

## BAB III

### LANDASAN TEORI

#### 3.1 Pendahuluan

Perencanaan struktur tahan gempa harus memperhitungkan pengaruh gempa setempat yang pernah terjadi terhadap struktur yang akan direncanakannya, hal ini bertujuan mengantisipasi apabila terjadi gempa serupa. Untuk menetapkan *ground motion* yang akan digunakan pada perancangan suatu struktur, idealnya diperlukan studi tentang sejarah kegempaan pada daerah di mana struktur tersebut akan didirikan (Cramer, 1996).

Pengendalian simpangan pada perancangan struktur tahan gempa dapat dicapai, dengan cara mengetahui terlebih dahulu karakteristik beban gempa yang dominan menyebabkan respon struktur menjadi maksimum, Perhitungan dalam penelitian ini menggunakan beberapa teori yang umum digunakan untuk analisa dinamik. Teori-teori tersebut diantaranya adalah sebagai berikut.

#### 3.2 Formulasi Persamaan Differensial Gerakan

##### 3.2.1 Properti Struktur

###### 3.2.1.1 Massa Struktur

Sebagaimana telah diketahui bahwa suatu struktur yang kontinyu kemungkinan mempunyai banyak derajat kebebasan karena banyaknya massa yang mungkin dapat ditentukan. Banyaknya derajat kebebasan yang umumnya

berasosiasi dengan jumlah massa tersebut akan menimbulkan kesulitan. Hal ini terjadi karena banyaknya persamaan differensial yang ada. Maka untuk itu diperlukan beberapa asumsi.

Terdapat dua pendekatan pokok yang umumnya dilakukan untuk mendiskripsikan massa struktur. Pendekatan pertama adalah sistem diskretisasi massa yaitu massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat tertentu. Apabila prinsip bangunan geser (*shear building*) dipakai maka setiap massa hanya akan bergerak secara horisontal. Karena percepatan hanya terjadi pada struktur yang mempunyai massa maka matriks massa merupakan matrik diagonal. (Widodo, 1996)

Pendekatan yang kedua adalah menurut prinsip *consistent mass matrix* yang mana elemen struktur akan berdeformasi menurut bentuk fungsi (*shape function*). Apabila tiga derajat kebebasan (horisontal, vertikal dan rotasi) diperhitungkan pada setiap mode maka standar *consistent mass matrix* dapat diperoleh dengan *off diagonal matriks* tidak sama dengan nol sebagaimana *lumped mass*. Pada struktur yang massanya terdistribusi secara merata, misalnya analisa getaran balok atau cerobong, maka pemakaian prinsip *consistent mass matrix* menjadi lebih tepat. Namun demikian, pada struktur bangunan bertingkat banyak yang mana struktur umumnya terkonsentrasi pada masing-masing tingkat, maka prinsip *lumped mass* banyak dipakai dan cukup akurat. Besarnya massa tiap tingkat dapat dihitung dengan rumus

$$m_i = w/g \dots \dots \dots (3.1)$$

dimana  $m_i, w, g$  secara berurutan adalah massa, berat dan percepatan grafitasi.

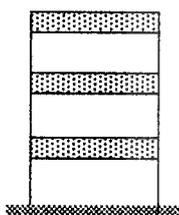
### 3.2.1.2 Redaman.

Redaman merupakan peristiwa pelepasan energi (*energy dissipation*) oleh struktur akibat adanya berbagai macam sebab. Beberapa penyebab itu diantaranya adalah pelepasan energi oleh adanya gerakan antara molekul di dalam material, pelepasan energi oleh gesekan alat penyambung maupun sistem dukungan, pelepasan energi akibat gesekan dengan udara dan pada *respon elastik* pelepasan energi juga terjadi akibat rotasi sendi plastik. Karena redaman berfungsi melepaskan energi, maka hal tersebut akan mengurangi respon struktur.

Jika menggunakan Modal Analysis (Deterministic Respon Spectra), yang dibutuhkan adalah nilai-nilai  $\xi_i$ ,  $i=1,2,\dots,s$ , untuk semua modes, dan para ahli mempunyai beberapa ide yang beralasan tentang nilai-nilai  $\xi$  untuk bermacam-macam struktur.

Apabila integrasi langsung digunakan pada persamaan gerakan, maka matrik damping diperlukan. Bentuk-bentuk matrik redaman :

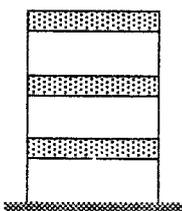
1. Kekuatan redaman proporsional untuk kecepatan mutlak, yaitu  $\{F_d\} \propto \{\dot{y}\}$



$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Matrik redaman mempunyai bentuk yang sama dengan massa matrik.

2. Kekuatan damping proporsional dengan gerakan.



$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Damping matrik mempunyai bentuk sama dengan matrik kekakuan.

Beberapa kemungkinan atau cara untuk memperoleh redaman, yaitu:

a. Kemungkinan Pertama (I)

$$[C] = \alpha[M] \dots\dots\dots(3.2)$$

dimana  $\alpha$  adalah skalar.

$$[\phi^T [C] \mathbf{I} \phi] = \alpha[M^*] \dots\dots\dots(3.3)$$

Secara normal diasumsikan,

$$[\phi^T [C] \mathbf{I} \phi] = [C^*] = [2\xi\omega M^*] \dots\dots\dots(3.4)$$

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \alpha M_i^* \dots\dots\dots(3.5)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

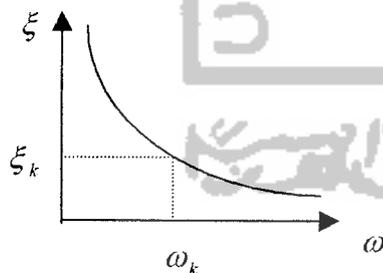
Untuk menghitung  $\alpha$   $\xi = \xi_k$ , dimana  $\omega = \omega_k$

$$\alpha = 2\xi_k \omega_k \dots\dots\dots(3.6)$$

Damping ratio untuk semua mode yang lain, dikhususkan

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = 2\xi_k \omega_k M_i^* \dots\dots\dots(3.7)$$

$$\xi_i = \frac{\omega_k \xi_k}{\omega_i} \dots\dots\dots(3.8)$$



b. Kemungkinan II

$$[C] = \beta[K] \dots\dots\dots(3.9)$$

Orthogonalitas

$$[\phi^T [C] \mathbf{I} \phi] = [C^*] = \beta[K^*] = \beta[\omega^2 M^*] \dots\dots\dots(3.10)$$

