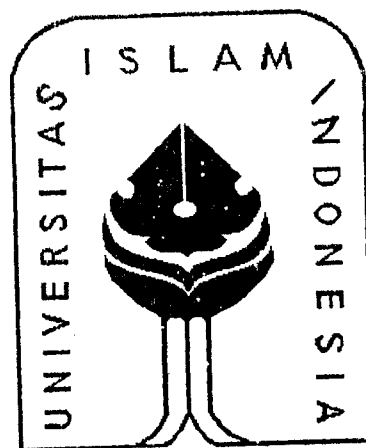


HADIAH	
TGL. TER. :	12-05-07
NO. URUT :	006 / TA / STK / 07
NO. INDIK :	97 006
E120003169001	

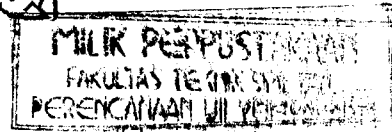
TUGAS AKHIR

**STUDI KOMPARASI ANALISIS TEGANGAN DENGAN
SAP90 DAN ISOPARAMETRIK KUADRILATERAL
ELEMEN HINGGA**

*(Comparative Study of Stresses Analysis Using SAP90 and Isoparametric
Quadrilateral Finite Elements)*



الجامعة الإسلامية
الاندونيسية



Oleh :

Nama : Novi Kurniawanta
No. Mhs. : 92 310 302
Nirm. : 920051013114120302

Nama : Mohammad Fajar Aditya
No. Mhs. : 92 310 304
Nirm. : 920051013114120304

**JURUSAN TEKNIK SIPIL
FAKULTAS TEKNIK SIPIL DAN PERENCANAAN
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA
1997**



LEMBAR PENGESAHAN
TUGAS AKHIR
STUDI KOMPARASI ANALISIS TEGANGAN DENGAN
SAP90 DAN ISOPARAMETRIK KUADRILATERAL
ELEMEN HINGGA

*(Comparative Study of Stresses Analysis Using SAP90 and Isoparametric
Quadrilateral Finite Elements)*

Disusun Oleh :

Nama : Novi Kurniawanta
No. Mhs. : 92 310 302
Nirm. : 920051013114120302

Nama : Mohammad Fajar Aditya
No. Mhs. : 92 310 304
Nirm. : 920051013114120304

Talah diperiksa dan disetujui oleh
Tim Pembimbing :

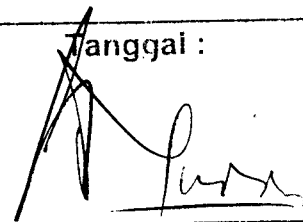
Pembimbing I

IR. MOCHAMMAD TEGUH, MSCE

Pembimbing II

IR. TADJUDDIN BMA, MS

Tanggal :



Tanggal : 23-5-97

PRAKATA

Bismillaahirrohmaanirrohiim,

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji syukur dipanjatkan kepada Allah SWT yang telah memberi hidayah, karunia dan nikmat tak terhingga, sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.

Sesuai dengan kurikulum di Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan, Universitas Islam Indonesia Yogyakarta, bahwa untuk melengkapi persyaratan guna mencapai derajat sarjana Strata Satu diwajibkan melaksanakan Tugas Akhir.

Pada kesempatan ini tidak lupa diucapkan banyak terimakasih kepada semua pihak yang telah turut membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini, terutama kepada :

1. Bapak Ir. Mochammad Teguh, MSCE , selaku Dosen Pembimbing I,
2. Bapak Ir. Tadjuddin BMA, MS , selaku Dosen Pembimbing II.
3. Bapak Ir. Bambang Sulistiono, MSCE , selaku Ketua Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan, Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta.
4. Para dosen dan karyawan Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan, Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini baik secara langsung maupun tidak langsung.
5. Rekan-rekan yang tidak dapat kami sebutkan satu persatu.

Semoga segala bantuan dan saran yang telah diberikan kepada kami dapat menjadi amal sholeh dan dilabaskan dengan lipat ganda pahala oleh Allah SWT.

Disadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan, demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Akhirnya sangat diharapkan semoga Tugas Akhir ini dapat berguna bagi penulis pribadi maupun para pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, Maret 1997

Penulis.

DAFTAR ISI

LEMBAR JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
PRAKATA	iii
DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GRAFIK	x
ABSTRAK	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Metode Penelitian	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Metode Elemen Hingga	6
2.1.1 Persamaan Matriks	7
2.1.2 Teori Elastisitas	7
2.1.3 Hubungan Regangan - Anjakan	9
2.1.4 Hubungan Tegangan - Regangan	11
2.2 Formula Isoparametrik	17
2.2.1 Elemen Isoparametrik	17
2.2.2 Koordinat Alami (<i>Natural Coordinate</i>)	18
2.2.3 Elemen Isoparametrik Linier Bidang	20

2.2.4	Integrasi Numerik	25
2.2.5	Elemen Kuadrilateral	28
2.3	Program SAP90	32
2.3.1	Definisi	32
2.3.2	Aplikasi	33
BAB III	ANALISIS MODEL STRUKTUR GORONG-GORONG DENGAN SAP90 DAN METODE ELEMEN HINGGA	35
3.1	Umum	35
3.2	Data Model Struktur Gorong-gorong	35
3.3	Analisis SAP90	36
3.3.1	Masukan Data Struktur Gorong-gorong	37
3.3.2	File *.SAP	38
3.3.3	File *.SOL	44
3.4	Analisis Metode Elemen Hingga	50
3.5	Analisis Rasio Tegangan	55
3.6	Rasio Tegangan Struktur Gorong-gorong terhadap beban hidup (b_y)	56
3.6.1	Daerah A - B	56
3.6.2	Daerah C - D	63
3.6.3	Daerah E - F	77
BAB IV	ANALISIS STRUKTUR MENARA AIR DENGAN SAP90	84
4.1	Umum	84
4.2	Data Struktur Menara Air	84
4.3	Keluaran Perhitungan SAP90	87
4.3.1	Masukan Data	87
4.3.2	Keluaran Data	89
BAB V	PEMBAHASAN	100
5.1	Umum	100
5.2	Struktur Gorong-gorong dengan SAP90	100

5.3 Komparasi Rasio Tegangan Struktur Gorong-gorong antara SAP90 dan Metode Elemen Hingga	102
5.4 Struktur Menara Air	105
BAB VI. KESIMPULAN DAN SARAN	106
6.1 Kesimpulan	106
6.2 Saran-saran	106
DAFTAR PUSTAKA	108
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Gorong-gorong	4
Gambar 2.1 Tegangan dan gaya benda per satuan volume yang bekerja pada elemen bidang yang sangat kecil, yang mempunyai tebal konstan t . Notasi, menunjukkan turunan parsial. Sebagai contoh $\sigma_{xx} = \partial\sigma_x / \partial x$.	8
Gambar 2.2 Anjakan dan distorsi panjang dx dan dy .	10
Gambar 2.3 (a) Tegangan dua dimensi, dan (b) Tegangan dalam arah miring	12
Gambar 2.4 Koordinat Natural untuk Elemen Garis	19
Gambar 2.5 Koordinat Alami untuk Kuadrilateral	21
Gambar 2.6 Luas yang sangat kecil dinyatakan dalam Koordinat Alami	25
Gambar 2.7 Titik integrasi untuk kuadrilateral : (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$ (untuk setiap arah)	28
Gambar 2.8 Elemen Q4	29
Gambar 3.1 Model Struktur Gorong-gorong	36
Gambar 3.2 Jaringan elemen pada SAP90	49
Gambar 3.3 Plot pembebanan pada SAP90	49
Gambar 3.4 Anjakan Gorong-gorong hasil dari SAP90	50
Gambar 3.5 Jaringan segitiga regangan konstan, program PSCST	52
Gambar 3.6 Jaringan Q4, program PSQ4	53
Gambar 3.7 Jaringan Q8, program PSQ8	53
Gambar 4.1 Menara Air	85
Gambar 4.2 Tampak tiga dimensi menara air	86

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Koordinat Titik Nodal Untuk Elemen Q4	30
Tabel 3.1 Tabel Rasio Tegangan Daerah A - B	63
Tabel 3.2 Tabel Rata-rata Rasio Tegangan SAP90 Daerah C - D	76
Tabel 3.3 Tabel Rasio Tegangan Daerah C - D	77
Tabel 3.4 Tabel Rasio Tegangan Daerah E - F	83

Abstrak

Tuntutan kebutuhan arsitektur untuk menggunakan bentuk yang bervariasi pada struktur bangunan menjadikan masalah tersendiri dalam menentukan analisis strukturnya. Untuk mengatasi masalah ini diperlukan suatu metode yang mampu menganalisis struktur yang bervariasi tersebut dengan hasil yang akurat, disamping kecepatan dalam menganalisis masalah tersebut juga diperlukan. Solusi yang paling tepat dari masalah di atas adalah dengan menggunakan program komputer yang aplikatif dan memadai yaitu program SAP90, karena pada program SAP90 tersebut digunakan Metode Elemen Hingga sebagai dasar analisisnya. Dalam analisis strukturnya, Metode Elemen Hingga memodelkan struktur dengan menggunakan tipe elemen tertentu. Elemen isoparametrik kuadrilateral adalah salah satu tipe elemen yang mampu memodelkan struktur lengkung dan membentuk jaring tidak lurus, yang sering menjadi masalah dalam analisis struktur. Program SAP90 mempunyai kemampuan untuk menganalisis struktur lengkung dengan membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil yang datar. Semakin banyak pembagian elemen semakin akurat hasil analisis struktur yang didapat. Model struktur gorong-gorong dimasukkan pada program SAP90 untuk dicari analisis strukturnya. Hasil rasio tegangan dari program SAP90 dibandingkan dengan Formula Isoparametrik Kuadrilateral Elemen Hingga. Dari perbandingan tersebut diketahui bahwa program SAP90 mempunyai akurasi yang tidak jauh berbeda dengan Formula Isoparametrik Elemen Kuadrilateral 4 Elemen Hingga. Oleh sebab itu program SAP90 dapat dijadikan salah satu alternatif program yang aplikatif dan memadai.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada umumnya perencanaan bangunan teknik sipil menggunakan analisis struktur statis tertentu maupun statis tak tentu (metode klasik), untuk analisis tegangan struktur kerangka modern dipakai metode-metode seperti defleksi lereng (*slope deflection*) dan momen distribusi. Pada metode klasik, struktur tersebut dibagi menjadi elemen-elemen komponen yang selanjutnya setiap komponen diperiksa secara terpisah, dan akhirnya sifat-sifat kekakuan ditetapkan. Bagian-bagian tersebut dirakit atau dipasang, sehingga hukum-hukum kesetimbangan dan syarat kesinambungan fisis di setiap daerah pertemuan dapat dilaksanakan. Pada kasus-kasus yang sederhana, metode klasik ini dapat dijadikan sebagai pedoman perencanaan, akan tetapi untuk tingkat permasalahan yang lebih kompleks seperti pada plat cangkang atau struktur sejenis lainnya, analisis tersebut di atas masih terdapat kelemahannya, bahkan dalam permasalahan yang lebih kompleks metode klasik ini sudah tidak dapat dipakai lagi.

Masalah-masalah bangunan teknik sipil yang berbentuk lengkung sering dijumpai dalam permasalahan plat cangkang dan lain-lain. Jika masalah tersebut diselesaikan dengan metode-metode klasik menunjukkan bahwa masalah ini berupa persamaan diferensial parsial yang sulit untuk diselesaikan, karena geometrik dan pembebanannya terlalu kompleks. Secara singkat, banyak sekali masalah yang terlalu kompleks untuk dipecahkan. Untuk itu diperlukan solusi numerik, dan Metode Elemen Hingga merupakan salah satu metode numerik yang cukup memadai.

Untuk mengatasi kelemahan-kelemahan pada analisis struktur statis tak tentu maupun statis tertentu, diperkenalkan Metode Elemen Hingga (*Finite Element Method*). Metode Elemen Hingga adalah prosedur numerik untuk memecahkan

masalah mekanika kontinum dengan ketelitian yang baik, yang dapat diterima oleh para rekayasawan.

1.2 Permasalahan

Pembagian domain menjadi subdomain dengan jumlah yang banyak akan membutuhkan solusi numerik yang kompleks, yang akan menimbulkan kesulitan bila diselesaikan secara manual.

Pemilihan tipe elemen yang kurang tepat pada suatu struktur akan berpengaruh terhadap keluaran yang kurang akurat, terutama untuk struktur pelat cangkang (*Shell*), kubah (*Dome*) atau silindris.

Elemen yang bisa diselesaikan dengan keluaran yang akurat oleh program SAP90 adalah elemen bidang datar, oleh karena itu bila terdapat permasalahan elemen bidang lengkung harus dibuat sedemikian hingga elemen tersebut berbentuk elemen bidang datar yaitu dengan cara membagi elemen bidang lengkung tersebut menjadi elemen-elemen kecil yang berupa elemen bidang datar.

Untuk melaksanakan korparasi antara elemen isoparametrik kuadrilateral dengan SAP90 diperlukan *verifikasi* permasalahan yang cukup mewakili, kemudian diambil model struktur gorong-gorong untuk verifikasinya karena struktur tersebut dapat menggunakan elemen kuadrilateral sebagai analisisnya.

Untuk menyelesaikan struktur yang lebih kompleks, diambil model struktur Menara Air sebagai kasus yang diselesaikan dengan menggunakan tipe elemen isoparametrik kuadrilateral.

1.3 Batasan Masalah

Mengingat permasalahan mengenai pemakaian Metode Elemen Hingga sangat luas ditambah keterbatasan waktu dan kemampuan, maka obyek permasalahan dibatasi, meliputi hal-hal sebagai berikut ini :

1. Model struktur yang dianalisis untuk verifikasi adalah struktur gorong-gorong dua dimensi dengan jari-jari 3 meter, dengan ketebalan rata-rata 3 meter.
2. Gaya angin dan gaya gempa tidak diperhitungkan.
3. Beban yang bekerja pada struktur tersebut hanya beban statik saja.
4. Tipe elemen yang dipakai pada perhitungan rasio tegangan dari model struktur adalah elemen kuadrilateral dengan formula isoparametrik .
5. Toleransi kesalahan diambil sebesar 5 % .
6. Tekanan tanah aktif tidak diperhitungkan.
7. Diambil model struktur menara air yang lebih kompleks sebagai aplikasi analisis struktur 3 dimensi.
8. Pada analisis struktur menara air tidak dilakukan perhitungan rasio tegangan .

