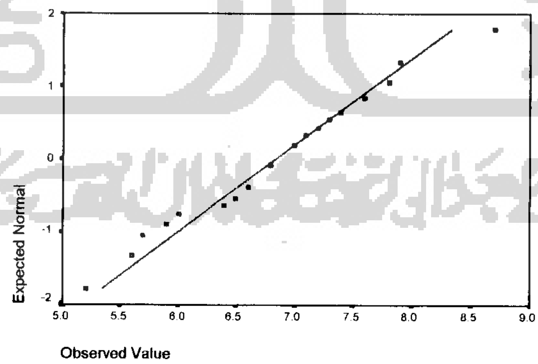
BBGB

Normal Q-Q Plot of BBGB

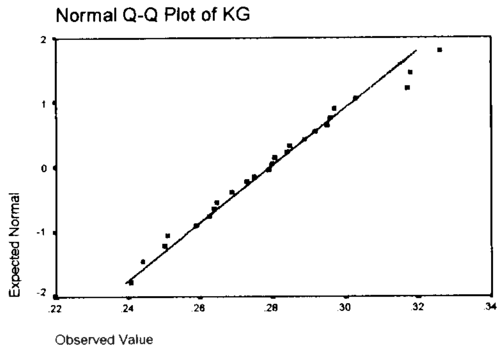


RLS

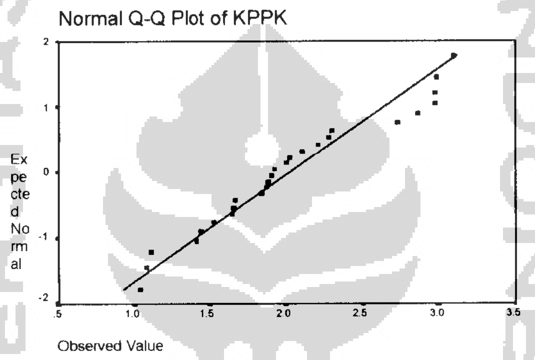
Normal Q-Q Plot of RLS



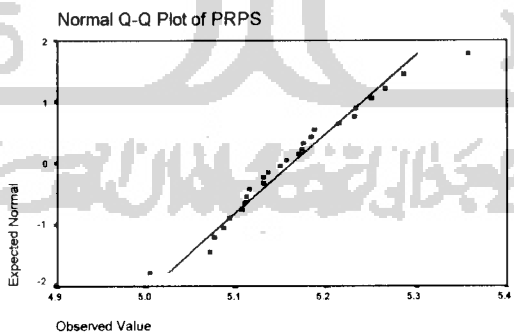
KG


Normal Q-Q Plot of KG
Expected Normal
2
1
0
-1
-2
22
24
26
28
30
32
34
Observed Value

KPPK


Normal Q-Q Plot of KPPK
Expected Normal
2
1
0
-1
-2
.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Observed Value

PRPS


Normal Q-Q Plot of PRPS
Expected Normal
2
1
0
-1
-2
4.9
5.0
5.1
5.2
5.3
5.4
Observed Value

Run MATRIX Procedure :

Correlation for set-1

	RLS	KG	KPPK	PRPS
RLS	1.000			
KG	-0.004	1.000		
KPPK	0.090	0.392	1.000	
PRPS	0.720	0.179	0.227	1.000

Correlation for set-2

	AKB	AHH	PDDB	BBGB
AKB	1.000			
AHH	-0.987	1.000		
PDDB	-0.657	0.678	1.000	
BBGB	-0.551	0.543	0.518	1.000

Correlation Between set-1 and set-2

	AKB	AHH	PDDB	BBGB
RLS	-0.661	0.626	0.670	0.483
KG	-0.120	0.123	0.100	0.347
KPPK	-0.213	0.235	0.409	0.394
PRPS	-0.627	0.628	0.812	0.551

Eigenvalues and Canonical Correlations

Root No.	Eigenvalue	Pct.	Cum.Pct.	Canon Cor.	Sq. Cor
1	3.896	91.437	91.437	.892	.796
2	.229	5.384	96.821	.432	.187
3	.133	3.123	99.945	.343	.117
4	.002	.055	100.000	.048	.002

Thest that Remaining correlation are zero :

Roots	Wilks L.	Chi-SQ.	DF	Sig.
1 TO 4	.14627	38.473	16.00	.001
2 TO 4	.71616	8.528	9.00	.655
3 TO 4	.88047	3.443	4.00	.625
4 TO 4	.99765	0.490	1.00	.826