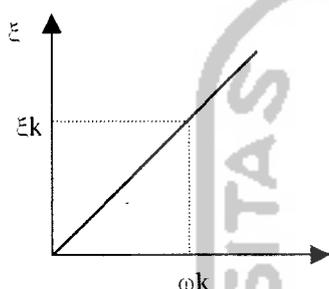
Untuk mencari nilai  $\beta$

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \beta \omega_i^2 M_i^* \dots \dots \dots (3.11)$$

untuk nilai  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , untuk mode  $k$ , maka  $\xi_k$  secara khusus

$$\beta = \frac{2\xi_k}{\omega_k} \dots \dots \dots (3.12)$$

Untuk semua mode yang lain,



$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \frac{2\xi_k}{\omega_k} \omega_i^2 M_i^* \dots \dots \dots (3.13)$$

$$\xi_i = \xi_k \frac{\omega_i}{\omega_k} \dots \dots \dots (3.14)$$

c. Kemungkinan III (Solusi secara umum)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \dots \dots \dots (3.15)$$

$$[C^*] = \alpha[M^*] + \beta[\omega^2 M^*] \dots \dots \dots (3.16)$$

$$2\xi_i \omega_i^* M_i^* = \alpha M_i^* + \beta \omega_i^2 M_i^* \dots \dots \dots (3.16)$$

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2$$

Sekarang kita mempunyai dua variabel untuk dimanipulasi, dikhususkan

nilai  $\xi_k$  dan  $\xi_j$  untuk modes  $k$  dan  $j$ , maka

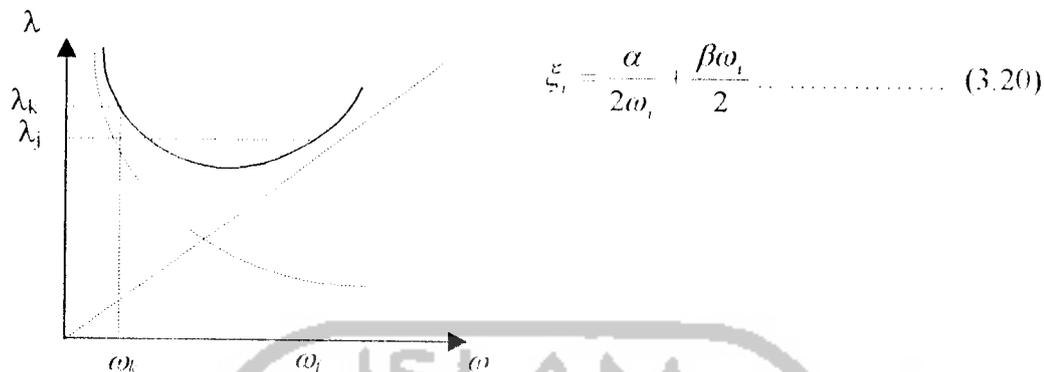
$$\begin{aligned} 2\xi_k \omega_k &= \alpha + \beta \omega_k^2 \\ 2\xi_j \omega_j &= \alpha + \beta \omega_j^2 \end{aligned} \dots \dots \dots (3.17)$$

Penyelesaian untuk dua persamaan simultan ini adalah,

$$\beta = 2(\xi_k \omega_k - \xi_j \omega_j) / (\omega_k^2 - \omega_j^2) \dots \dots \dots (3.18)$$

$$\alpha = 2\xi_k \omega_k - \beta \omega_k^2 \dots \dots \dots (3.19)$$

Untuk semua jenis mode lainnya,



Semua metode ini adalah merupakan kasus-kasus dari Caughey atau Rayleigh Damping. Prinsip dari Rayleigh Damping

Secara umum  $[C] = [M] \sum_{l,b}^{q+1} \alpha_l [[M^{-1}]K]^l$  ..... (3.21)

Dimana: b adalah bilangan Integer -  $x \leq b \leq x$

q adalah nomor dari mode-mode untuk nilai-nilai  $\xi$ ,

Kemungkinan I, b = 0, q = 1

Kemungkinan II, b = 1, q = 1

Kemungkinan III, b = 0, q = 2

Kemungkinan-kemungkinan lainnya termasuk kombinasi  $km^{-1}km^{-1}k$ ,  $km^{-1}k$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $mk^{-1}m$ ,  $mk^{-1}mk^{-1}m$ .

Tabel 3.1 Nilai-nilai  $\xi$  yang disarankan

Struktur	$\xi$
Beton Monolit	5 % - 10 %
Beton Bertulang	5 % - 10 %
Struktur Baja	1 % untuk amplitudo kecil. 4 % - 8% untuk amplitudo besar
Bangunan Kayu	10% - 20 %
Bangunan Batu	6% - 18 %

Untuk struktur dengan respon elastik, umumnya rasio redaman (damping ratio)  $\xi$  umumnya dianggap konstan. Pada mode yang lebih tinggi umumnya frekuensi sudut  $\omega$  akan lebih besar sehingga koefisien redaman akan membesar walaupun rasio redaman tetap.

Menurut hasil penelitian (Chopra, 1995) menunjukkan bahwa rasio redaman akan meningkat cukup signifikan pada mode-mode yang lebih tinggi.

### 3.2.1.3 Kekakuan

Pada prinsip bangunan geser (*shear building*) balok lantai tingkat dianggap tetap horisontal baik sebelum maupun sesudah terjadi penggoyangan. Adanya plat lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok sehingga anggapan tersebut tidak terlalu kasar, pada prinsip desain bangunan tahan gempa dikehendaki agar kolom lebih kuat dibanding balok, namun demikian rasio tersebut tidak selalu linier dengan kekakuannya. Dengan prinsip *shear building* ini maka memungkinkan pemakaian *lumped mass model*. Pada prinsip ini, kekakuan setiap kolom dapat dihitung dengan rumus standar.

Pada prinsipnya semakin kaku balok maka semakin besar kemampuannya dalam mengekang rotasi ujung kolom, sehingga akan menambah kekakuan kolom. Apabila kekakuan balok akan diperhitungkan, artinya balok dan plat lantai tidak kaku sempurna, maka kekakuan kolom berdasarkan rumus Muto (1975) ataupun Aydin dan Gonen (1994) dapat dipakai. Perhitungan balok akan lebih teliti apabila pengaruh plat lantai ikut diperhatikan sehingga diperhitungkan sebagai balok T.

Pada prinsip Muto, kekakuan joint juga dapat diperhitungkan sehingga hitungan kekakuan baik kekakuan balok maupun kolom menjadi lebih teliti.

Pada penelitian ini besarnya kekakuan tiap tingkat dihitung dengan prinsip Shear Building sebagai berikut :

$$k_t = 12 EI / H^3 \dots\dots\dots(3.22)$$

dimana  $I = bh^3/12$ , sehingga

$$k_t = E * bh^3 / 12H^3 \dots\dots\dots(3.23)$$

$E$  adalah modulus elastisitas bahan, modulus elastisitas dari beton bertulang diambil 200000 kg/cm<sup>2</sup>.

Dengan melihat data struktur, maka kekakuan dihitung secara paralel yaitu kekakuan tiap lantai merupakan jumlah dari kekakuan kolom, secara matematis dapat dituliskan dengan rumus berikut :

$$k_t = \Sigma k_c \dots\dots\dots(3.24)$$

dengan  $k_t$ , dan  $k_c$  adalah kekakuan tingkat dan kekakuan kolom, sehingga kekakuan tingkat ke- $i$  dapat dihitung dengan rumus berikut :

$$k_{ti} = 2 * k_{ctp} + \sum_{j=1}^n k_{ctg} \dots\dots\dots(3.25)$$

dimana,  $k_{ti}$ ,  $k_{ctp}$ ,  $k_{ctg}$  adalah kekakuan tingkat ke- $i$ , kekakuan kolom tepi dan kekakuan kolom tengah.