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan utama penelitian ini adalah untuk memperkenalkan pemakaian Metode Elemen Hingga dalam menganalisis struktur kompleks yang tidak dapat diselesaikan oleh mekanika klasik dengan menganbil satu tipe elemen isoparametrik kuadrilateral.

Tujuan lain penelitian ini adalah untuk mengetahui akurasi rasio tegangan jika dipakai tipe elemen yang berbeda.

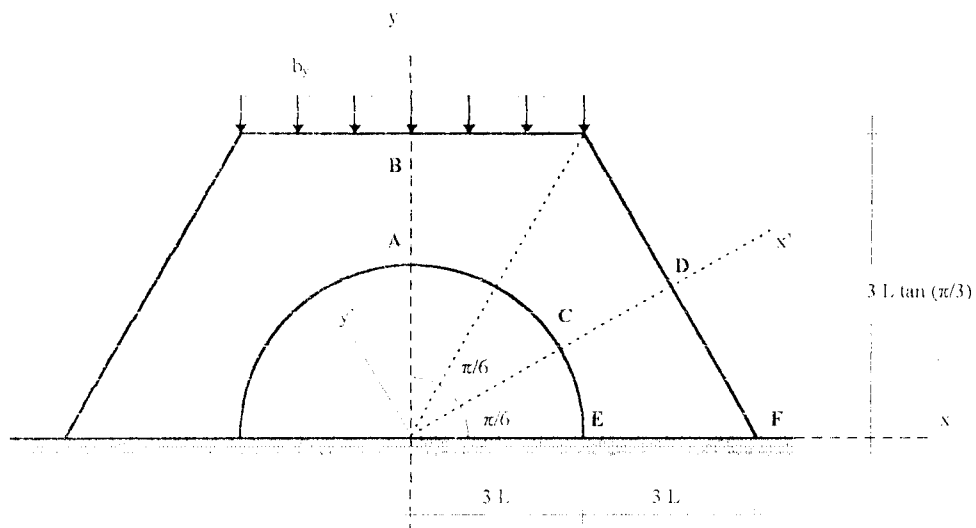
1.5 Manfaat Penelitian

Diharapkan dapat memilih tipe elemen yang tepat dalam mendiskritisasi domain menjadi subdomain pada struktur yang kompleks dengan menggunakan Metode Elemen Hingga.

Diharapkan dapat menyelesaikan masalah persamaan matematik menjadi persamaan numerik yang banyak dijumpai pada struktur kompleks dengan Metode Elemen Hingga.

1.6 Metode Penelitian

Pada tugas akhir ini dilakukan studi komparasi, yaitu membandingkan Metode Elemen Hingga dengan program aplikasi teknik sipil *Structure Analysis Program 90* (SAP90). Untuk itu diambil suatu kasus tertentu yang dianggap dapat mewakili struktur pada umumnya, dalam hal ini dipakai struktur gorong-gorong yang merupakan struktur plat cangkang, seperti dalam gambar 1.1, struktur ini diadopsi dari buku *William Weaver, Jr. dan Paul R. Johnston, 1984* sebagai bahan referensi terhadap hasil-hasil yang dianalisis dengan menggunakan tipe elemen isoparametrik kuadrilateral dan SAP90.



Gambar 1.1. Gorong-gorong

dengan :

$E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$	$b_y = 5 \times 10^7 \text{ kN/m}$
$L = 1 \text{ m}$	$\nu = 0,3$
$t = 1 \text{ m}$	

Struktur di atas berdasarkan program PSQ4 (*Program Structural Quadrilateral Four*) elemen Q4 (kuadrilateral 4) isoparametrik, PSQ8 (*Program Structural Quadrilateral Eight*) elemen Q8 (kuadrilateral 8) isoparametrik dan PSCST (*Program Structural Constant Strain Triangle*) elemen segitiga regangan konstan, menghasilkan rasio tegangan dengan beban b_y seperti terlihat pada gambar 3.1.

Dengan menggunakan SAP90, struktur tersebut dihitung ulang dengan elemen segiempat dan dengan kondisi pembebanan, modulus elastisitas, poisson rasio, dan kondisi lainnya sama untuk mendapatkan rasio tegangan.

Mendapatkan rasio tegangan adalah dengan mengolah kasus gorong-gorong dengan program SAP90, kemudian keluaran program SAP90 dianalisis dengan menggunakan tipe elemen isoparametrik kuadrilateral, karena tipe elemen ini keunggulan utamanya adalah sisi-sisi yang tidak harus lurus dan menggunakan koordinat khusus. Hasil-hasil rasio tegangan kemudian diplot pada satu grafik, sehingga dapat diketahui derajat akurasinya.

Berdasarkan perhitungan program SAP90 untuk plat cangkang (*shell*) dihasilkan anjakan, momen, gaya-gaya pada joint. Dengan menggunakan formula isoparametrik elemen kuadrilateral dihitung regangan dan kemudian dihitung tegangan pada elemen A ke B, C ke D dan E ke F. Tegangan elemen hasil perhitungan ini kemudian dibagi dengan beban hidup (b_y), maka didapat rasio tegangan elemen terhadap b_y .

Rasio tegangan elemen terhadap b_y keluaran dari perhitungan SAP90 kemudian dibandingkan dengan keluaran program PSCST, PSQ4 dan PSQ8 (*William Weaver jr dan Paul R Johnston, 1984*). Untuk mengetahui kapabilitas (kemampuan) analisis struktur yang lebih kompleks dari program SAP90, maka diambil struktur menara air 3 dimensi sebagai kasusnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Elemen Hingga

Konsep dasar yang melandasi metode elemen hingga yaitu prinsip diskritisasi, yang sebenarnya sudah dipergunakan dalam banyak usaha manusia, untuk dapat melihat atau memahami benda-benda di sekelilingnya di alam semesta dalam bentuk keseluruhan atau totalitas. Proses diskritisasi adalah proses pembagian benda menjadi sejumlah benda kecil yang sesuai, yang dinamakan elemen-elemen hingga. Perpotongan antara sisi-sisi elemen dinamakan simpul atau titik simpul, dan permukaan antara elemen-elemen disebut garis simpul dan bidang simpul. Sampai seberapa kecil pembagian elemen-elemen yang dipilih tergantung dari ketelitian yang akan didapatkan. Jenis elemen yang digunakan tergantung dari karakteristik rangkaian kesatuan dan idealisasi yang dipilih. Sebagai contoh, jika suatu struktur diidealisasikan sebagai suatu garis satu dimensi, maka elemen yang digunakan adalah suatu elemen garis. Untuk domain-domain dua dimensi, dapat digunakan elemen segitiga dan segiempat, sedangkan untuk idealisasi tiga dimensi, dapat dipakai suatu elemen prisma segienam (*hexahedron*) dengan kekhususan yang berbeda.

Domain-domain tersebut dapat dibagi-bagi ke dalam beberapa bagian yang teratur pada bagian dalam, akan tetapi bila batas benda yang ada ternyata tidak teratur, maka dapat dibentuk provisi khusus. Dalam banyak hal, batas tak teratur dapat didekati dengan sejumlah garis lurus. Sebaliknya, dalam banyak persoalan lainnya, mungkin perlu memakai fungsi matematis dengan orde secukupnya untuk mendeteksi batas yang ada. Sebagai contoh, jika bentuk batas adalah serupa dengan suatu kurva parabola, maka dapat dipakai suatu fungsi kuadratis orde dua untuk

mendekati batas tersebut. Ide inilah yang menimbulkan terbentuknya formula isoparametrik.

Elemen isoparametrik sangat berguna untuk memodelkan struktur yang tepinya lengkung, dan membentuk jaring yang tidak lurus. Karena dengan elemen isoparametrik dimungkinkan adanya elemen quadrilateral yang tidak segiempat dan sisi-sisi elemen tidak harus lurus. Elemen isoparametrik ini telah terbukti efektif dalam masalah elastisitas dua dan tiga dimensi, analisis plat cangkang, dan juga aplikasi nonstruktural.

2.1.1 Persamaan Matriks

Anjakan atau rotasi suatu titik simpul dapat didefinisikan sebagai derajat kebebasan (*degree of freedom, d.o.f*). Dengan demikian untuk sebuah elemen dengan n derajat kebebasan (*d.o.f*) dapat dituliskan persamaan :

$$\begin{aligned}
 k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + \dots + k_{1n}d_n &= r_1 \\
 k_{21}d_1 + k_{22}d_2 + \dots + k_{2n}d_n &= r_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 k_{n1}d_1 + k_{n2}d_2 + \dots + k_{nn}d_n &= r_n \dots\dots\dots (2.1)
 \end{aligned}$$

dengan d_i merupakan d.o.f ke i , r_i adalah gaya atau momen padanannya, yang bekerja pada elemen. k_{ij} adalah koefisien kekakuan. Persamaan 2.1 dapat ditulis sebagai :

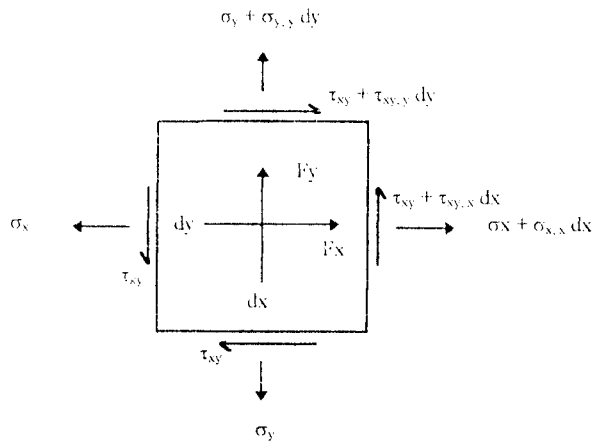
$$[k] \{d\} = \{r\} \dots\dots\dots (2.2)$$

dengan $[k]$ adalah Matriks kekakuan elemen, $\{d\}$ adalah vektor anjakan titik simpul elemen dan $\{r\}$ adalah vektor beban titik simpul elemen.

2.1.2 Teori Elastisitas

Pada Metode Elemen Hingga, akibat deformasi benda diasumsikan tidak terjadi retak, nekah dan juga tidak terjadi tumpang tindih antar bagian-bagiannya. Hal ini

dapat terjadi pada benda-benda elastis, untuk itu teori elastisitas dipakai sebagai dasar formulasi Metode Elemen Hingga.



Gambar 2.1 Tegangan dan gaya benda per satuan volume yang bekerja pada elemen bidang yang sangat kecil, yang mempunyai tebal konstan t . Notasi koma menunjukkan turunan parsial. Sebagai contoh $\sigma_{x,x} = \partial\sigma_x / \partial x$

Pada gambar 2.1 diperlihatkan elemen yang sangat kecil (*differential element*), bukan elemen hingga. Gaya-gaya benda F_x dan F_y mempunyai dimensi gaya per satuan volume dan dapat berasal dari gravitasi, percepatan, medan magnetik dan sebagainya. Gaya-gaya ini positif apabila bekerja dalam arah koordinat positif. Pada setiap satuan volume ($dV = 1 \text{ dx dy}$), F_x dan F_y menyebabkan gaya-gaya total $F_x dV$ dan $F_y dV$. Pada umumnya tegangan merupakan fungsi dari koordinat. Dengan demikian, sebagai contoh, $\sigma_{x,x}$ adalah laju perubahan σ_x terhadap x , dan $\sigma_{x,x} dx$ merupakan perubahan σ_x pada jarak dx . Keseimbangan gaya-gaya dalam arah x harus terpenuhi, yaitu :

$$\sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) t dy + (\tau_{xy} + \tau_{xy,y} dy) t dx + F_x t dx dy = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

Pada arah y harus terpenuhi persamaan keseimbangannya. Keduanya diperlihatkan dalam bentuk yang lebih sederhana :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau_{yy} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

Pada persamaan tiga dimensi, vektor gayanya adalah :

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

dan persamaan diferensial keseimbangannya adalah :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{xz} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy} + \tau_{yz,z} + F_y &= 0 \\ \tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

Apabila benda elastis berdeformasi, maka diasumsikan tidak terjadi retak atau belah, juga tidak terjadi tumpang tindih pada bagian-bagiannya. Secara lebih tepat dapat dikatakan bahwa kondisi keserasian (*compatibility conditions*) harus terpenuhi, yaitu medan anjakan harus menerus (*continuous*) dan bernilai tunggal (*single valued*). Seperti terlihat dalam gambar 2.2 dalam masalah bidang, regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} dapat diturunkan dari dua besaran medan anjakan saja, yaitu $u = u(x,y)$ dan $v = v(x,y)$. Hal ini berarti bahwa apabila kondisi keserasian memang terpenuhi, maka ketiga regangan akan saling bergantung. Hubungan ini disebut sebagai “persamaan keserasian” (*compatibility conditions*).

2.1.3 Hubungan Regangan - Anjakan

Hubungan antara anjakan dengan regangan merupakan hal yang sangat penting di dalam pembentukan elemen. Ditinjau kasus-kasus dua dan tiga dimensi dalam koordinat Cartesian. Persamaan-persamaan untuk pelat, benda putar, dan sebagainya diberikan pada bagian mana elemen tersebut digunakan.