Standardized canonical coefficients for set-1

	1	2	3	4
RLS	-.348	1.262	-.233	-.625
KG	.050	.272	-.975	.449
KPPK	-.315	-.513	-.136	-.916
PRPS	-.619	-.910	.465	.922

Raw canonical coefficients for set-1

	1	2	3	4
RLS	-.414	1.502	-.277	-.744
KG	2.226	12.116	-43.465	20.036
KPPK	-.512	-.834	-.221	-1.491
PRPS	-7.995	-11.749	6.007	11.908

Standardized canonical coefficients for set-2

	1	2	3	4
AKB	.816	-5.023	-.706	3.699
AHH	.701	-4.165	-.569	4.827
PDDB	-.794	-.535	.739	-.735
BBGB	-.209	-.231	-1.187	-.183

Raw canonical coefficients for set-2

	1	2	3	4
AKB	.069	-.426	-.060	.314
AHH	.272	-1.614	-.221	1.871
PDDB	-.048	-.032	.045	-.045
BBGB	-.037	-.041	-.213	-.033

Canonical loadings for set-1

	1	2	3	4
RLS	-.822	.561	.093	-.045
KG	-.183	-.097	-.944	.257
KPPK	-.467	-.499	-.434	-.587
PRPS	-.932	-.069	.092	.345

Cross loadings for set-1

	1	2	3	4
RLS	-.733	.242	.032	-.002
KG	-.163	-.042	-.324	.012
KPPK	-.417	-.216	-.149	-.028
PRPS	-.831	-.030	.032	.017

Canonical loadings for set-2

	1	2	3	4
AKB	.761	-.434	.025	-.482
AHH	-.756	.305	-.016	.579
PDDB	-.963	-.176	.202	.011
BBGB	-.690	.002	-.724	.016

Cross loadings for set-2

	1	2	3	4
AKB	.679	-.187	.009	-.023
AHH	-.674	.132	-.005	.028
PDDB	-.859	-.076	.069	5E-04
BBGB	-.615	9E-04	-.248	8E-04

Redundancy Analysis :

Proportion of variance of set-1 Explained by Its Own Can.

Var	Prop. Var
CV1-1	0.449
CV1-2	0.145
CV1-3	0.274
CV1-4	0.133

Proportion of variance of set-1 Explained by Opposite.

Can Var	Prop. Var
CV2-1	0.357
CV2-2	0.027
CV2-3	0.032
CV2-4	0.0003

Proportion of variance of set-2 Explained by Its Own Can.

	Prop. Var
Var	
CV2-1	0.639
CV2-2	0.078
CV2-3	0.141
CV2-4	0.142

Proportion of variance of set-2 Explained by Opposite.

	Prop. Var
Can Var	
CV1-1	0.508
CV1-2	0.015
CV1-3	0.017
CV1-4	0.0003

---------- END MATRIX -----------

Tabel Koefisien a_i Untuk Statistik Uji Shapiro-Wilk's

	n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i =	1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
	2	-	0.0000	0.1667	0.2413	0.2806	0.3164	0.3164	0.3244	0.3291
	3	-	-	-	0.0000	0.0875	0.1743	0.1743	0.1976	0.2141
	4	-	-	-	-	-	0.0561	0.0561	0.0947	0.1224
	5	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0399

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.0560	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	01586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	-	-	0.0000	0.0246	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8	-	-	-	-	0.0000	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0163	0.0303	0.0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0140

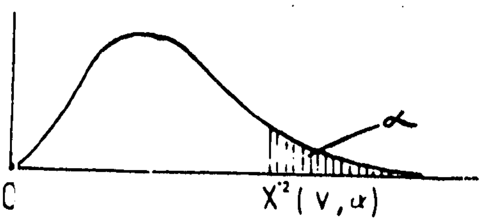
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1874
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11	0.0000	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12	-	-	0.0000	0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13	-	-	-	-	0.0000	0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0084	0.0159	0.0227
15	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0076

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2462	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2638
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1841	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1473	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1178	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0945	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0532	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16	0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17	-	-	0.0000	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18	-	-	-	-	0.0000	0.0057	0.0110	0.0156	0.0203	0.0244
19	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0053	0.0101	0.0146
20	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0049

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3890	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0860	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21	0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22	-	-	0.0000	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23	-	-	-	-	0.0000	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0036	0.0071	0.0107
25	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0035

TABEL V DISTRIBUSI χ^2

Angka-angka dalam tabel menunjukkan luas atau probabilitas $P\left[\chi^2 > \chi^2 (v, \alpha)\right] = \alpha$ dimana χ^2 berdistribusi Chi kwadrat dengan derajat bebas v



ν	α 0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672