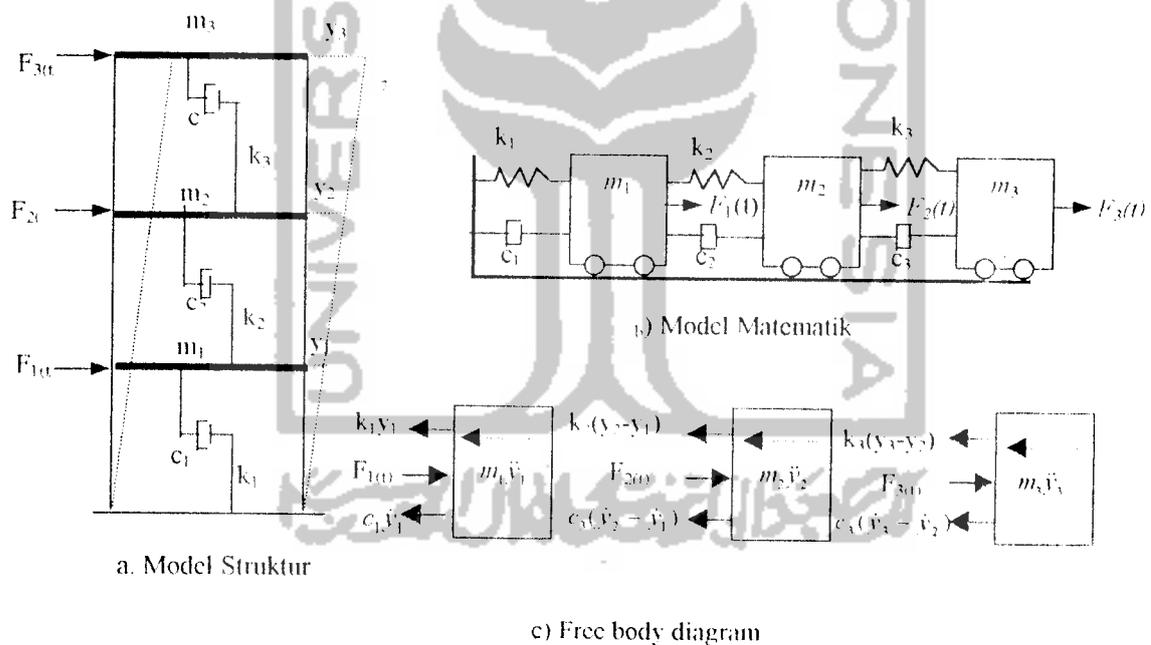
### 3.3 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur bertingkat banyak maka dipakai anggapan dan pendekatan yaitu digunakan prinsip *shear building*. Untuk memperoleh persamaan differensial tersebut, maka dipakai

prinsip keseimbangan dinamik (*dynamic Equilibrium*) pada suatu massa yang ditinjau.

Pada gedung bangunan gedung bertingkat-3 seperti gambar 3.1, maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai  $i$ -tingkat akan mempunyai  $i$ -derajat kebebasan dan mempunyai  $i$ -modes.

Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur MDOF umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut *first mode* atau mode pertama yaitu goyangan yang  $y_3, y_2, y_1$  modes.



Gambar 3.1. Model Struktur MDOF

Berdasarkan keseimbangan dinamik pada *free body* diagram gambar 3.1, maka akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) &= 0 \\
m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) &= 0, \dots \quad (3.26) \\
m_3 \ddot{y}_3 + c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 (y_3 - y_2) - F_3(t) &= 0
\end{aligned}$$

dengan menyusun persamaan di atas menurut paramater yang sama (percepatan, kecepatan, dan simpangan), maka persamaan (3.26) dapat ditulis menjadi matriks uraian seperti di bawah ini,

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2) \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 &= F_1(t) \\
m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + (c_2 + c_3) \dot{y}_2 - c_3 \dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 &= F_2(t) \dots \dots \quad (3.27) \\
m_3 \ddot{y}_3 - c_3 \dot{y}_2 + c_3 \dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 &= F_3(t)
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan (3.27) dapat ditulis dalam bentuk matriks ekspresi,

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = \{F(t)\} \dots \dots \dots (3.28)$$

yang mana matriks ekspresi di atas (matriks-matriks massa, redaman, dan kekakuan) masing-masing adalah,

$$\begin{aligned}
[M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \\
[K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.29)
\end{aligned}$$

Sedangkan  $\{\ddot{y}\}$ ,  $\{\dot{y}\}$ ,  $\{y\}$  dan  $\{F(t)\}$  masing-masing adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban, atau,

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3.30)$$

### 3.4 Getaran Bebas pada Struktur MDOF

Pada umumnya suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar misalnya akibat beban angin maupun akibat gerakan tanah/gempa. Getaran-getaran seperti ini dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *forced vibration system*. Membahas tentang getaran bebas pada struktur yang derajat kebebasan banyak akan diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat pada analisa dinamika struktur. Pembahasan masalah ini masih diikuti dengan penyederhanaan permasalahan yaitu dengan menganggap struktur tidak mempunyai redaman (*undamped system*).

#### 3.4.1 Nilai karakteristik (Eigenproblem)

Sebagaimana kita ketahui bahwa getaran bebas (*free vibration system*) pada kenyataannya jarang terjadi pada struktur MDOF, tetapi membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran/karakteristik dari struktur yang bersangkutan yang selanjutnya sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya. Besaran-besaran tersebut terutama adalah frekuensi sudut dan normal modes.

Pada getaran bebas untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka persamaan differensial gerakannya seperti persamaan berikut, dengan nilai ruas kanan sama dengan nol :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad \dots \dots \dots (3.31)$$

Seperti kita ketahui bahwa frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, apabila nilai damping ratio cukup kecil. Apabila hal ini diadopsi

untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka nilai  $C=0$ , persamaan (3.31) menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad \dots \dots \dots (3.32)$$

Karena persamaan (3.32) adalah persamaan differensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman, maka sebagaimana penyelesaian persamaan differensial yang sejenis, maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik menurut bentuk,

$$\begin{aligned} Y &= \{a\}_i \sin(\omega t) \\ \dot{Y} &= \omega \{a\}_i \cos(\omega t) \\ \ddot{Y} &= -\omega^2 \{a\}_i \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.33)$$

dimana  $\{a\}_i$  adalah suatu ordinat massa pada mode yang ke- $i$ . Substitusi persamaan (3.33) ke dalam persamaan (3.32) selanjutnya akan diperoleh

$$\begin{aligned} -\omega^2 [M]\{a\}_i \sin(\omega t) + [K]\{a\}_i \sin(\omega t) &= 0 \\ \{[K] - \omega^2 [M]\}\{a\}_i &= 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.34)$$

Persamaan (3.34) adalah suatu persamaan yang sangat penting dan biasa disebut persamaan *eigenproblem* atau karakteristik problem. Persamaan ini adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya. Persamaan simultan baik persamaan yang homogen maupun yang tidak homogen dapat diselesaikan dengan memakai dalil Cramer (1704-1752), seorang ahli matematika bangsa Swiss. Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor  $\{a\}_i$  adalah nol sehingga,