Pada gambar 2.2 medan regangan yang umum menyebabkan perubahan konfigurasi 0,1,2 menjadi konfigurasi 0', 1', 2'. Seperti tegangan-tegangan pada gambar 2.1, anjakan u dan v merupakan fungsi dari koordinat. Diasumsikan bahwa kenaikan (*increment*) seperti u_x adalah sangat kecil dibandingkan u dan v . Dengan

definisi, regangan normal adalah perbandingan antara perubahan panjang dengan panjangnya semula, jadi :

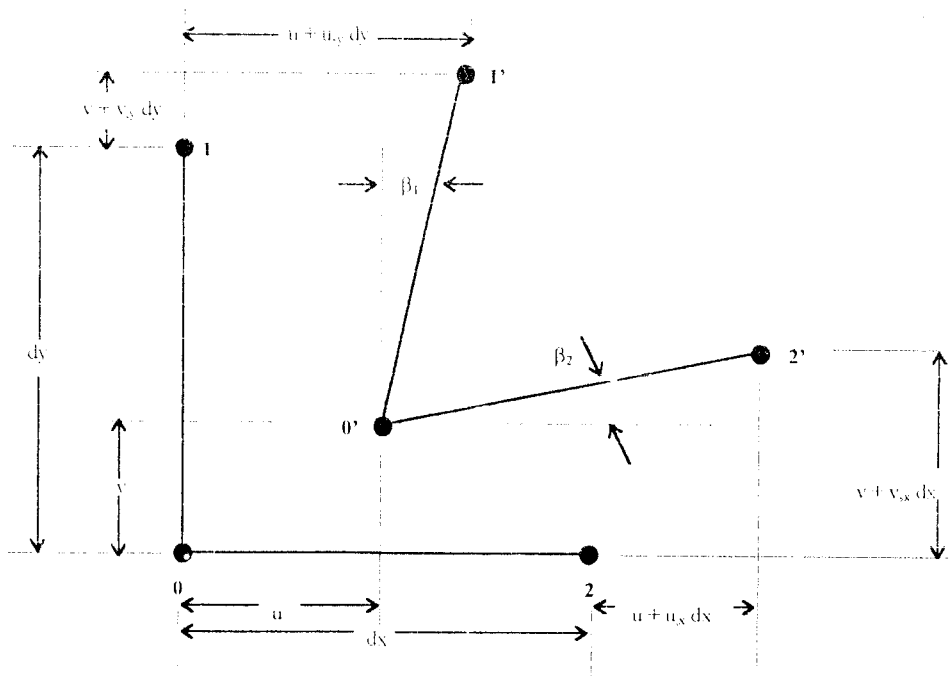
$$\epsilon_x = \frac{L_{02} - L_{01}}{L_{01}} = \frac{[dx + (u + u_x dx) - u] - dx}{dx} = u_x \dots \dots \dots (2.7)$$

Analisis serupa akan menghasilkan regangan normal pada arah y

$$\epsilon_y = u_y \dots \dots \dots (2.8)$$

Regangan geser dapat didefinisikan sebagai besar perubahan sudut. Karena kenaikan (*increment*) anjakan cukup kecil, maka $\beta_1 = \tan \beta_1$, dan $\beta_2 = \tan \beta_2$, sehingga regangan geser adalah :

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{(u + u_y dy) - u}{dy} + \frac{(v + v_x dx) - v}{dx} = u_y + v_x \dots \dots \dots (2.9)$$



Gambar 2.2 Anjakan dan distorsi panjang dx dan dy

Hubungan regangan - anjakan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks untuk hubungan tiga dimensi :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.10)$$

matriks untuk hubungan dua dimensi :

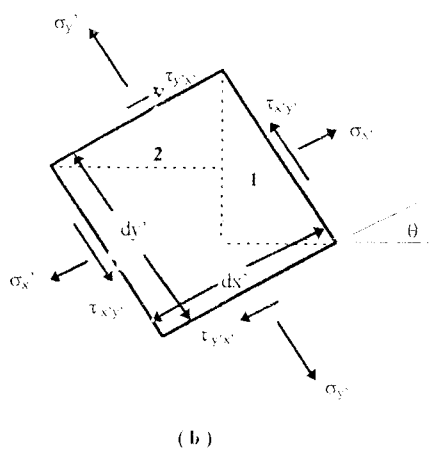
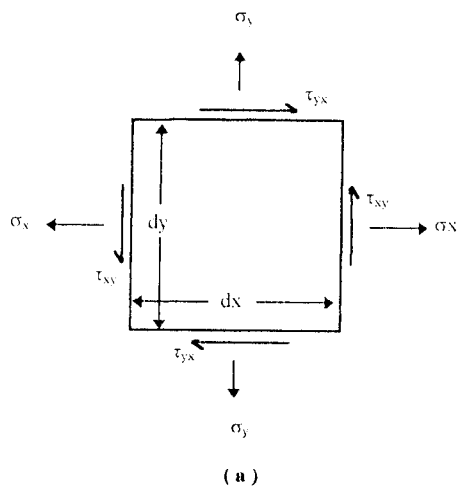
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.11)$$

2.1.4 Hubungan Tegangan - Regangan

Keadaan tegangan dua dimensi dalam gambar 2.4 (a), sebuah elemen kecil dengan ukuran dx kalikan dengan dy memiliki tegangan normal σ_x dan σ_y yang bekerja pada arah x dan y. Juga diperlihatkan tegangan geser τ_{xy} , yang bekerja pada

sisi x arah y dan tegangan geser komplement τ_{yx} , yang bekerja pada sisi y pada arah x. Dari ketiga tipe tegangan bebas ini dapat dibentuk sebuah vektor :

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \dots\dots\dots (2.12)$$



Gambar 2.3. (a) Tegangan dua dimensi, dan (b) Tegangan dalam arah miring

Tegangan miring arah x' dan y' yang membentuk sudut θ terhadap sumbu x dan y diperlihatkan pada gambar 2.4 (b). Dari gambar di atas segmen 1 dapat ditentukan tegangan normal miring $\sigma_{x'}$, yaitu penjumlahan gaya dalam arah x' menghasilkan :

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots \dots \dots (2.13)$$

Dengan cara yang sama, penjumlahan gaya arah y' dari segmen 2 menghasilkan :

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots \dots \dots (2.14)$$

Penjumlahan gaya arah y' segmen 1 menghasilkan :

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \dots \dots \dots (2.15)$$

Tegangan arah utama dapat diperoleh dari tegangan pada arah bukan arah utama dengan menggunakan matriks transformasi :

$$\sigma' = T_0 \sigma \quad \dots \dots \dots (2.16)$$

dengan operator T_0 mempunyai bentuk :

$$T_0 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2.17)$$

Matriks ini sangat berguna untuk dipakai dalam menghitung tegangan miring yang membentuk sudut θ terhadap arah x dan y.

Identitas sudut ganda disubstitusikan ke dalam persamaan 2.13 , 2.14 , 2.15 akan menghasilkan :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \dots \dots \dots (2.18)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \dots \dots \dots (2.19)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (2.20)$$

Jika persamaan 2.18 dijumlahkan dengan persamaan 2.19 akan dihasilkan :

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad \dots \dots \dots (2.21)$$

Persamaan ini membuktikan bahwa jumlah tegangan normal akan selalu tetap meskipun arahnya berbeda.

Hubungan tegangan - regangan dapat disingkat menjadi bentuk :

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} \text{ atau juga } \{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (2.22)$$

dengan [C] adalah matriks besaran-besaran material, [E] adalah matriks kekakuan material, dan $[E] = [C]^{-1}$. Secara lengkap vektor tegangan $\{\sigma\}$ dan vektor regangan adalah :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\} \dots\dots\dots (2.23)$$

Tegangan dan regangan awal bisa saja ada. Persamaan 2.22 menyatakan berlakunya Hukum Hooke. Untuk benda padat yang aktual, hukum ini merupakan pendekatan yang hanya dapat dipakai untuk regangan kecil.

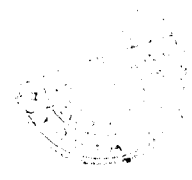
Matriks [E] merupakan matriks simetris (begitu pula dengan matriks [C]), dengan differensial diperoleh :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x}, \quad \text{jadi } E_{12} = E_{21} \dots\dots\dots (2.24)$$

dan sebagainya. Jadi secara umum [E] dan [C] mengandung 21 koefisien yang tidak saling bergantung.

Apabila materialnya orthotropis, maka akan ada sembilan koefisien yang tak saling bergantung. Apabila sumbu-sumbu x,y dan z berimpit dengan arah-arahan utama material, maka dapat ditulis :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= + \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \\ \varepsilon_y &= - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \dots\dots\dots (2.25.b) \end{aligned}$$



$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{zx}}$$

Masing-masing angka poisson ν_{ij} menunjukkan regangan dalam arah j yang diakibatkan oleh tegangan dalam arah i . ($i, j = x, y, z$). Sebagai contoh, tegangan uniaksial σ_z dapat menyebabkan regangan $\epsilon_z = \sigma_z / E_z$, $\epsilon_x = -\nu_{zx}\epsilon_z$, dan $\epsilon_y = -\nu_{yz}\epsilon_z$. Berdasarkan persyaratan simetri, maka :

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}, E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz}, E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx} \dots \dots \dots (2.26)$$

Dari persamaan 2.1.10, dapat ditulis $[C]$; kemudian $[E] = [C]^{-1}$. Jika x, y, z bukan arah utama, $[E]$ harus ditransformasi dari persamaan :

$$[E] = [T_e]^T [E'] [T_e] \dots \dots \dots (2.27)$$

dengan :

$$[E'] = \text{diferensial dari Matriks } [E]$$

Suatu material isotropis hanya mempunyai dua koefisien elastis independen, E dan ν . Suku tidak nol pada segitiga atas dalam matriks $[E]$ adalah :

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = (1 - \nu) c, \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} = \nu c \\ E_{44} = E_{55} = E_{66} = G \dots \dots \dots (2.28)$$

$$\text{dengan } c = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{dan} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Masalah dua dimensi mengenai benda yang terletak pada bidang xy . Berdasarkan definisi, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Apabila masalahnya adalah tegangan bidang, maka $\sigma_z = 0$, dan ϵ_z tidak masuk dalam proses solusi. Dengan demikian untuk material isotropis, persamaan 2.1.27, dan $[E] = [C]^{-1}$ menjadi :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x + \frac{\nu}{E} \sigma_y \dots\dots\dots (2.29.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y \dots\dots\dots (2.29.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \dots\dots\dots (2.29.c)$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.30)$$

Pada regangan bidang, maka $\epsilon_z = 0$, dan σ_z tidak masuk dalam proses solusi. Dengan mengabaikan baris 3, 5 dan 6 dari matriks $[E]$ yang berukuran 6×6 , diperoleh, untuk material isotropis.

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.31)$$

Agar dapat terpenuhi kondisi tegangan bidang ataupun regangan bidang (pada bidang xy), maka bidang xy haruslah merupakan simetri elastis. Dengan demikian apabila materialnya orthotropis, maka sumbu z haruslah merupakan arah utama material. Jika x dan y ternyata juga merupakan arah utama, maka $E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = 0$.

2.2 Formula Isoparametrik

2.2.1 Elemen Isoparametrik

Elemen isoparametrik sangat berguna untuk memodelkan struktur yang tepinya berupa lengkung, dan membentuk jaring yang tidak lurus. Elemen ini banyak berguna dalam banyak hal seperti telah terbukti efektif dalam masalah elastis dua dan tiga dimensi, analisis cangkang dan juga aplikasi nonstruktural.

Titik simpul pada elemen mendefinisikan dua hal :

1. derajat bebas titik simpul dapat dipakai untuk menunjukkan anjakan $\{u \ v \ w\}$ pada titik di dalam elemen, $\{u \ v \ w\} = [N] \{d\}$.
2. koordinat titik simpul $\{c\}$ dapat dipakai mendefinisikan koordinat global $\{x \ y \ z\}$ suatu titik dalam elemen, $\{x \ y \ z\} = [N] \{c\}$.

Matriks-matriks $[N]$ dan $[\bar{N}]$ merupakan fungsi dari ξ, η, ζ . Suatu elemen disebut isoparametrik apabila kumpulan titik pada butir (1) dan (2) identik, dan jika $[N]$ dan $[\bar{N}]$ identik. Atau dengan kata lain suatu elemen disebut isoparametrik bila fungsi geometrik dan fungsi bentuk anjakan dari elemen tersebut menggunakan rumus interpolasi yang sama. Elemen ini akan memenuhi baik kondisi geometrik elemen maupun keserasian kondisi anjakannya. Bila fungsi geometrik berderajat lebih rendah daripada fungsi bentuk anjakannya, maka elemen itu disebut *subparametrik* dan bila fungsi bentuk anjakan berderajat lebih rendah daripada fungsi geometriknya, maka elemen itu disebut *superparametrik*.

Elemen isoparametrik pada umumnya berbentuk lengkung, maka elemen ini lebih cocok digunakan untuk memodelkan kondisi batas geometrik, tetapi hubungan regangan - anjakannya sangat rumit karena anjakan umum dinyatakan dalam koordinat lokal sehingga diperlukan turunan terhadap koordinat global. Juga dibutuhkan integrasi numerik bila integrasi eksplisit tidak dapat dilakukan

2.2.2 Koordinat Alami (*Natural Coordinates*)

Karakteristik geometri dari elemen hingga tertentu, seperti misalnya elemen segitiga, kuadrilateral, serta elemen tiga dimensi pasangannya, menyebabkan suatu sistem koordinat yang tidak berdimensi lebih disukai, dari pada sistem koordinat Cartesius. Differensial dan integrasi yang dibutuhkan dalam perhitungan kekakuan dan beban titik nodal ekuivalen dapat disederhanakan dengan menggunakan koordinat geometrik lokal.

Gambar 2.5 adalah sebuah elemen garis dengan lokasi titik sembarang 3 dinyatakan dalam koordinat panjang yang tidak berdimensi, yaitu :

$$\xi_1 = L_1 / L \quad ; \quad \xi_2 = L_2 / L \quad \dots \dots \dots (2.32)$$

dari gambar di dapat :

$$L_1 + L_2 = L \quad \dots \dots \dots (2.33)$$

sehingga :

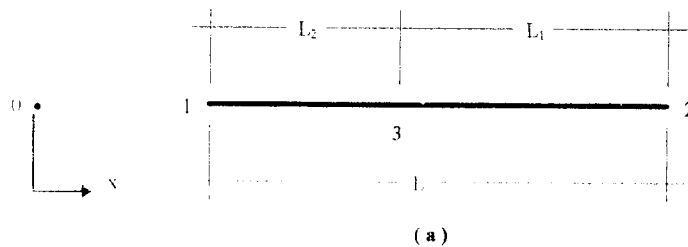
$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \quad \dots \dots \dots (2.34)$$

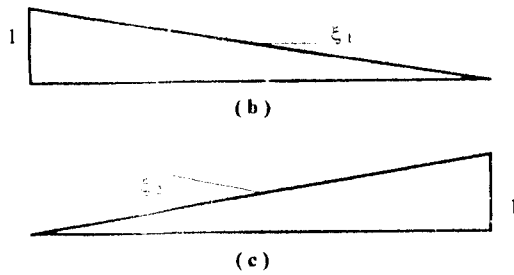
dengan ξ_1 dan ξ_2 bebas satu sama lainnya. Koordinat global dapat dinyatakan dalam koordinat lokal ξ_1 dan ξ_2 :

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \quad \dots \dots \dots (2.35)$$

Sebaliknya, koordinat lokal dapat dinyatakan dalam koordinat global dengan mencari nilai-nilai ξ_1 dan ξ_2 dari persamaan 2.32 dan 2.33, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 1/L \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2.36)$$





Gambar 2.4 Koordinat natural untuk elemen garis

Dari persamaan 2.36 dilukiskan gambar 2.4. (b) dan (c). Koordinat alami (natural) ξ_1 dan ξ_2 sama dengan fungsi bentuk anjakan elemen aksial f_3 dan f_6 . Untuk itu elemen aksial dengan dua titik nodal dan fungsi anjakan linier dikenal sebagai isoparametrik.

Diferensial fungsi $f(\xi_1, \xi_2)$ terhadap x dengan cara berantai akan menghasilkan bentuk :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \dots\dots\dots (2.37)$$

Diferensial parsial ξ_1 dan ξ_2 terhadap sumbu x pada persamaan 2.36 adalah :

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = -\frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{1}{L} \dots\dots\dots (2.38)$$

Bila persamaan ini disubstitusikan ke dalam persamaan 2.37, maka :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{L} \left(-\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) \dots\dots\dots (2.39)$$

Dalam persamaan berikut ini dengan mudah dapat diintegrasikan suku polinomial terhadap koordinat panjang ξ_1 dan ξ_2 sehingga akan diperoleh :

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi_1^a \xi_2^b dx = \int_0^1 \xi_1^a (1-\xi_1)^b L d\xi_1 = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} L \dots\dots\dots (2.40)$$

Rumus ini menunjukkan perkalian faktorial dari $a(a-1)$, $(a-2) \dots$ dan seterusnya. Bila $a = 0$, maka hasil faktorial dari $0!$ didefinisikan sebagai 1.

2.2.3 Elemen Isoparametrik Linier Bidang

Pada gambar 2.6. dilukiskan koordinat alami tidak berdimensi, ξ dan η , untuk elemen kuadrilateral. Titik g merupakan pusat geometri dengan :

$$x_g = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad y_g = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad \dots \dots \dots (2.41)$$

Titik ini tidak perlu sama dengan titik tengah elemen. Perhatikan bahwa $\eta = -1$ sepanjang sisi 1 - 2, $\xi = 1$ sepanjang 4 - 1. Dengan interpolasi linier terhadap arah ξ dan η , kedudukan sembarang titik pada elemen dapat dinyatakan sebagai berikut :

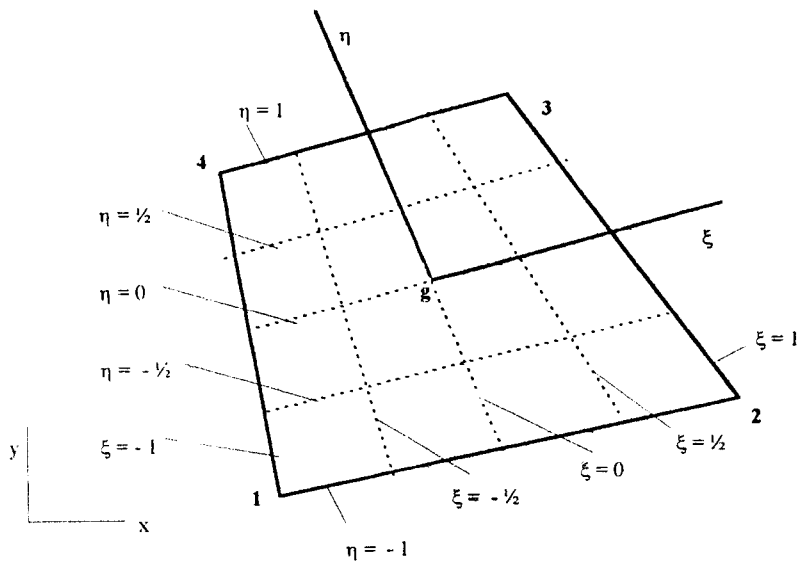
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta) x_1 + (1 + \xi)(1 - \eta) x_2 \\ &\quad + (1 + \xi)(1 + \eta) x_3 + (1 - \xi)(1 + \eta) x_4] \\ y &= \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta) y_1 + (1 + \xi)(1 - \eta) y_2 \\ &\quad + (1 + \xi)(1 + \eta) y_3 + (1 - \xi)(1 + \eta) y_4] \quad \dots \dots \dots (2.42) \end{aligned}$$

atau dapat disingkat :

$$\begin{aligned} x &= f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 = \sum_{i=1}^4 f_i x_i \\ y &= f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4 = \sum_{i=1}^4 f_i y_i \quad \dots \dots \dots (2.43) \end{aligned}$$

dengan :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) & f_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ f_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) & f_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad \dots \dots \dots (2.44) \end{aligned}$$



Gambar 2.5 Koordinat alami untuk kuadrilateral

Fungsi ini akan menghasilkan koordinat global elemen kuadrilateral yang dinyatakan dalam koordinat alami. Tetapi karena persamaan (2.43) bilinear, maka koordinat lokal ξ dan η tidak dapat dinyatakan dalam koordinat global x dan y .

Differensial (ξ, η) terhadap x dan y dengan aturan berantai kalkulus diferensial akan menghasilkan :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots(2.45.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \dots\dots\dots (2.45.b)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.46)$$

Elemen-elemen dalam matriks koefisien pada persamaan (2.46.) tidak dapat langsung digunakan karena tidak dapat langsung dicari hubungan antara ξ dan η dalam fungsi x dan y . Dengan mendiferensialkan f terhadap ξ dan η , aturan berantai akan menghasilkan :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \dots\dots\dots (2.47.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \dots\dots\dots (2.47.b)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.48)$$

Melalui pengaturan ini, dengan mudah elemen-elemen matriks koefisien dapat dicari dengan mendiferensialkan persamaan (2.42). Matriks ini dikenal sebagai matriks Jacobi [**J**] (*Jacobian Matrix*) yang mengandung turunan dari koordinat global terhadap koordinat lokal. Jadi :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.49)$$

Elemen-elemen matriks Jacobi dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
J_{11} = x_{,\xi} &= f_{1,\xi} x_1 + f_{2,\xi} x_2 + f_{3,\xi} x_3 + f_{4,\xi} x_4 = \sum_{i=1}^4 f_{i,\xi} x_i \\
J_{12} = y_{,\xi} &= f_{1,\xi} y_1 + f_{2,\xi} y_2 + f_{3,\xi} y_3 + f_{4,\xi} y_4 = \sum_{i=1}^4 f_{i,\xi} y_i \\
J_{21} = x_{,\eta} &= f_{1,\eta} x_1 + f_{2,\eta} x_2 + f_{3,\eta} x_3 + f_{4,\eta} x_4 = \sum_{i=1}^4 f_{i,\eta} x_i \\
J_{22} = y_{,\eta} &= f_{1,\eta} y_1 + f_{2,\eta} y_2 + f_{3,\eta} y_3 + f_{4,\eta} y_4 = \sum_{i=1}^4 f_{i,\eta} y_i \dots\dots\dots (2.50)
\end{aligned}$$

Dengan memasang matriks ini ke dalam matriks bentuk akan diperoleh :

$$[J] = [D_L] [C_N] \dots\dots\dots (2.51)$$

Matriks $[D_L]$ dalam persamaan ini mengandung differensial terhadap koordinat lokal, jadi :

$$\begin{aligned}
[D_L] &= \begin{bmatrix} f_{1,\xi} & f_{2,\xi} & f_{3,\xi} & f_{4,\xi} \\ f_{1,\eta} & f_{2,\eta} & f_{3,\eta} & f_{4,\eta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.52)
\end{aligned}$$

Dan matriks C_N yang terdiri dari koordinat lokal dapat disusun seperti berikut ini :

$$[C_N] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.53)$$

Dari persamaan (2.46) dan (2.48) terlihat bahwa matriks koefisien dalam persamaan terdahulu merupakan invers dari matriks Jacobi. Dengan menggunakan definisi matriks invers, J dapat diturunkan, menjadi :

$$[\mathbf{J}^{-1}] = \frac{\mathbf{J}^*}{|\mathbf{J}|} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.54)$$

dimana $[\mathbf{J}^{-1}]$ menunjukkan matriks join dari \mathbf{J} , dan $|\mathbf{J}|$ merupakan determinannya. Determinan ini dapat dihitung dengan rumus :

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi} \dots\dots\dots (2.55)$$

Untuk menentukan turunan dari seluruh fungsi terhadap x dan y, dapat digunakan persamaan (2.2.15.) berulang kali, maka :

$$\begin{bmatrix} f_{i,x} \\ f_{i,y} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{bmatrix} f_{i,\xi} \\ f_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4) \dots\dots\dots (2.56)$$

diperoleh :

$$[\mathbf{D}_G] = [\mathbf{J}^{-1}] [\mathbf{D}_L] = ([\mathbf{D}_L] [\mathbf{C}_N])^{-1} [\mathbf{D}_L] \dots\dots\dots (2.57)$$

Matriks $[\mathbf{D}_G]$ yang terdapat dalam persamaan ini mengandung differensial f_i terhadap koordinat global yaitu :

$$[\mathbf{D}_G] = \begin{bmatrix} f_{1,x} & f_{2,x} & f_{3,x} & f_{4,x} \\ f_{1,y} & f_{2,y} & f_{3,y} & f_{4,y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.58)$$

Elemen-elemen matriks \mathbf{D}_G dapat dihitung dan akan menghasilkan :

$$\begin{aligned} D_{G11} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [-(1-\eta)J_{22} + (1-\xi)J_{12}] \\ D_{G12} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [(1-\eta)J_{22} + (1+\xi)J_{12}] \\ D_{G13} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [(1+\eta)J_{22} - (1+\xi)J_{12}] \\ D_{G14} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [-(1+\eta)J_{22} - (1-\xi)J_{12}] \\ D_{G21} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [(1-\eta)J_{21} - (1-\xi)J_{11}] \\ D_{G22} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [-(1-\eta)J_{21} - (1+\xi)J_{11}] \end{aligned}$$

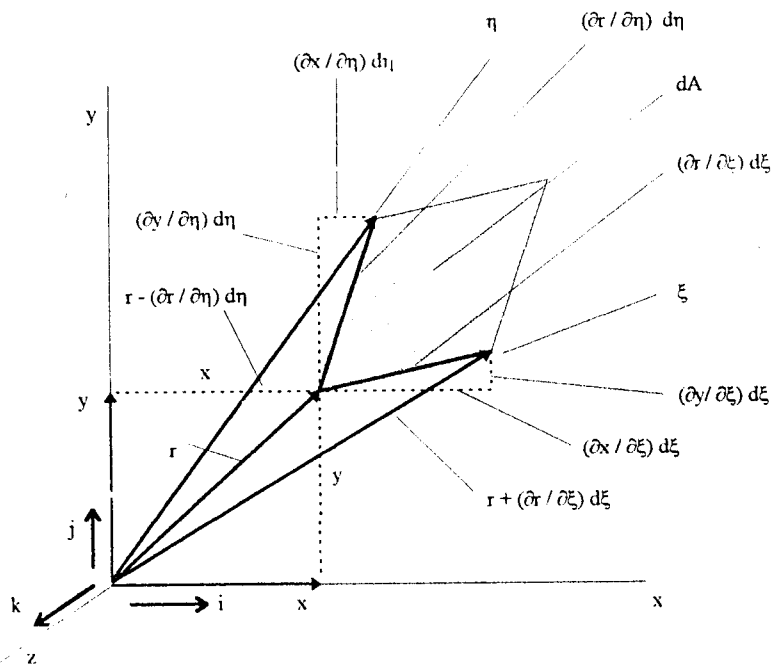
$$\begin{aligned}
 D_{G23} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [-(1 + \eta) J_{21} + (1 + \xi) J_{11}] \\
 D_{G24} &= \frac{1}{4} |\mathbf{J}| \cdot [(1 + \eta) J_{21} + (1 - \xi) J_{11}] \dots\dots\dots (2.59)
 \end{aligned}$$

Dengan pendekatan numerik seluruh elemen dari matriks $[D_G]$ dapat dicari.

Karena determinan \mathbf{J} ada dalam posisi penentu (*denominator*), umumnya kekakuan dan beban titik nodal ekuivalen tidak dapat diperoleh dengan integrasi eksplisit. Oleh karena itu, sangatlah penting untuk menggunakan integrasi numerik.

2.2.4 Integrasi Numerik

Differensial kekakuan dan beban titik nodal ekuivalen dengan isoparametrik tidak dapat digunakan untuk berbagai tipe elemen, untuk mengatasi hal ini dipakai metode lengkung kuadrat gauss (*Gauss Quadrature Method*). Differensial ini dapat dikembangkan untuk kasus-kasus dua dan tiga dimensi.



Gambar 2.6 Luas yang sangat kecil dinyatakan dalam koordinat alami

Untuk elemen kuadrilateral dalam koordinat Cartesius, jenis integrasi yang harus dibentuk adalah

$$I = \iint f(x, y) dx dy \dots\dots\dots(2.60)$$

Namun integral dalam persamaan (2.60) akan lebih mudah dihitung bila ditransformasikan terlebih dahulu ke dalam koordinat alami. Hal ini dapat diselesaikan dengan menyatakan fungsi f dalam ξ dan η seperti yang terdapat dalam persamaan 2.42. Selain itu batas setiap integrasi harus berkisar dari -1 ke 1, dan luas elemen $dA = dx \cdot dy$ harus digantikan oleh suatu rumus yang sesuai dengan $d\xi$ dan $d\eta$, hal ini ditunjukkan dalam gambar 2.7 dimana luas elemen kecil dA digambarkan dalam koordinat alami.