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} = 0 \quad \dots \dots \dots (3.35)$$

Jumlah *mode* pada struktur dengan derajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. *Mode* itu sendiri adalah jenis/pola/ragam getaran/goyangan suatu struktur bangunan. *Mode* ini hanya merupakan fungsi dari properti dinamik dari struktur yang bersangkutan (di dalam ini adalah hanya massa dan kekakuan tingkat) dan bebas dari pengaruh waktu dan frekuensi getaran. Dengan adanya hubungan antara jumlah mode dengan jumlah massa struktur, maka bangunan yang mempunyai 5-tingkat misalnya, akan mempunyai 5 derajat kebebasan dan akan mempunyai 5 jenis *mode* getaran dan akan mempunyai 5 nilai frekuensi sudut yang berhubungan langsung dengan jenis/nomor *mode*. Apabila jumlah derajat kebebasan adalah  $n$ , maka persamaan (3.35) akan menghasilkan suatu polinomial pangkat  $n$  yang selanjutnya akan menghasilkan  $\omega_i^2$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n$ . Selanjutnya, substitusi masing-masing frekuensi sudut  $\omega_i$  kedalam persamaan (3.35) akan diperoleh nilai-nilai *mode shape*.

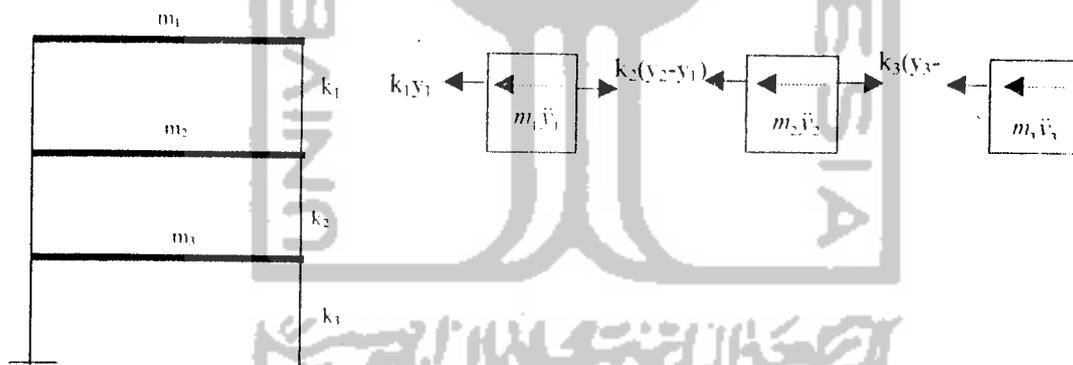
Untuk menghitung frekuensi sudut dan ordinat-ordinat mode shape untuk bangunan yang memiliki derajat kebebasan lebih dari dua, tidak dapat dicari hanya dengan menggunakan determinan (metode Cramer).

Terdapat banyak cara yang dapat dipakai untuk mencari nilai-nilai frekuensi sudut dan mode shape, mulai dari cara yang sederhana tetapi kurang berdaya guna sampai pada cara yang rumit tetapi mempunyai daya guna yang lebih baik. Oleh karena itu masing-masing cara mempunyai keuntungan dan kelemahan sendiri-sendiri. Beberapa cara yang dipakai untuk mencari nilai-nilai tersebut diantaranya adalah:

**3.4.1.a Metode Polinomial**

Metode ini pada dasarnya masih menggunakan persamaan *eigenproblem* sebagaimana dibahas sebelumnya. Untuk mencari *eigenvektor* (nilai-nilai frekuensi sudut) tidak lagi dipakai cara determinan. Cara yang dipakai adalah dengan mentransfer persamaan simultan *eigenproblem* menjadi suatu persamaan polinomial pangkat banyak. Akar-akar persamaan polinomial tersebutlah yang akan dicari yang seterusnya akan menghasilkan nilai-nilai *eigenvektor*. Pada metode ini kelihatan bahwa pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka akan diperoleh persamaan polinomial yang berpangkat banyak pula.

Untuk membahas cara polinomial ini maka dapat ditinjau suatu struktur dengan lantai seperti pada gambar 3.2.



Gambar 3.2 Struktur bangunan dan free body diagram

Berdasarkan keseimbangan gaya-gaya pada *free body* diagram gambar 3.2, maka akan diperoleh persamaan differensial simultan gerakan di bawah ini

$$\begin{aligned}
 m_3 \ddot{y}_3 + c_1 \dot{y}_1 + k_3 y_3 - k_2 (y_2 - y_3) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_3) - k_1 (y_2 - y_1) &= 0, \dots \dots \dots (3.36) \\
 m_1 \ddot{y}_1 + k_1 (y_1 - y_2) &= 0
 \end{aligned}$$

maka persamaan (3.36) dapat ditulis menjadi persamaan yang lebih sederhana seperti di bawah ini,

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{y}_3 + (k_3 + k_2) y_3 - k_2 y_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_3 + (k_2 + k_1) y_2 - k_1 y_1 &= 0 \dots\dots\dots (3.37) \\ m_1 \ddot{y}_1 - k_1 y_2 + k_1 y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan 3.37 dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_3 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_1) & -k_1 \\ 0 & k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.38)$$

Untuk lebih jelasnya mengenai metode polinomial diambil contoh hitungan seperti struktur pada gambar 3.2.

Data struktur :  $m_1 = 1,0 \text{ kg det}^2/\text{cm}$  ;  $m_2 = 1,5 \text{ kgdet}^2/\text{cm}$  ;  $m_3 = 2,0 \text{ kgdet}^2/\text{cm}$

$k_1 = 600 \text{ kg/cm}^2$  ( 2 kolom) ;  $k_2 = 1200 \text{ kg/cm}^2$  (2 kolom)

$k_3 = 1800 \text{ kg/cm}^2$  (2 kolom)

Penyelesaian :

Misalnya dipakai, unit massa  $m = 1 \text{ kgdet}^2/\text{cm}$  dan unit kekakuan  $k = 600 \text{ kg/cm}$  maka matriks massa dan kekakuan menjadi:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.39)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & k & k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.40)$$

Dengan memperhatikan matriks-matriks di atas maka persamaan eigenproblem yang dapat disusun adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 5k - 2\omega^2 m & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1.5\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5.41)$$