Vektor r terletak pada sembarang titik dalam koordinat Cartesius x dan y sebagai berikut :

$$r = x + y = x_i + y_j \dots\dots\dots(2.61)$$

Tingkat perubahan r terhadap ξ adalah :

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \dots\dots\dots(2.62)$$

dan, tingkat perubahan r terhadap η adalah :

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\partial x_i}{\partial \eta} + \frac{\partial y_j}{\partial \eta} \dots\dots\dots(2.63)$$

Jika dikalikan dengan $d\xi$ dan $d\eta$ differensial dalam persamaan 2.62 dan 2.63 akan membentuk dua sisi yang terpotong dari sebuah jajaran genjang kecil dengan luas dA seperti dalam gambar. Luas ini dapat ditentukan dari perkalian ketiga vektor berikut ini :

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot k \dots\dots\dots(2.64)$$

dengan :

$$k = \frac{1}{(r \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta}) \frac{\partial x}{\partial \xi} - (r \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi}) \frac{\partial x}{\partial \eta} - r^2}$$

Substitusi persamaan 2.62 dan 2.63 ke dalam persamaan 2.64 akan menghasilkan :

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \dots\dots\dots (2.65)$$

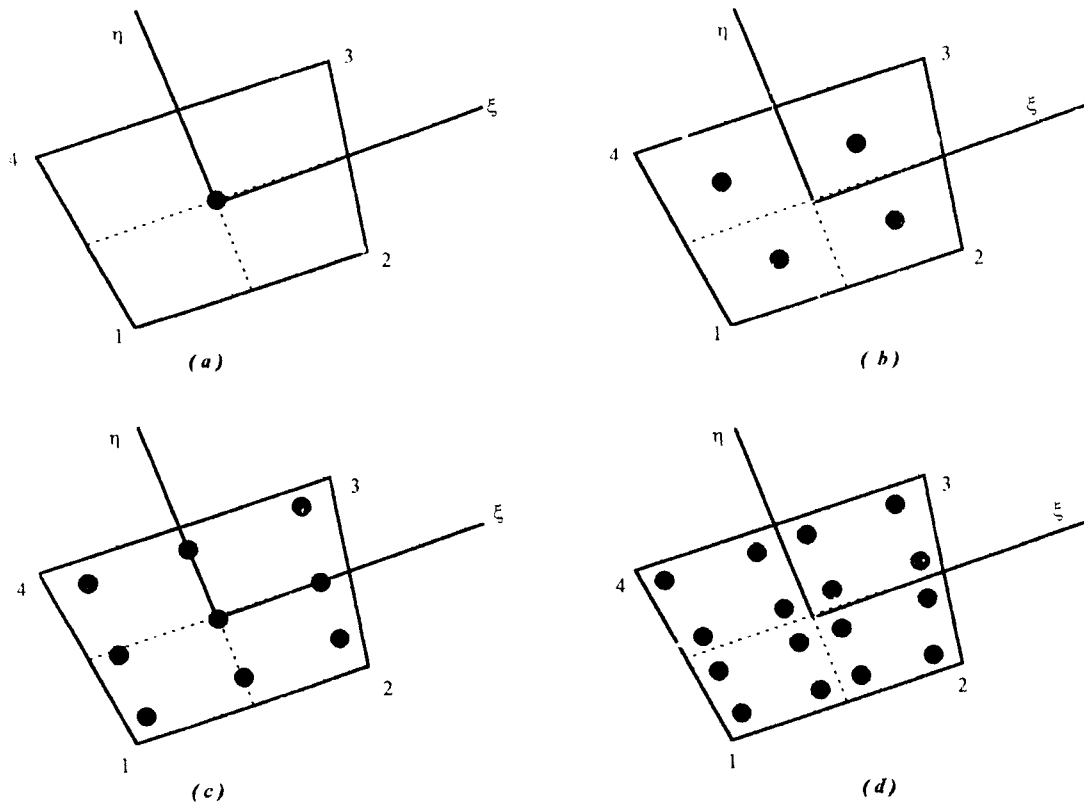
dengan \mathbf{J} adalah Matriks Jacobi dan $|\mathbf{J}|$ merupakan determinannya, dalam bentuk integral persamaan 2.60 menjadi :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \dots\dots\dots(2.66)$$

Dengan menggunakan cara lengkung kuadrat Gauss dua kali berturut-turut akan dihasilkan :

$$I = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_j R_k f(\xi_j, \eta_k) |\mathbf{J}(\xi_j, \eta_k)| \dots\dots\dots (2.67)$$

dengan R_j dan R_k adalah faktor berat pada titik (ξ_j, η_k) . Titik integrasi untuk $n = 1, 2, 3$ dan 4 masing-masing ditunjukkan pada gambar 2.8.



Gambar 2.7 Titik integrasi untuk kuadrilateral : (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$,
 (d) $n = 4$ (untuk setiap arah)

2.2.5 Elemen Kuadrilateral

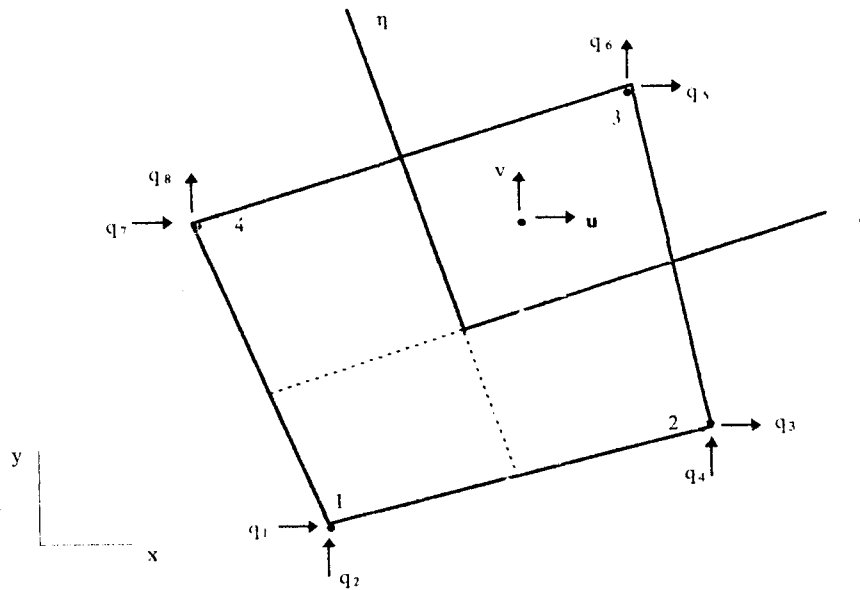
Elemen kuadrilateral pada dasarnya merupakan pengembangan dari elemen segiempat anjakan bilinier, atau dengan kata lain elemen segiempat anjakan bilinier merupakan induk dari elemen isoparametrik kuadrilateral (Q4).

Anjakan umum yang ditunjukkan dalam gambar 2.8. adalah :

$$\mathbf{u} = \{ u, v \} \dots\dots\dots (2.68)$$

Pada setiap titik nodal terdapat translasi arah x dan y. Jadi vektor anjakan titik nodal adalah :

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_8\} = \{u_1, v_1, \dots, v_4\} \dots \dots \dots (2.69)$$



Gambar 2.8 Elemen Q4

Kemudian diasumsikan fungsi bentuk (*shape function*) anjakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta) u_1 + (1 + \xi)(1 - \eta) u_2 \\
 &\quad + (1 + \xi)(1 + \eta) u_3 + (1 - \xi)(1 + \eta) u_4] \\
 v &= \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta) v_1 + (1 + \xi)(1 - \eta) v_2 \\
 &\quad + (1 + \xi)(1 + \eta) v_3 + (1 - \xi)(1 + \eta) v_4] \dots \dots \dots (2.70)
 \end{aligned}$$

atau dapat disingkat :

$$\begin{aligned}
 u &= f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3 + f_4 u_4 = \sum_{i=1}^4 f_i u_i \\
 v &= f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_4 v_4 = \sum_{i=1}^4 f_i v_i \dots \dots \dots (2.71)
 \end{aligned}$$

Dalam persamaan ini fungsi-fungsi f_1, f_2, f_3 , dan f_4 sama dengan yang ada dalam rumus interpolasi geometri persamaan 2.37 dan pada persamaan 2.44. Jadi elemen Q4 merupakan elemen isoparametrik, maka rumus-rumus diferensiasi serta integrasi fungsi di atas adalah benar. Persamaan 2.71 dapat ditulis dalam bentuk :

$$u_i = f_i q_i \quad (i = 1,2,3,4) \quad \dots\dots\dots (2.72)$$

dengan :

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f_i \quad \dots\dots\dots (2.73)$$

Anjakan umum u_i dalam persamaan 2.72 merupakan translasi pada setiap titik akibat anjakan q_i ke titik nodal i . Untuk menyederhanakan penggunaan notasi, fungsi f dapat dituliskan sebagai :

$$f_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) \quad \dots\dots\dots (2.74)$$

dengan :

$$\xi_0 = \xi_i \xi \quad ; \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad \dots\dots\dots (2.75)$$

Nilai ξ_i dan η_i untuk elemen ini diberikan dalam tabel 2.1. di bawah ini :

Tabel 2.1. Koordinat titik nodal untuk elemen Q4

i	1	2	3	4
ξ_i	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1

Dengan cara yang sama hubungan regangan anjakan untuk elemen Q4 dapat dinyatakan sebagai :

$$\epsilon = B_i q_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (2.76)$$

dengan :

$$\mathbf{B}_i = d f_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} f_i = \begin{bmatrix} f_{i,x} & 0 \\ 0 & f_{i,y} \\ f_{i,y} & f_{i,x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.77)$$

Berdasarkan persamaan 2.59 persamaan B_i juga dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.78)$$

Matriks kekakuan elemen Q4 (dengan tebal konstan) dinyatakan dalam koordinat Cartesius :

$$[K] = t \int_A [B^T(x, y)] [E] [B(x, y)] dx dy \dots\dots\dots (2.79)$$

Dalam koordinat alami rumus ini menjadi :

$$[K] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^T(\xi, \eta)] [E] [B(\xi, \eta)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \dots\dots\dots (2.80)$$

Dengan cara yang sama beban titik nodal ekuivalen akibat gaya tubuh dapat dituliskan dalam koordinat alami :

$$P_b = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f^T(\xi, \eta)] [b(\xi, \eta)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \dots\dots\dots (2.81)$$

Beban titik nodal ekuivalen akibat regangan awal dalam koordinat alami adalah :

$$P_0 = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^T(\xi, \eta)] [E] [\epsilon_0(\xi, \eta)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \dots\dots\dots (2.82)$$

Integral dalam persamaan 2.79 dan 2.80 harus diselesaikan dengan integrasi numerik, kecuali untuk kasus-kasus khusus. Untuk elemen segiempat dapat digunakan integrasi eksplisit langsung. Juga beban garis dengan konstanta ξ atau η dapat diselesaikan dengan integrasi garis eksplisit. Determinan matriks Jacobi muncul sebagai penentu dalam semua elemen matriks **[B]** (lihat persamaan 2.58 dan 2.77), jadi determinan **[J]** dalam persamaan 2.81 dapat diabaikan sehingga beban ekuivalen untuk regangan awal dapat diintegrasikan, baik secara eksplisit maupun secara numerik. Bila suatu perubahan ΔT bervariasi secara linier, maka didefinisikan :

$$\Delta T = \sum_{i=1}^4 f_i \Delta T_i \dots\dots\dots (2.83)$$

2.3 Program SAP90

2.3.1 Definisi

Program SAP90 adalah suatu program komputer teknik sipil yang dibuat untuk memudahkan para praktisi teknik sipil dalam mencari atau menentukan analisis suatu elemen struktur yang terjadi .

Tidak seperti program aplikasi lainnya, program SAP90 ini mampu mengolah data struktur yang lebih bervariasi. Program ini mampu menyelesaikan mekanika portal 2 dimensi (*Frame 2 D*), portal 3 dimensi (*Frame 3 D*), rangka 2 dimensi (*Truss 2 D*), rangka 3 dimensi (*Truss 3 D*), pelat (*Plate*), cangkang (*Shell*), masif (*Solid*), aksisimetri masif (*Asolid*), dan masih banyak lagi kemampuan dari program SAP90 ini .

Program SAP90 ini dibuat dengan bahasa pemrograman Fortran-77 oleh Professor Edward L Wilson dari Universitas Barkeley California USA, yang merupakan perbaikan dari program sebelumnya yaitu SAP80 .

Versi SAP90 ini dirancang untuk digunakan oleh bahasa program MS-DOS dengan minimal memori 640 kilobyte dan 10 megabyte harddisk . Program ini

mampu menyelesaikan sekitar 4000 nomor *joint* dan lebih dari 10000 *persamaan* , semua perhitungan numerik tersebut dilaksanakan dengan minimal 2 buah jalur data kapasitas 64 bit .

2.3.2 Aplikasi

Cara menggunakan program SAP90 ini adalah dari MS-DOS kemudian masuk ke file EDIT.com . Dari file edit.com ini program dibuat sesuai dengan bentuk struktur , jenis struktur , dan data struktur lainnya .

Setiap masukan file edit berupa beberapa blok data yang berisi data struktur tersebut disesuaikan dengan bahasa yang dipahami oleh program SAP90. Setiap pergantian blok dipisahkan oleh *separator* berupa karakter titik dua (:) .

Blok - blok data tersebut adalah :

1. Blok *Title line*

Title line harus ditulis pada baris pertama dengan maksimal 70 karakter. *Title line* akan keluar pada setiap lembar keluaran program. Pada blok data ini dan blok data selanjutnya tidak dipisahkan dengan *separator* .

2. Blok *System*

Bagian data ini berisi kondisi pembebanan yang terjadi pada struktur tersebut . Apabila terdapat beberapa beban , misalnya ada beban tetap , beban gempa , dan beban angin , maka struktur tersebut menerima 3 macam beban. Pada blok sistem bisa ditulis :

$l=3$; Beban tetap + beban gempa + beban angin .

3. Blok *Joint*

Bagian data ini mendefinisikan *joint - joint* di seluruh model struktur yang berupa koordinat-koordinat . Apabila terlalu banyak *joint* yang ditulis dalam bentuk koordinat, maka bisa dipersingkat dengan melakukan *generasi (generation)* pada setiap *joint* yang memiliki kesamaan tertentu dengan *joint* lainnya .

4. Blok *Restraint*

Bagian data ini berisi dengan terdapat dukungan pada struktur tersebut. Setiap *joint* pada model struktur diasumsikan memiliki anjakan enam komponen, yaitu tiga buah global translasi arah X, Y, Z, dan tiga buah global rotasi arah RX, RY, RZ. Apabila struktur dianggap tidak terjadi anjakan pada arah-arah tersebut, maka diberi kode (1), tetapi bila dianggap terjadi anjakan pada dukungan tersebut diberi kode (0). Misalnya pada joint 15, 20, 25 didukung oleh jepit, maka dapat ditulis :

Restraint

15 25 5 R=1,1,1,1,1,1

5. Blok data *Shell*

Pada blok data ini dimasukkan data material, lokasi, dan penyebaran beban dari semua elemen tiga dimensi *shell* di keempat titik *joint*. Biasanya elemen *shell* terdiri dari empat titik *joint*. Tetapi ada juga yang terdiri dari tiga titik *joint*, yaitu elemen segitiga.

Dari kelima blok data tersebut sudah dapat di buat suatu model struktur elemen *shell* pada program SAP90 ini. Tetapi bila ingin membuat model struktur dengan elemen yang lain, maka dapat mengganti blok data *shell* dengan blok data elemen yang ingin digunakan. Begitu pula bila ingin menambahkan dengan blok data yang lain, dapat ditambahkan. Misalnya ditambahkan dengan blok data *Combo* untuk menentukan kombinasi beban, dan atau blok data *Spec* untuk memberikan beban dinamis pada model struktur tersebut.