Persamaan 5.41 dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} 5 - \frac{2\omega^2}{k/m} & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1.5\frac{\omega^2}{k/m} & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{\omega^2}{k/m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.42)$$

apabila diambil suatu notasi  $\lambda = \frac{\omega^2}{k/m}$ , maka persamaan 3.42 menjadi

$$\begin{bmatrix} 5 - 2\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1.5\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.43)$$

apabila persamaan 3.43 disederhanakan maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} (5 - 2\lambda)\phi_3 - 2\phi_2 &= 0 \\ -2\phi_3 + (3 - 1.5\lambda)\phi_2 - 1.6\phi_1 &= 0 \dots\dots\dots (3.44) \\ -\phi_2 + (1 - \lambda)\phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya bahwa penyelesaian persamaan simultan homogen tidaklah memberikan nilai-nilai yang pasti, tetapi hasil-hasil yang diperoleh hanya merupakan perbandingan antara yang satu dengan yang lain. Oleh karena itu dengan mengambil nilai,

$$\phi_3 = 1 \dots \dots \dots (3.54)$$

Dengan mensubstitusikan nilai persamaan 3.54 ke dalam baris pertama persamaan 3.53 akan diperoleh

$$\phi_2 = (2,5 - \lambda) \dots \dots \dots (3.55)$$

Selanjutnya substitusi persamaan 3.54 dan 3.55 ke dalam baris ke-2 persamaan 3.53 maka akan diperoleh

$$\phi_1 = 1,5\lambda^2 - 6,75\lambda + 5,5 \dots \dots \dots (3.56)$$

Selanjutnya substitusi persamaan 3.54 dan 3.55 ke dalam baris ke-3 persamaan 3.53, setelah disusun akan diperoleh

$$1,5\lambda^3 - 8,25\lambda^2 + 11,25\lambda - 3 = 0 \dots \dots \dots (3.57)$$

Persamaan 3.57 adalah persamaan polinomial pangkat 3 dan nilai yang akan dicari adalah nilai-nilai  $\lambda$  yang merupakan akar persamaan tersebut. Setelah dicari dengan coba-coba atau menggunakan komputer, maka akan diperoleh akar-akarnya berikut nilai percepatan sudut :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0,3515, \text{ maka } \rightarrow \omega_3 &= \sqrt{0,3515 * \frac{600}{1}} = 14,5224 \text{ rad / det} \\ \lambda_1 = 1,6066, \text{ maka } \rightarrow \omega_2 &= \sqrt{1,6066 * \frac{600}{1}} = 31,0500 \text{ rad / det} \dots \dots \dots (3.58) \\ \lambda_1 = 3,5419, \text{ maka } \rightarrow \omega_1 &= \sqrt{3,5419 * \frac{600}{1}} = 46,0992 \text{ rad / det} \end{aligned}$$

Kelemahan-kelemahan yang terdapat pada metode ini diantaranya, yaitu :

1. Kita akan kesulitan mencari koefesien persamaan-persamaan polinomial apabila tingkat yang kita cari terlalu tinggi.

2. Kita akan kesulitan mencari akar-akar persamaan yang jumlahnya tergantung pada jumlah DOF.

### 3.4.1.b Metode Jacobi

Metode solusi dasar Jacobi telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah-masalah matriks yang riil dan simetris. Metode tersebut diusulkan selama satu abad yang lalu dan telah digunakan secara luas. Metode Jacobi ini berusaha mentransformasi suatu matriks  $A$  menjadi matriks diagonal  $A_{k+1}$ . Dalam keadaan ini elemen-elemen diagonal utama matriks  $A_{k+1}$  adalah serupa ortogonal (*schular orthogonal*), sehingga harga-harga eigen dari matriks  $A_{k+1}$  adalah juga harga-harga eigen dari matriks  $A$ . Andaikata  $A_0 = A$  dan  $U_j$  adalah matriks ortogonal yang memenuhi hubungan

$$U_1 = U_1^{-1} * A_0 * U_1 \dots\dots\dots (3.59)$$

$$A_2 = U_2^{-1} * A_1 * U_2 \dots\dots\dots (3.60)$$

atau dalam bentuk umum

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= U_{k+1}^{-1} * A_k * U_{k+1} \dots\dots\dots (3.61) \\ A_{k+1} &= U_{k+1}^{-1} * A * U_{k+1} \end{aligned}$$

yang mana,  $U_k^{-1} = U_1 U_2 U_3 \dots\dots\dots U_k$ , untuk  $k \rightarrow \infty$ , matriks  $A_{k+1}$  menjadi matriks diagonal.

Matriks  $A_{k+1}$  dan matriks  $A$  adalah serupa ortogonal maka dapat disimpulkan bahwa harga-harga eigen dari matriks  $A_{k+1}$  sama dengan harga-harga eigen dari matriks  $A$ . Karena matriks  $A_{k+1}$  (untuk  $k \rightarrow \infty$ ) telah menjadi matriks

diagonal berarti bahwa harga-harga eigen terletak pada elemen-elemen diagonalnya. Masalahnya sekarang adalah bagaimana mentransformasi matriks  $A$  menjadi matriks diagonal  $A_{k+1}$ . Jacobi memperkenalkan cara mentransformasikan tersebut yang sering disebut matriks rotasi. Matriks rotasi  $A_{k+1}$  adalah sebuah matriks diagonal yang diubah menjadi

$$U_{k+1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.62)$$

maksudnya, mula-mula kita punya matriks diagonal, kemudian elemen-elemen untuk baris ke  $i$  dan  $j$  maupun kolom ke  $i$  dan  $j$  diganti dengan  $\cos \alpha$  dan  $\sin \alpha$ . Seperti pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned} U_{ii} &= \cos \alpha & U_{ij} &= -\sin \alpha \\ U_{ji} &= \sin \alpha & U_{jj} &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.63)$$

Sudut  $\alpha$  dicari dari persamaan

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \quad (3.64)$$

Jadi dengan demikian dapat diperoleh elemen-elemen dari matriks  $U_{k+1}^{-1}$  dapat dicari dengan mudah karena  $U_{k+1}$  adalah matriks ortogonal sehingga  $U_{k+1}^{-1} = U_{k+1}^T$ . Dari sini dapat dihitung  $A_{k+1} = U_{k+1}^{-1} * A_k * U_{k+1}$ , untuk  $k = 0 \rightarrow \alpha$ .

Untuk  $k$  besar matriks  $A_{k+1}$  akan berubah menjadi

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & 0 & - & 0 \\ 0 & a_{22}^{(k)} & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & a_{mm}^{(k)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.65)$$

yang berarti harga-harga eigen dari matriks  $A_k$  dan  $A_{k+1}$  adalah

$$\lambda_1 = a_{11}^{(k)} \quad \lambda_2 = a_{22}^{(k)} \quad \lambda_n = a_{nn}^{(k)} \dots\dots\dots (3.66)$$

Vektor eigen dapat diperoleh dengan jalan mengalikan matrik-matrik rotasi yang telah dipakai

$$U_k = U_1 * U_2 * \dots\dots\dots U_k \dots\dots\dots (3.67)$$

Untuk menghindari kesulitan dalam mendapatkan  $\alpha$ , maka penentuan  $\cos \alpha$  dan  $\sin \alpha$  dari  $\tan 2\alpha$  dicari sebagai berikut.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right] \text{ dengan } q > 0 \dots\dots\dots (3.68)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} * \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{p}{2 \cos \alpha \sqrt{p^2 + q^2}} \dots\dots\dots (3.69)$$

### 3.5 Dekomposisi Matriks

Cara menghitung matriks dekomposisi banyak cara, salah satunya dengan menggunakan metode Cholesky. Metode Cholesky ini memanfaatkan teknik dekomposisi  $A = L*U$ , akan tetapi karena untuk matriks simetris.