BAB III

ANALISIS MODEL STRUKTUR GORONG-GORONG DENGAN SAP90 DAN METODE ELEMEN HINGGA

3.1 Umum

Tahap analisis ini menggunakan struktur gorong-gorong yang telah didapat rasio tegangannya dari program PSCST, PSQ4, PSQ8 yang perhitungannya menggunakan Metode Elemen Hingga, formula Isoparametrik, elemen Triangle Constan Strain (CST) dan Quadrilateral. Keluaran dari ketiga program tersebut telah diakui keakuratannya di dunia Teknik Sipil, dengan diterbitkannya buku *William Weaver Jr. and Paul R. Johnston, 1980*.

Peneliti mengambil model struktur gorong-gorong tersebut untuk dianalisis dengan menggunakan program SAP90. Diskritisasi struktur gorong-gorong tersebut dengan menggunakan tipe elemen segiempat, yaitu elemen datar dengan empat nomor *joint* pada tiap sudutnya. Kondisi pembebanan, jenis material maupun satuan yang dipakai dibuat sama dengan referensi diatas. Setelah dieksekusi pada program SAP90, keluaran yang didapat berupa koordinat *joint*, anjakan (*displacement*), momen, gaya geser dan reaksi. Dari keluaran-keluaran program SAP90 diatas, anjakan (*displacement*) dan koordinat *joint* dimasukkan ke dalam formula Isoparametrik Kuadrilateral Elemen Hingga, untuk menghitung rasio tegangannya.

3.2 Data Model Struktur Gorong-Gorong

Model struktur yang dipakai dalam analisis rasio tegangan ini adalah struktur gorong-gorong dengan jari-jari lengkung 3 meter, ketinggian 5,196 meter, dengan material bahan beton ($E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN / m}^2$), poisson rasio (ν) 0,3 dan menahan beban terbagi merata $q = 5 \cdot 10^3 \text{ kN / m}$ seperti terlihat dalam gambar 3.1.

untuk menyingkat penulisan koordinat data tersebut. Blok data selanjutnya adalah blok data *Restraint*. Blok data ini berisi kondisi dukungan pada joint yang berfungsi sebagai dukungan. Isi blok data ini tergantung pada jenis dukungan, bila dukungannya jepit maka isi blok tersebut adalah : R=1,1,1,1,1,1. Blok data lainnya adalah blok data *Shell*. Blok data ini berisi tempat-tempat elemen shell berada. Elemen shell tersebut dibentuk dari empat joint.

Masukan data untuk model struktur diatas diambil yang sesuai dengan karakteristik program SAP90 , yaitu jenis elemen segiempat. Langkah-langkah masukan data dari struktur diatas adalah sebagai berikut :

MASUKAN data diatas kemudian dieksekusi dengan program SAP90 dan menghasilkan keluaran (*output*) berupa file dengan *extention* SAP, kemudian dijalankan oleh perintah **GO.EXE** dan menghasilkan file dengan *extention* ERR, EQN, SOL, FEF, F4F dan *keluaran* file gambar dengan *extention* DXF yaitu file yang sama dengan *keluaran* dari program grafis AutoCad.

3.3.1 Masukan data struktur gorong-gorong

MODEL GORONG-GORONG UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SYSTEM

L=1

JOINTS

100	X=0	Y=0	Z=0	
101	X=0	Y=1	Z=0	
1	X=0	Y=0	Z=3	A=100,101,1,12,1,7.5
14	X=0	Y=0	Z=3.549	
18	X=1.875	Y=0	Z=3.248	G=14,18,1
22	X=3.073	Y=0	Z=1.7745	G=18,22,1
26	X=3.75	Y=0	Z=0	G=22,26,1
27	X=0	Y=0	Z=4.098	
31	X=2.25	Y=0	Z=3.897	G=27,31,1
35	X=3.548	Y=0	Z=2.049	G=31,35,1
39	X=4.5	Y=0	Z=0	G=35,39,1
40	X=0	Y=0	Z=4.647	
44	X=2.625	Y=0	Z=4.546	G=40,44,1
48	X=4.023	Y=0	Z=2.3235	G=44,48,1
52	X=5.25	Y=0	Z=0	G=48,52,1
53	X=0	Y=0	Z=5.196	
57	X=3	Y=0	Z=5.196	G=53,57,1
65	X=6	Y=0	Z=0	G=57,65,1

```

RESTRAINTS
1      53      13      R=1,1,0,1,0,1
13     65      13      R=1,1,1,1,0,1
100    101     1       R=1,1,1,1,1,1
:
SHELL
C CONTROL INFORMATION DATA
NM=1  Z=-1
C MATERIAL PROPERTIES DATA
1      E=2.0E7      U=0.3  W=24
C FLEMEN LOCATION DATA
1      JQ=1,2,14,15  TH=1  M=1  G=12,4
:
LOAD
53     57      4       F=0,0,-1875,0,0,0
54     56      1       F=0,0,-3750,0,0,0

```

Keluaran SAP90 secara garis besar dapat dijelaskan sebagai berikut :

1. File *.SAP, memuat urutan-urutan pembacaan program SAP90,
2. File *.ERR, memuat kesalahan-kesalahan selama proses pengolahan masukan data,
3. File *.EQN, memuat persamaan-persamaan kesetimbangan untuk tiap-tiap joint,
4. File *.SOL, memuat anjakan *joint (displacement)* dan reaksi-reaksi dukungan,
5. File *.FEF, memuat gaya elemen untuk tiap joint (*shell element joint forces*),
6. File *.F4F, memuat gaya elemen cangkang (*shell element forces*).

Berikut ini, adalah *keluaran file* yang berpengaruh dalam perhitungan tegangan normal kasus gorong-gorong diatas, yaitu file *.SAP dan file *.SOL.

3.3.2 File *.SAP

File ini berisi data sistem, nomor koordinat *joint*, data dukungan, tipe dan nomor elemen yang dipakai, berat struktur, pembebanan dan nama-nama file keluaran (*output files*). Data tersebut ditampilkan sesuai dengan urutan pembacaan program SAP90.

sap90.exe

PAGE 1

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SYSTEM DATA

EXECUTION CODE ----- 0
NUMBER OF LOAD CONDITIONS ----- 1
STEADY STATE LOAD FREQUENCY ----- .0000E+00
NUMBER OF EIGENVALUES ----- 0
EIGEN CONVERGENCE TOLERANCE ----- .1000E-03
EIGEN CUTOFF TIME PERIOD ----- .0000E+00

sap90.exe

PAGE 2

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

GENERATED JOINT COORDINATES

JOINT	X	Y	Z
1	.000	.000	3.000
2	.392	.000	2.974
3	.776	.000	2.898
4	1.148	.000	2.772
5	1.500	.000	2.598
6	1.826	.000	2.380
7	2.121	.000	2.121
8	2.380	.000	1.826
9	2.598	.000	1.500
10	2.772	.000	1.148
11	2.898	.000	.776
12	2.974	.000	.392
13	3.000	.000	.000
14	.000	.000	3.549
15	.469	.000	3.474
16	.938	.000	3.399
17	1.406	.000	3.323
18	1.875	.000	3.248
19	2.175	.000	2.880
20	2.474	.000	2.511
21	2.774	.000	2.143
22	3.073	.000	1.775

GENERATED JOINT COORDINATES

JOINT	X	Y	Z
23	3.242	.000	1.331
24	3.412	.000	.887
25	3.581	.000	.444
26	3.750	.000	.000
27	.000	.000	4.098
28	.563	.000	4.048
29	1.125	.000	3.998
30	1.688	.000	3.947
31	2.250	.000	3.897
32	2.575	.000	3.435
33	2.899	.000	2.973
34	3.224	.000	2.511
35	3.548	.000	2.049
36	3.786	.000	1.537
37	4.024	.000	1.025
38	4.262	.000	.512
39	4.500	.000	.000
40	.000	.000	4.647
41	.656	.000	4.622
42	1.313	.000	4.597
43	1.969	.000	4.571
44	2.625	.000	4.546
45	2.975	.000	3.996
46	3.324	.000	3.435
47	3.674	.000	2.879
48	4.023	.000	2.324
49	4.330	.000	1.743
50	4.637	.000	1.162
51	4.943	.000	.581
52	5.250	.000	.000
53	.000	.000	5.196
54	.750	.000	5.196
55	1.500	.000	5.196
56	2.250	.000	5.196
57	3.000	.000	5.196
58	3.375	.000	4.547
59	3.750	.000	3.897
60	4.125	.000	3.248
61	4.500	.000	2.598
62	4.875	.000	1.949
63	5.250	.000	1.299
64	5.625	.000	.650
65	6.000	.000	.000

sap90.exe

PAGE 4

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

GENERATED JOINT COORDINATES

JOINT	X	Y	Z
100	.000	.000	.000
101	.000	1.000	.000

sap90.exe

PAGE 5

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

RESTRAINT DATA

JOINT	RX	RY	RZ	RXX	RYY	RZZ
1	1	1	0	1	0	1
13	1	1	1	1	0	1
14	1	1	0	1	0	1
26	1	1	1	1	0	1
27	1	1	0	1	0	1
39	1	1	1	1	0	1
40	1	1	0	1	0	1
52	1	1	1	1	0	1
53	1	1	0	1	0	1
65	1	1	1	1	0	1
100	1	1	1	1	1	1
101	1	1	1	1	1	1

sap90.exe

PAGE 6

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SHELL CONTROL DATA

NUMBER OF ELEMENT MATERIAL TYPES 1
TYPE OF KELUARAN RESULTANTS

LOAD COND	GRAVITATIONAL MULTIPLIERS			TEMPERATURE MULTIPLIERS	PRESSURE MULTIPLIERS
	X	Y	Z		
1	.000	.000	-1.000	.000	.000

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP
 MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

MATERIAL PROPERTY DATA

MAT ID	MODULUS OF ELASTICITY	POISSONS RATIO	WEIGHT PER UNIT VOL	MASS PER UNIT VOL	THERMAL EXPANSION
1	.2000E+08	.3000E+00	.2400E+02	.0000E+00	.0000E+00

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP
 MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SHELL ELEMENT DATA

ELT ID	JOINT I	JOINT J	JOINT K	JOINT L	ELT TYPE	MAT ID	MEMBRANE THICKNESS	BENDING THICKNESS	REF TEMP	LOC AXIS
1	1	2	14	15	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
2	2	3	15	16	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
3	3	4	16	17	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
4	4	5	17	18	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
5	5	6	18	19	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
6	6	7	19	20	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
7	7	8	20	21	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
8	8	9	21	22	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
9	9	10	22	23	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
10	10	11	23	24	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
11	11	12	24	25	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
12	12	13	25	26	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
13	14	15	27	28	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
14	15	16	28	29	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
15	16	17	29	30	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
16	17	18	30	31	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
17	18	19	31	32	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
18	19	20	32	33	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
19	20	21	33	34	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
20	21	22	34	35	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
21	22	23	35	36	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
22	23	24	36	37	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
23	24	25	37	38	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
24	25	26	38	39	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
25	27	28	40	41	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
26	28	29	41	42	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
27	29	30	42	43	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
28	30	31	43	44	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
29	31	32	44	45	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
30	32	33	45	46	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
31	33	34	46	47	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
32	34	35	47	48	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0



sap90.exe

PAGE 9

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAK & NOVI"

SHELL ELEMENT DATA

ELT ID	JOINT I	JOINT J	JOINT K	JOINT L	ELT TYPE	MAT ID	MEMBRANE THICKNESS	BENDING THICKNESS	REF TEMP	LOC AXIS
33	35	36	48	49	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
34	36	37	49	50	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
35	37	38	50	51	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
36	38	39	51	52	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
37	40	41	53	54	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
38	41	42	54	55	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
39	42	43	55	56	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
40	43	44	56	57	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
41	44	45	57	58	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
42	45	46	58	59	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
43	46	47	59	60	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
44	47	48	60	61	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
45	48	49	61	62	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
46	49	50	62	63	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
47	50	51	63	64	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0
48	51	52	64	65	0	1	.1000E+01	.1000E+01	.00	0

sap90.exe

PAGE 10

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

TOTAL WEIGHTS AND MASSES

PROP	WEIGHT	MASS
1	392.0061	.0000
TOTAL	392.0061	.0000

sap90.exe

PAGE 11

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SAP

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

JOINT LOADS

JOINT	LOAD	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
53	1	.000E+00	.000E+00	-.188E+04	.000E+00	.000E+00	.000E+00
57	1	.000E+00	.000E+00	-.188E+04	.000E+00	.000E+00	.000E+00
54	1	.000E+00	.000E+00	-.375E+04	.000E+00	.000E+00	.000E+00
55	1	.000E+00	.000E+00	-.375E+04	.000E+00	.000E+00	.000E+00
56	1	.000E+00	.000E+00	-.375E+04	.000E+00	.000E+00	.000E+00

OUTPUT FILES CREATED BY PROGRAM

MASUKAN DATA ECHO	mod1.SAP
SOLUTION ERRORS AND WARNINGS	mod1.ERR
EQUATION NUMBERING	mod1.EQN
DISPLACEMENTS AND REACTIONS	mod1.SOL
ELEMENT FORCES	mod1.FEF
SHELL ELEMENT FORCES	mod1.F4F

3.3.3 File *.SOL

Pada file *.SOL ini ditampilkan anjakan *joint* (*joint displacement*), rotasi dan reaksi *joint* akibat beban yang ditahan oleh struktur.