$$A = A^T \dots\dots\dots (3.70)$$

$$\text{maka, } L*U = (L*U)^T \text{ atau } L*U = U^T * L^T \dots\dots\dots (3.71)$$

yang berarti  $L = U^T$  dan  $U = L^T$ , jadi dekomposisi

$$A = L*U = L*L^T \dots \dots \dots (3.72)$$

Dekomposisi dari matriks A menjadi  $L*L^T$  dapat dilakukan dengan cara yang lebih cepat daripada dekomposisi  $L*U$ . sebagai contoh :

$$A = L*L^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 0 & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{43} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} \dots \dots (3.73)$$

Dari persamaan matriks 3.50 yang harus dicari adalah elemen-elemen  $d_{ij}$  untuk  $i = 2,4$  dan  $j = 1,3$ . Sehingga penyelesaian persamaan matriks 3.50

$$\begin{aligned} a_{11} &= d_{11}^2, a_{21} = d_{21} * d_{11}, a_{31} = d_{31} * d_{11}, a_{41} = d_{41} * d_{11}, a_{22} = d_{21}^2 + d_{22}^2, \\ a_{33} &= d_{31}^2 + d_{32}^2 + d_{33}^2, a_{44} = d_{41}^2 + d_{42}^2 + d_{43}^2 + d_{44}^2, a_{32} = d_{31} * d_{21} + d_{32} * d_{22} \\ a_{42} &= d_{41} * d_{21} + d_{42} * d_{22}, a_{43} = d_{41} * d_{31} + d_{42} * d_{32} + d_{43} * d_{33} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} d_{11} &= \sqrt{a_{11}}, d_{21} = a_{21} / d_{11}, d_{31} = a_{31} / d_{11}, d_{41} = a_{41} / d_{11}, d_{22} = \sqrt{(a_{22} - d_{21}^2)} \\ d_{32} &= (a_{32} - d_{31} * d_{21}) / d_{22}, d_{42} = (a_{42} - d_{41} * d_{21}) / d_{22}, d_{43} = (a_{43} - d_{41} * d_{31}) / d_{22} \\ d_{33} &= \sqrt{(a_{33} - d_{31}^2 - d_{32}^2)}, d_{44} = \sqrt{(a_{44} - d_{41}^2 - d_{42}^2 - d_{43}^2)} \end{aligned}$$

Dalam bentuk umum dapat dituliskan

$$d_{ii} = \frac{a_{ii}}{d_{11}}, \text{ untuk } i = 1, n$$

$$d_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} * \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{ik} * d_{jk} \right] \text{ untuk } i = 3, n \text{ dan } j = 2, n-1 \dots \dots (3.74)$$

$$d_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2} \text{ untuk } i = 1, n$$

### 3.6 Respon tak Linier dari Sistem Berderajat Kebebasan Banyak.

Untuk menyelesaikan sistem berderajat-kebebasan banyak tak linier dengan menggunakan metode Wilson- $\theta$ . Metode ini merupakan modifikasi dari metode percepatan linier langkah demi langkah. Modifikasi yang terdapat pada metode Wilson -  $\theta$  memungkinkan dicapainya stabilitas numerik (*numerical stability*) dari suatu solusi tanpa melihat besarnya selang waktu yang dipilih, dengan alasan inilah metode ini dikatakan stabil tak bersyarat (*unconditionally stable*).

Anggapan dasar dari metode Wilson- $\theta$  adalah percepatan yang bervariasi secara linier dalam selang waktu  $t$  sampai  $t + \theta\Delta t$ , dimana  $\theta \geq 1,0$ . Harga dari faktor  $\theta$  ditentukan untuk mendapatkan suatu proses numerik yang mempunyai stabilitas maksimum dari suatu solusi yang tepat. Telah dibuktikan oleh Wilson bahwa untuk  $\theta \geq 1,38$ , teori ini mutlak tidak stabil.

Persamaan-persamaan yang menyatakan kondisi keseimbangan inkremental untuk sebuah sistem berderajat kebebasan banyak dapat dijabarkan sebagai matriks-matriks ekuivalen dari persamaan inkremental untuk sistem berderajat kebebasan tunggal. Jadi dengan memperhatikan kondisi-kondisi keseimbangan dinamis yang didefinisikan pada saat  $t_i$  dan  $t_i + \tau$ ,  $\tau = \theta\Delta t$ , kita dapatkan persamaan inkremental,

$$M\hat{\Delta}y_i + C(\dot{y})\hat{\Delta}y_i + K(y)\hat{\Delta}y_i = \hat{\Delta}F_i \quad \dots \dots \dots (3.75)$$

di mana tanda *circumflex* diatas  $\Delta$  menyatakan pertambahan/inkremental yang berhubungan dengan pertambahan selang waktu  $\tau = \theta\Delta t$ . Jadi :

$$\hat{\Delta}y_i = y_i(t_i + \tau) - y_i(t_i) \dots\dots\dots (3.76)$$

$$\hat{\Delta}\dot{y}_i = \dot{y}_i(t_i + \tau) - \dot{y}_i(t_i) \dots\dots\dots (3.77)$$

$$\hat{\Delta}\ddot{y}_i = \ddot{y}_i(t_i + \tau) - \ddot{y}_i(t_i) \dots\dots\dots (3.78)$$

dan

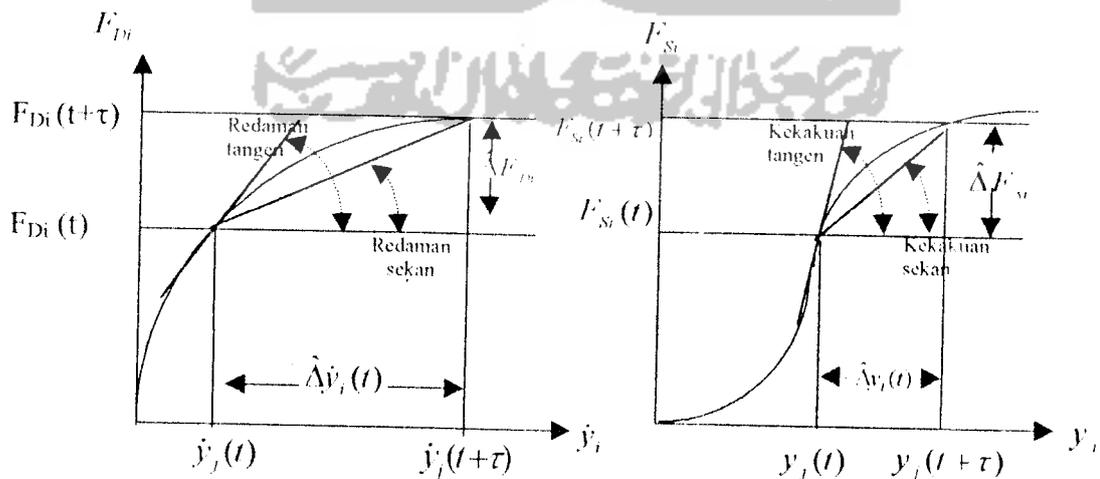
$$\hat{\Delta}F_i = F(t_i + \tau) - F(t_i) \dots\dots\dots (3.79)$$