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.000000	-.003407	.000000	-.000005	.000000
2	.000141	.000000	-.003342	.000000	-.000342	.000900
3	.000271	.000000	-.003158	.000000	-.000571	.000000
4	.000384	.000000	-.002874	.000000	-.000746	.000000
5	.000469	.000000	-.002520	.000000	-.000780	.000000
6	.000545	.000000	-.002140	.000000	-.000784	.000000
7	.000584	.000000	-.001737	.000000	-.000692	.000000
8	.000576	.000000	-.001338	.000000	-.000505	.000000
9	.5209E-03	.0000E+00	-.9657E-03	.0000E+00	-.2773E-03	.0000E+00
10	.4175E-03	.0000E+00	-.6347E-03	.0000E+00	-.2830E-04	.0000E+00
11	.2774E-03	.0000E+00	-.3547E-03	.0000E+00	.1471E-03	.0000E+00
12	.1157E-03	.0000E+00	-.1405E-03	.0000E+00	.2248E-03	.0000E+00
13	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.9822E-04	.0000E+00

14	.000000	.000000	-.003447	.000000	-.000067	.000000
15	.000013	.000000	-.003353	.000000	-.000254	.000000
16	.000043	.000000	-.003097	.000000	-.000544	.000000
17	.000077	.000000	-.002715	.000000	-.000662	.000000
18	.000114	.000000	-.002265	.000000	-.000694	.000000
19	.000283	.000000	-.001883	.000000	-.000715	.000000
20	.000424	.000000	-.001493	.000000	-.000627	.000000
21	.000511	.000000	-.001119	.000000	-.000468	.000000
22	.5301E-03	.0000E+00	-.7910E-03	.0000E+00	-.2624E-03	.0000E+00
23	.4790E-03	.0000E+00	-.5492E-03	.0000E+00	-.8473E-04	.0000E+00
24	.3519E-03	.0000E+00	-.3385E-03	.0000E+00	.1079E-03	.0000E+00
25	.1874E-03	.0000E+00	-.1585E-03	.0000E+00	.1450E-03	.0000E+00
26	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.2350E-03	.0000E+00
27	.000000	.000000	-.003482	.000000	-.000039	.000000
28	-.000083	.000000	-.003363	.000000	-.000255	.000000
29	-.000138	.000000	-.003050	.000000	-.000471	.000000
30	-.000155	.000000	-.002601	.000000	-.000596	.000000
31	-.000137	.000000	-.002101	.000000	-.000636	.000000
32	.000064	.000000	-.001692	.000000	-.000625	.000000
33	.000266	.000000	-.001295	.000000	-.000566	.000000
34	.4223E-03	.0000E+00	-.9385E-03	.0000E+00	-.4252E-03	.0000E+00
35	.4998E-03	.0000E+00	-.6434E-03	.0000E+00	-.2742E-03	.0000E+00

sap90.exe

PAGE 2

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SOL

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
36	.4840E-03	.0000E+00	-.4313E-03	.0000E+00	-.8655E-04	.0000E+00
37	.3763E-03	.0000E+00	-.2588E-03	.0000E+00	.1090E-04	.0000E+00
38	.2079E-03	.0000E+00	-.1149E-03	.0000E+00	.1646E-03	.0000E+00
39	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.1856E-03	.0000E+00
40	.000000	.000000	-.003535	.000000	-.000048	.000000
41	-.000203	.000000	-.003390	.000000	-.000300	.000000
42	-.000360	.000000	-.003017	.000000	-.000570	.000000
43	-.000448	.000000	-.002499	.000000	-.000692	.000000
44	-.000475	.000000	-.001918	.000000	-.000783	.000000
45	-.000172	.000000	-.001496	.000000	-.000639	.000000
46	.000096	.000000	-.001105	.000000	-.000584	.000000
47	.3231E-03	.0000E+00	-.7675E-03	.0000E+00	-.4456E-03	.0000E+00
48	.4597E-03	.0000E+00	-.5018E-03	.0000E+00	-.2617E-03	.0000E+00
49	.4774E-03	.0000E+00	-.3205E-03	.0000E+00	-.9902E-04	.0000E+00
50	.3797E-03	.0000E+00	-.1897E-03	.0000E+00	.7994E-04	.0000E+00
51	.2037E-03	.0000E+00	-.9268E-04	.0000E+00	.1486E-03	.0000E+00
52	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.1917E-03	.0000E+00
53	.000000	.000000	-.003583	.000000	-.000030	.000000
54	-.000423	.000000	-.003411	.000000	-.000418	.000000
55	-.000739	.000000	-.002972	.000000	-.000681	.000000

56	-000919	.000000	-002386	.000000	-000809	.000000
57	-000966	.000000	-001690	.000000	-000929	.000000
58	-000480	.000000	-001243	.000000	-000767	.000000
59	-1182E-03	.0000E+00	-8773E-03	.0000E+00	-6032E-03	.0000E+00
60	.1911E-03	.0000E+00	-.5681E-03	.0000E+00	-.4933E-03	.0000E+00
61	.4089E-03	.0000E+00	-.3615E-03	.0000E+00	-.2766E-03	.0000E+00
62	-1765E-03	.0000E+00	-2493E-03	.0000E+00	-2713E-04	.0000E+00
63	.3932E-03	.0000E+00	-.1829E-03	.0000E+00	.1111E-03	.0000E+00
64	.2064E-03	.0000E+00	-.1088E-03	.0000E+00	.1845E-03	.0000E+00
65	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.1273E-03	.0000E+00
100	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
101	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

sap90.exe

PAGE 3

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SOL

MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

REACTIONS AND APPLIED FORCES

LOAD CONDITION 1- FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Z)	M(Y)
1	-1285.7604	.0000	.0000
2	.1364E-11	-.4206E-11	.0000E+00
3	.0000E+00	.5798E-11	.0000E+00
4	.2956E-11	-.2728E-11	.0000E+00
5	.0000E+00	.3865E-11	.0000E+00
6	.0000	.0000	.0000
7	.4093E-11	.7276E-11	.0000E+00
8	-.4093E-11	-.3183E-11	.0000E+00
9	-.2274E-11	.2728E-11	.0000E+00
10	.3411E-11	.1364E-11	.0000E+00
11	.0000E+00	-.1364E-11	.0000E+00
12	.0000E+00	-.1364E-11	.0000E+00
13	-737.3946	2389.3230	.0000
14	-157.6935	.0000	.0000
15	.1286E-11	-.1421E-10	.0000E+00
16	.0000E+00	-.1501E-10	.0000E+00
17	.1677E-11	.1342E-10	.0000E+00
18	-.2956E-11	.8185E-11	.0000E+00
19	-.2842E-11	-.5002E-11	.0000E+00
20	-.3183E-11	-.6821E-11	.0000E+00

21	-.3183E-11	.1592E-11	.0000E+00
22	.0000E+00	-.5457E-11	.0000E+00
23	.0000	.0000	.0000
24	.0000E+00	.2728E-11	.0000E+00
25	.0000	.0060	.0000
26	-2484.6165	4948.2675	.0000
27	2263.1738	.0000	.0000
28	.0000E+00	-.1128E-10	.0000E+00
29	.0000E+00	.1938E-10	.0000E+00
30	-.3524E-11	.9607E-11	-.1097E-11
31	.0000E+00	-.1205E-10	.0000E+00
32	.1478E-11	.5230E-11	.0000E+00
33	.2842E-11	-.1887E-10	.0000E+00
34	.3638E-11	-.3183E-11	.0000E+00
35	.0000E+00	-.3638E-11	.0000E+00
36	.0000	.0000	.0000
37	.0000E+00	-.2274E-11	.0000E+00
38	-.1592E-11	.0000E+00	.0000E+00
39	-2485.9953	3589.7743	.0000
40	4542.5260	.0000	.0000
41	.4320E-11	.3718E-10	.0000E+00
42	.0000E+00	-.3524E-11	.0000E+00

sap90.exe

PAGE 4

PROGRAM:SAP90/FILE:mod1.SOL

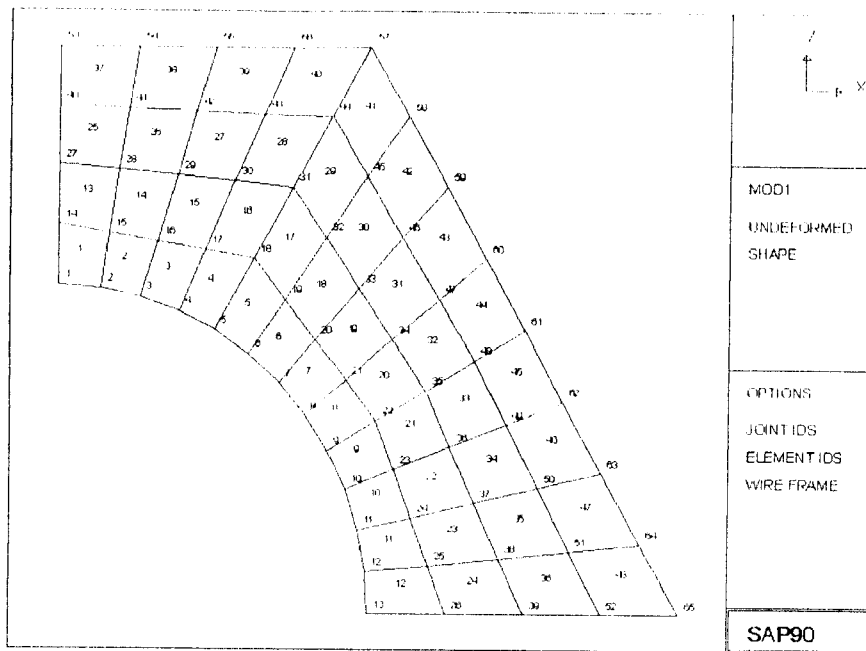
MODEL TEROWONGAN UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

REACTIONS AND APPLIED FORCES

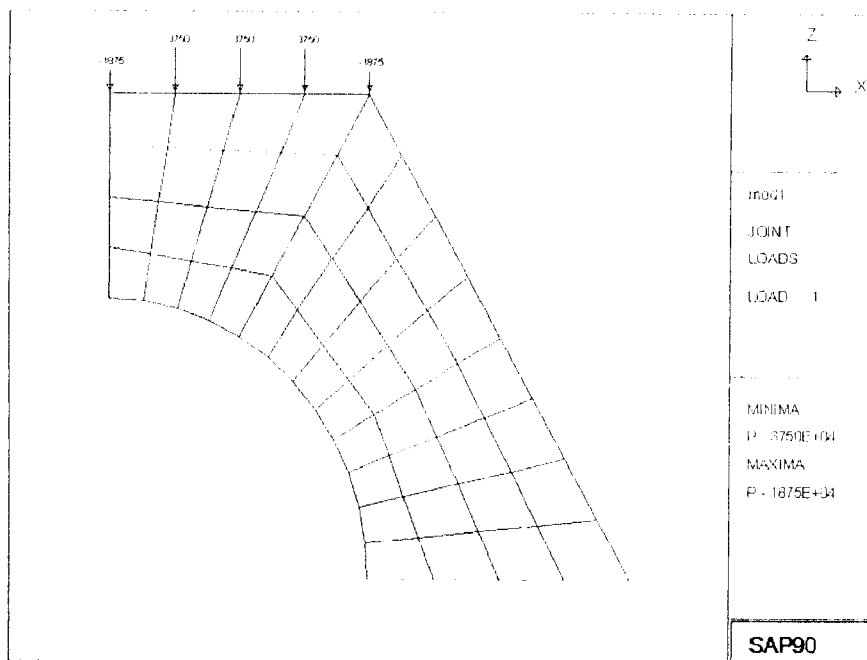
LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Z)	M(Y)
43	-.2387E-11	.7901E-11	.0000E+00
44	.2160E-11	-.1364E-11	-.1075E-11
45	-.1251E-11	-.1683E-10	.0000E+00
46	.0000E+00	.1148E-10	.0000E+00
47	.1307E-11	.1933E-11	.0000E+00
48	.1819E-11	-.2387E-11	.0000E+00
49	.5116E-11	.0000E+00	.0000E+00
50	.0000E+00	.1364E-11	.0000E+00
51	.0000E+00	.1137E-11	.0000E+00
52	-2018.8306	2959.9090	.0000
53	3249.5934	-1875.0000	.0000
54	.0000	-3750.0000	.0000
55	.0000	-3750.0000	.0000
56	.0000	-3750.0000	.0000
57	.0000	-1875.0000	.0000
58	.5116E-11	-.3183E-11	.0000E+00
59	-.1023E-11	.3411E-11	.0000E+00
60	.0000	.0000	.0000
61	.0000E+00	.2046E-11	.0000E+00

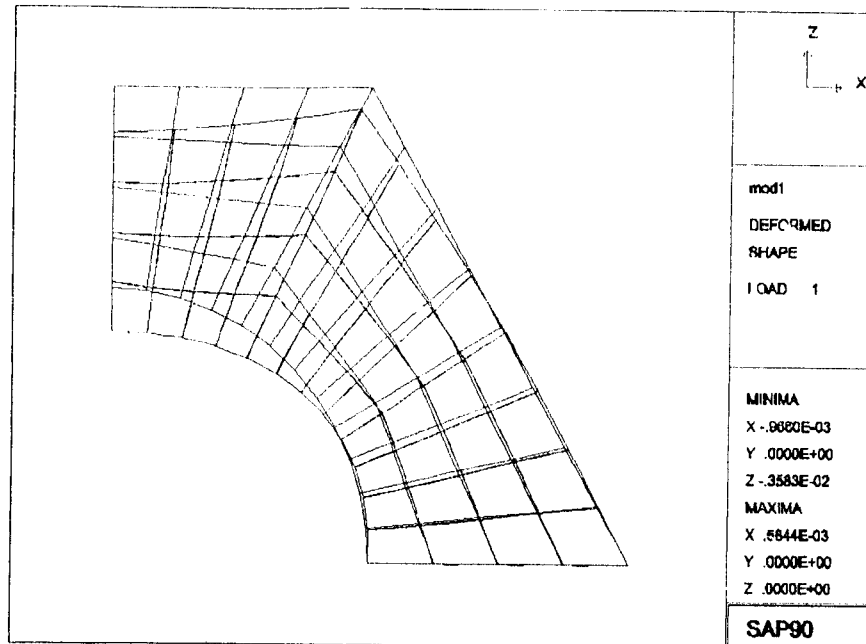
62	-.4434E-11	-.2160E-11	.0000E+00
63	-.2728E-11	-.2160E-11	.0000E+00
64	.0000	.0000	.0000
65	-885.0023	1504.7323	.0000
100	.0000	.0000	.0000
101	.0000	.0000	.0000
TOTAL	-.7162E-11	.3920E+03	-.1373E-11



Gambar 3.2 Jaringan elemen pada SAP90



Gambar 3.3 Plot pembebanan pada SAP90



Gambar 3.4 Anjakan gorong-gorong keluaran dari SAP90

3.4 Analisis Metode Elemen Hingga

Pada subbab ini analisis ratio tegangan untuk model struktur gorong-gorong berdasarkan referensi Analisis model struktur gorong-gorong ini menggunakan tipe elemen segitiga regangan konstan (*Constant Strain Triangle, CST*), kuadrilateral 4 (*Q4*) dan kuadrilateral 8 (*Q8*).

Karena struktur simetris maka model diambil setengah bagian. Untuk menganalisis setengah dari masalah ini struktur dideskritisasi bagian kanan dari garis tengah struktur ini seperti gambar 3.2. dalam jaringan segitiga, gambar 3.3. jaringan Q4, gambar 3.4. Q8.

Dukungan yang dibutuhkan dalam model analitis terdiri dari rol pada titik nodal sepanjang arah sumbu y (dalam bidang simetri) dan perletakan sendi untuk titik nodal sepanjang arah x (untuk menahan titik-titik dasar).

Variasi tegangan yang diperiksa adalah :

1. tegangan normal σ_x sepanjang garis A - B dalam gambar 3.2.
2. tegangan normal σ_y sepanjang garis C - D
3. tegangan normal σ_y sepanjang garis E - F.