Dengan menulis persamaan 3.79 dianggap bahwa, kekakuan dan redaman yang didapat untuk setiap selang waktu, lebih merupakan harga-harga awal dari tangen sehubungan dengan lengkungan yang terlihat pada gambar 3.3, daripada hanya kemiringan garis sekan yang menggambarkan proses interaksi. Jadi koefisien kekakuan didefinisikan sebagai

$$k_{ij} = \frac{dF_{si}}{dy_j} \dots\dots\dots (3.80)$$

dan koefisien redaman sebagai

$$c_{ij} = \frac{dF_{Di}}{d\dot{y}_j} \dots\dots\dots (3.81)$$

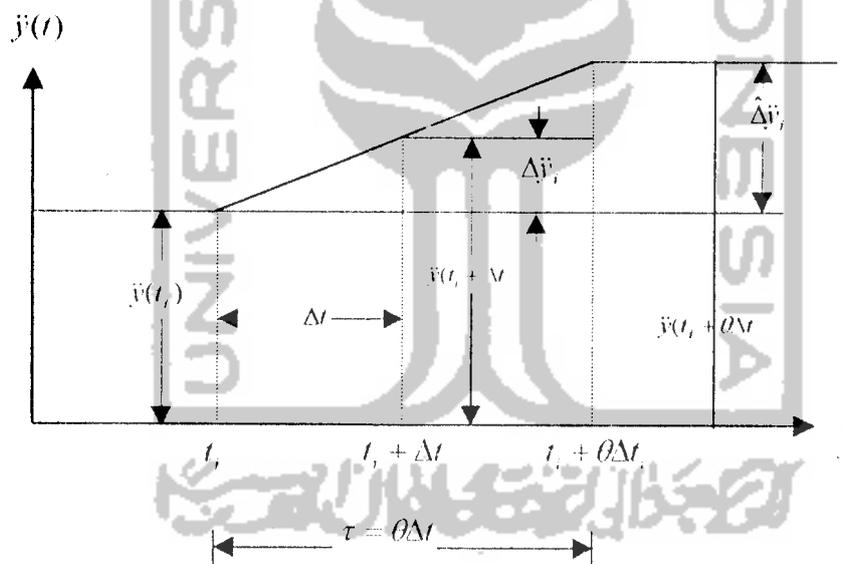


Gambar 3.3 Definisi dari koefisien pengaruh, (a). Redaman linier tak linier  $C_{ij}$ , (b). Kekakuan tak linier  $C_{ij}$ .

di mana  $F_{s_i}$  dan  $F_{d_i}$  adalah gaya elastis dan gaya redaman pada koordinat nodal  $i$  dan  $y_j$  serta  $\dot{y}_j$  adalah perpindahan dan kecepatan pada koordinat nodal  $j$ .

**3.6.1 Metode Wilson- $\theta$**

Seperti yang telah dikatakan sebelumnya, integrasi dari persamaan gerak tak linier dengan menggunakan metoda percepatan linier langkah demi langkah dengan bentuk pengembangan oleh Wilson, didasarkan pada anggapan bahwa percepatan dapat dinyatakan sebagai fungsi linier selama selang waktu  $\tau = \theta\Delta t$  seperti terlihat pada gambar (3.4).



Gambar 3.4. Anggapan tentang percepatan linier dalam suatu pertambahan selang waktu.

Dari gambar 3.4, dapat ditulis suatu bentuk linier untuk percepatan dalam suatu pertambahan selang waktu sebagai

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_i + \frac{\Delta\ddot{y}_i}{\tau}(t - t_i) \dots\dots\dots(3.82)$$

dimana  $\hat{\Delta}y_i$  diberikan oleh persamaan  $\hat{\Delta}y_i = y_i(t_i + \tau) - y_i(t_i)$ . Dengan mengintegrasikan persamaan 3.82 sebanyak dua kali, akan menghasilkan

$$y_i(t) = y_i + \dot{y}_i(t-t_i) + \frac{1}{2} \frac{\hat{\Delta}y_i}{\tau} (t-t_i)^2 \dots\dots\dots(3.83)$$

dan

$$y_i(t) = y_i + \dot{y}_i(t-t_i) + \frac{1}{2} \ddot{y}_i(t-t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\hat{\Delta}y_i}{\tau} (t-t_i)^3 \dots\dots\dots(3.84)$$

dengan mengevaluasi persamaan (3.83) dan (3.84) pada akhir dari suatu selang waktu yaitu  $t = t_i + \tau$ , didapat

$$\hat{\Delta}y_i = \dot{y}_i \tau + \frac{1}{2} \hat{\Delta}y_i \tau \dots\dots\dots(3.85)$$

dan

$$\hat{\Delta}y_i = \dot{y}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \tau^2 + \frac{1}{6} \hat{\Delta}y_i \tau^2 \dots\dots\dots(3.86)$$

di mana  $\hat{\Delta}y_i$  dan  $\hat{\Delta}y_i$  didefinisikan oleh persamaan  $\hat{\Delta}y_i = y_i(t_i + \tau) - y_i(t_i)$  dan

$\hat{\Delta}y_i = y_i(t_i + \tau) - y_i(t_i)$ . Sekarang telah diselesaikan persamaan (3.81) untuk suatu

pertambahan percepatan (*incremental acceleration*)  $\hat{\Delta}y_i$ , kemudian disubstitusikan

ke dalam persamaan (3.80), maka didapatkan

$$\hat{\Delta}y_i = \frac{6}{\tau^2} \hat{\Delta}y_i - \frac{6}{\tau} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \dots\dots\dots(3.87)$$

dan

$$\hat{\Delta}y_i = \frac{3}{\tau} \hat{\Delta}y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\tau}{2} \ddot{y}_i \dots\dots\dots(3.88)$$

akhirnya, dengan mensubstitusikan persamaan 3.87 dan 3.88 ke dalam persamaan gerak inkremental yaitu  $M\hat{\Delta}\ddot{y}_i + C(\dot{y})\hat{\Delta}\dot{y}_i + K(y)\hat{\Delta}y_i = \hat{\Delta}F_i$ , akan dihasilkan sebuah persamaan untuk pertambahan perpindahan (*incremental displacement*)  $\hat{\Delta}y_i$ , yang dapat ditulis sebagai

$$\bar{K}_i \hat{\Delta}y_i = \bar{\Delta}F_i \dots \dots \dots (3.89)$$

di mana

$$\bar{K}_i = K_i + \frac{6}{\tau^2} M + \frac{3}{\tau} C_i \dots \dots \dots (3.90)$$

dan

$$\bar{\Delta}F_i = \hat{\Delta}F_i + M \left( \frac{6}{\tau} \dot{y}_i + 3\ddot{y}_i \right) + C_i \left( 3\dot{y}_i + \frac{\tau}{2} \ddot{y}_i \right) \dots \dots \dots (3.91)$$

Persamaan (3.89) mempunyai bentuk yang sama seperti persamaan keseimbangan statis inkremental dan dapat diselesaikan untuk mendapatkan pertambahan perpindahan  $\hat{\Delta}y_i$  dengan hanya menyelesaikan persamaan linier dari suatu sistem. Untuk mendapatkan pertambahan percepatan  $\hat{\Delta}\ddot{y}_i$  selama suatu selang waktu, perlu kita substitusikan harga  $\hat{\Delta}y_i$  yang didapat dari solusi persamaan  $\bar{K}_i \hat{\Delta}y_i = \bar{\Delta}F_i$ , ke dalam persamaan  $\hat{\Delta}\ddot{y}_i = \frac{6}{\tau^2} \hat{\Delta}y_i - \frac{6}{\tau} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i$ .

Pertambahan percepatan  $\hat{\Delta}\ddot{y}_i$  untuk selang waktu normal  $\Delta t$ , didapat dengan interpolasi linier. Jadi

$$\Delta\ddot{y} = \frac{\hat{\Delta}\ddot{y}}{\theta} \dots \dots \dots (3.92)$$

Untuk menghitung pertambahan kecepatan  $\hat{\Delta}j_i$  dan pertambahan perpindahan  $\hat{\Delta}y_i$  sehubungan dengan selang waktu  $\tau$  dalam persamaan (3.85) dan (3.86), yaitu

$$\Delta j_i = j_i \Delta t + 1/2 \Delta j_i \Delta t \quad (3.93)$$

dan

$$\Delta y_i = j_i \Delta t + 1/2 j_i \Delta t^2 + 1/6 \Delta j_i \Delta t^2 \quad (3.94)$$

Akhirnya, perpindahan  $y_{i+1}$  dan kecepatan  $j_{i+1}$  pada akhir dari selang waktu normal, dihitung dengan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (3.95)$$

dan

$$j_{i+1} = j_i + \Delta j_i \quad (3.96)$$

maka percepatan awal untuk selang waktu berikutnya dihitung dari kondisi keseimbangan dinamis pada waktu  $t + \Delta t$ , jadi

$$\ddot{y}_{i+1} = M^{-1} [E_{i+1} - C_{i+1} \dot{y}_{i+1} - K_{i+1} y_{i+1}] \quad (3.97)$$

di mana perkalian  $C_{i+1} \dot{y}_{i+1}$  serta  $K_{i+1} y_{i+1}$  menyatakan vektor-vektor gaya redaman dan gaya kekakuan pada akhir selang waktu  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . Bila vektor perpindahan, kecepatan dan percepatan telah ditentukan pada waktu  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , maka proses perhitungan diulangi untuk mendapatkan besaran-besaran tersebut di atas pada selang waktu berikutnya  $t_{i+2} = t_{i+1} + \Delta t$  dan proses ini dilanjutkan sampai dengan waktu akhir yang diinginkan.

Percepatan linier langkah demi langkah ini mempunyai dua pendekatan dasar yaitu:

- (1) Percepatan dianggap bervariasi linier sepanjang selang waktu
- (2) Karakteristik redaman dan kekakuan dari struktur dievaluasi pada awal selang waktu dan dianggap tetap konstan sepanjang selang waktu tersebut.

Algoritma dari proses iterasi suatu sistem linier dengan metode wilson- $\theta$  dan penggunaan metode ini akan dibahas pada bagian berikut ini.

### 3.6.2 Algoritma Untuk Solusi Langkah Demi Langkah Dari Sistem Suatu Linier Dengan Menggunakan Metode Integrasi Wilson- $\theta$ (Algoritma For Step By Step Solution Of A Linier System Using The Wilson - $\theta$ Integration Method).

#### 3.6.2.1 Pendahuluan

1. Susunlah matriks kekakuan  $K$ , matrik massa  $M$  dan matrik redaman  $C$  dari sistem.
2. Tentukan harga-harga awal untuk perpindahan  $y_0$ , kecepatan  $\dot{y}_0$ , dan gaya  $F_0$ .
3. Hitung percepatan awal  $\ddot{y}_0$  dari  $M\ddot{y}_0 = F_0 - C\dot{y}_0 - Ky_0$ .
4. Pilih suatu selang waktu  $\Delta t$ , faktor  $\theta$  (biasanya diambil sebesar 1,4) dan hitung konstanta-konstanta  $\tau, a_1, a_2, a_3$ , dan  $a_4$  dari hubungan-hubungan berikut,  $\tau = \theta\Delta t$ ;  $a_1 = \frac{3}{\tau}$ ;  $a_2 = \frac{6}{\tau}$ ;  $a_3 = \frac{\tau}{2}$ ;  $a_4 = \frac{6}{\tau^2}$ .
5. Susunlah matriks kekakuan efektif  $\bar{K}$ , yaitu

$$\bar{K} = K + a_4M + a_1C. \dots\dots\dots(3.90)$$

### 3.6.2.2 Untuk setiap selang waktu.

1. Dengan interpolasi linier, hitunglah pertambahan beban  $\hat{\Delta F}_i$  untuk selang waktu  $t_i$  sampai dengan  $t_i + \tau$ , dari hubungan berikut ini.

$$\hat{\Delta F}_i = F_{t+1} + (F_{t+2} - F_{t+1})(\theta - 1) - F_i \dots \dots \dots (3.98)$$

2. Hitung pertambahan beban efektif  $\overline{\Delta F}_i$  untuk selang waktu  $t_i$  sampai dengan  $t_i + \tau$  dari hubungan berikut ini

$$\overline{\Delta F}_i = \hat{\Delta F}_i + (a_2 M + 3C)\dot{y}_i + (3M + a_3 C)\ddot{y}_i \dots \dots \dots (3.91)$$

3. Selesaikan bentuk berikut ini untuk mendapatkan pertambahan perpindahan  $\hat{\Delta y}_i$ .

$$\overline{K} \hat{\Delta y}_i = \overline{\Delta F}_i \dots \dots \dots (3.89)$$

4. Hitung pertambahan percepatan untuk pertambahan selang waktu  $\tau$ , dari hubungan berikut ini

$$\hat{\Delta \ddot{y}}_i = a_4 \hat{\Delta y}_i - a_2 \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \dots \dots \dots (3.87)$$

5. Hitung pertambahan percepatan untuk selang waktu normal dari  $\Delta \ddot{y} = \frac{\hat{\Delta \ddot{y}}}{\theta}$ .

6. Hitung pertambahan kecepatan  $\Delta \dot{y}_i$  dan pertambahan perpindahan  $\Delta y_i$  dari waktu  $t_i$  sampai dengan  $t_i + \Delta t$ , dari hubungan berikut ini,

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{y}_i \Delta t, \dots \dots \dots (3.93)$$

$$\Delta y_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{y}_i \Delta t^2 \dots \dots \dots (3.94)$$

7. Hitung perpindahan dan kecepatan pada waktu  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  dengan menggunakan

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y \dots\dots\dots(3.95)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \dots\dots\dots(3.96)$$

8. Hitung percepatan  $\ddot{y}_{i+1}$  pada waktu  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  langsung dari persamaan keseimbangan dari gerak, yaitu

$$M\ddot{y}_{i+1} = F_{i+1} - C\dot{y}_{i+1} - Ky_{i+1} \dots\dots\dots(3.97)$$