Hasil tegangan yang didapat diplotkan dalam bentuk grafik berupa rasio antara tegangan dengan beban b_y .

Grafik rasio tegangan σ_x / b_y (dekat garis A-B), σ_y / b_y (pada garis C-D), dan σ_y / b_y (dekat garis E-F) diplotkan dalam gambar 3.5. , 3.6. dan 3.7. Tiap grafik memperlihatkan keluaran dari program PSCST, PSQ4 dan PSQ8.

Pada grafik pertama (untuk garis A-B) dan ketiga (untuk garis E-F) titik yang diplotkan menunjukkan nilai-nilai rasio tegangan :

CST - rata-rata dari dua segitiga dalam sebuah elemen Q4

Q4 - rata-rata dari keempat titik integrasi,

Q8 - nilai dari titik integrasi terdekat.

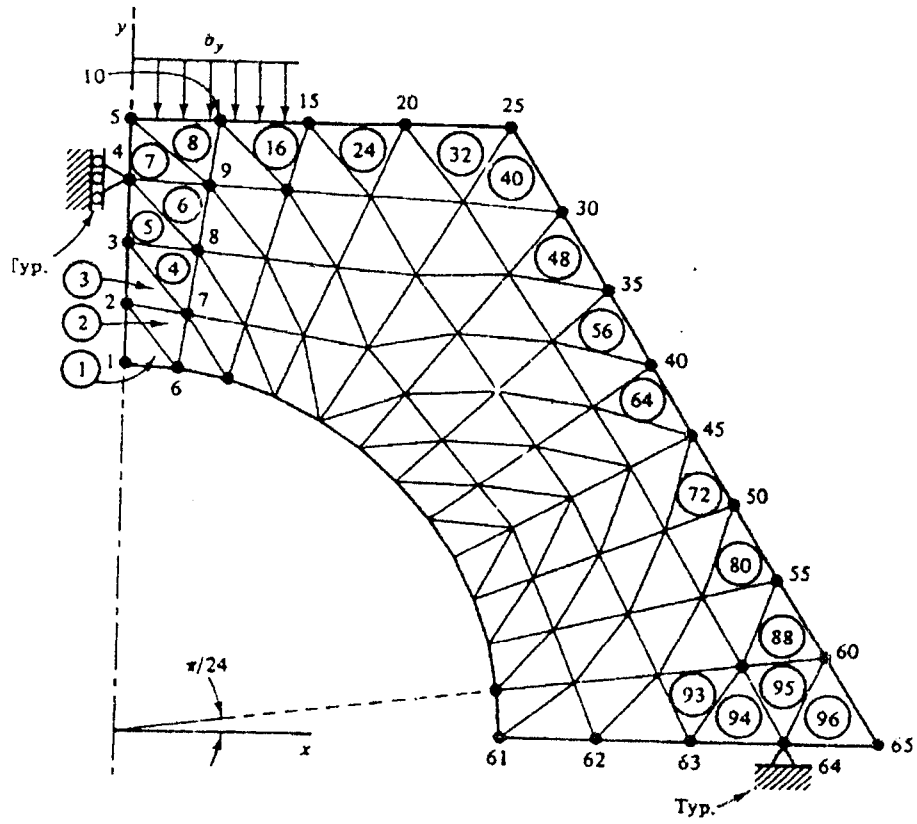
Sedangkan nilai rasio tegangan dalam grafik kedua (untuk garis C-D) untuk :

CST - rata-rata dari empat segitiga (satu pada setiap sisi C-D),

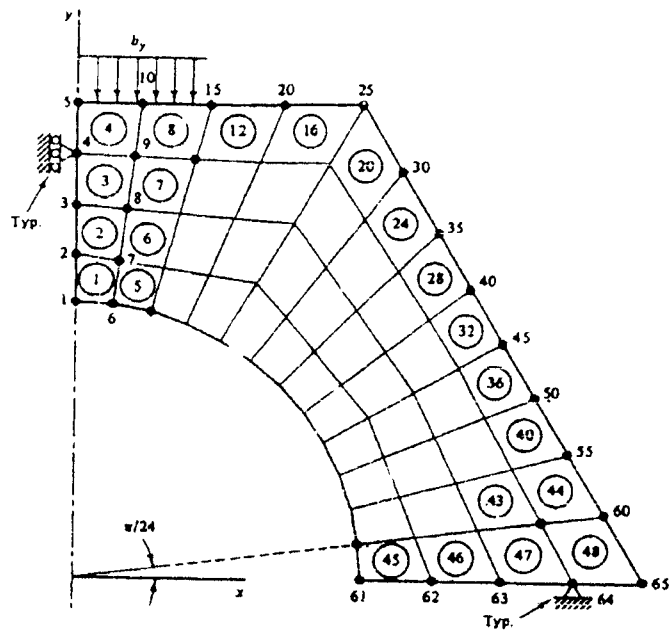
Q4 - rata-rata dari dua quadrilateral (satu pada setiap sisi C-D),

Q8 - rata-rata dari dua titik integrasi (satu pada setiap sisi C-D).

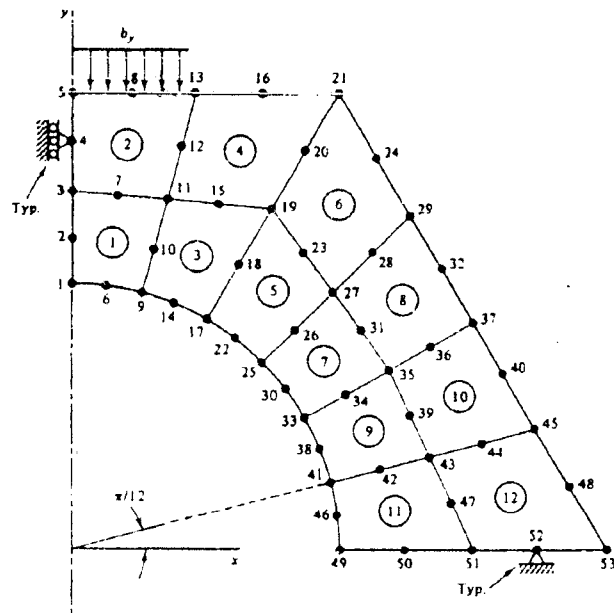
Dari grafik ini dapat dilihat bahwa hanya titik plot pertama saja yang memiliki perbedaan nilai yang berarti. Karena elemen Q8 hampir akurat untuk ketiga tipe yang digunakan, kurva titik garis dalam gambar 3.5. , 3.6. dan 3.7. menunjukkan hasil yang paling baik. Untuk contoh ini waktu proses pada komputer Stanford IBM 3081 hampir sama untuk program PSCST dan PSQ8, tetapi program PSQ4 membutuhkan waktu 50 % lebih. Jadi, dapat disimpulkan bahwa program PSQ8 tidak hanya paling tepat tetapi juga paling efisien.



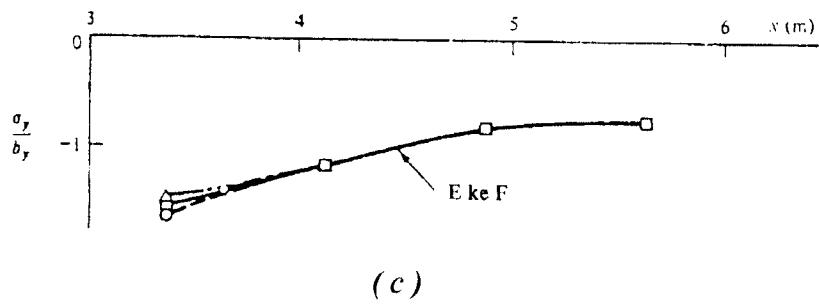
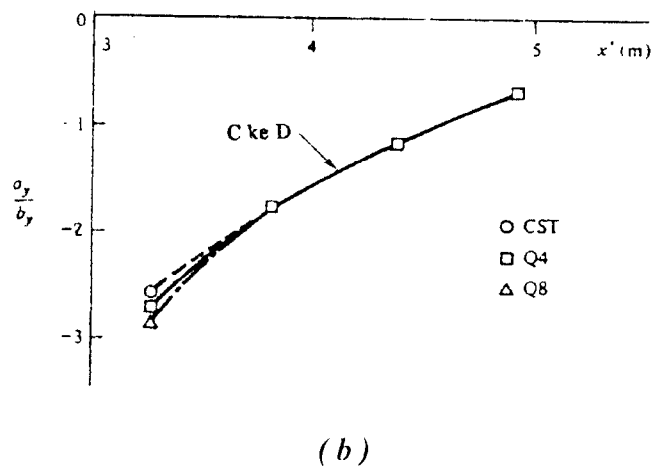
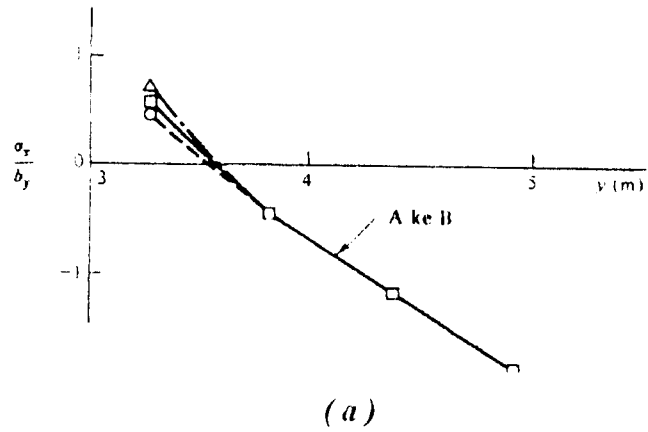
Gambar 3.5 Jaringan segitiga regangan konstan, Program PSCST



Gambar 3.6 Jaringan Q4, Program PSQ4



Gambar 3.7 Jaringan Q8, Program PSQ8



Grafik 3.1 (a) Rasio tegangan A - B (b) Rasio tegangan C - D
(c) Rasio tegangan E - F

3.5 Analisis Rasio Tegangan

Dalam sub bab ini akan dibahas perhitungan rasio tegangan normal dengan beban b_y pada struktur gorong-gorong. Dalam analisis SAP90 struktur gorong-gorong ini menggunakan elemen kuadrilateral Q4, sama seperti elemen yang digunakan untuk menganalisis struktur menara air pada Bab IV.

Dari analisis SAP90 didapat koordinat *joint* dan anjakan (*displacement*), data ini yang digunakan untuk menghitung tegangan normal pada garis A - B, C - D dan E - F. Perhitungan tegangan berdasarkan formula-formula isoparametrik kuadrilateral.

Berdasarkan formula-formula isoparametrik pada Bab II disusun perhitungan tegangan normal pada struktur gorong-gorong tersebut. Persamaan yang digunakan untuk menunjukkan hubungan tegangan dengan anjakan yaitu persamaan (2.22), persamaan (2.30), persamaan (2.11), persamaan (2.51), persamaan (2.52), persamaan (2.53), persamaan (2.55), persamaan (2.59), persamaan (2.78).

Akhirnya Matriks $\{\sigma\}$ dapat dihitung yaitu perkalian antara Matriks $[D]$ pada persamaan 2.31. dengan persamaan dan persamaan 2. 12.

Pada daerah C - D, matriks tegangan normal yang dihasilkan masih harus dikalikan dengan matriks transformasi T_{θ} , karena daerah tersebut membentuk sudut θ dengan sumbu x maupun y, jadi tegangan normal elemen menjadi :

$$\sigma' = T_{\theta} \sigma$$

dimana operator T_{θ} adalah persamaan (2.17).

3.6 Rasio Tegangan Struktur Gorong-gorong terhadap beban hidup (b_s)

Hitungan tegangan normal menggunakan program LOTUS, dan dapat dilihat pada lampiran no 1-16. Variabel yang tetap untuk semua elemen adalah Matriks [E] [D], yaitu :

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$
$$= 21978022 \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

3.6.1 Daerah A - B

1. Elemen 1

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	0	3
2	0,392	2,974
3	0,469	3,474
4	0	3,549

b. Matriks J

$$J = D_i \cdot C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,4305 & -0,0505 \\ 0,0385 & 0,5245 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0.227742$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -1,262396182 & DG21 &= -0,860624875 \\ DG12 &= 1,040653548 & DG22 &= -1,02967619 \\ DG13 &= 1,262396182 & DG23 &= 0,860624875 \\ DG14 &= -1,040653548 & DG24 &= 1,02967619 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1,262396 & 0 & 1,0406535 & 0 & 1,2623962 & 0 & -1,040654 & 0 \\ 0 & -0,860625 & 0 & -1,029676 & 0 & 0,8606249 & 0 & 1,0296762 \\ -0,860625 & -1,262396 & -1,029676 & 1,0406535 & 0,8606249 & 1,2623962 & 1,0296762 & -1,040654 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,003407 \\ 0,000141 \\ -0,003342 \\ 0,000013 \\ -0,003353 \\ 0 \\ -0,003447 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3179,134585 \\ -279,1047581 \\ 334,1676688 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = 0,635826917 \\ \sigma_y / b_y = -0,055820952 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,066833534 \end{array}$$

2. Elemen 13

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	0	3,549
2	0,469	3,474
3	0,563	4,048
4	0	4,098

b. Matriks J

$$J = D_i C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,516 & -0,0625 \\ 0,047 & 0,5615 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,292672$$

$$\begin{array}{ll} DG11 = -1,06604162 & DG21 = -0,801239615 \\ DG12 = 0,852491616 & DG22 = -0,961829218 \\ DG13 = 1,06604162 & DG23 = 0,801239615 \\ DG14 = -0,852491616 & DG24 = 0,961829218 \end{array}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1,066042 & 0 & 0,8524916 & 0 & 1,0660416 & 0 & -0,852492 & 0 \\ 0 & -0,80124 & 0 & -0,961829 & 0 & 0,8012396 & 0 & 0,9618292 \\ -0,80124 & -1,066042 & -0,961829 & 0,8524916 & 0,8012396 & 1,0660416 & 0,9618292 & -0,852492 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,003447 \\ 0,000013 \\ -0,003353 \\ -0,000083 \\ -0,003363 \\ 0 \\ -0,003482 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2075,398152 \\ -1758,056275 \\ 927,017282 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -0,41507963 \\ \sigma_y / b_y = -0,351611255 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,185403456 \end{array}$$

3. Elemen 25

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	0	4,098
2	0,563	4,048
3	0,656	4,622
4	0	4,647

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_L \mathbf{C}_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,6095 & -0,0375 \\ 0,0465 & 0,5615 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,343978$$

DG11 =	-0,870695	DG21 =	-0,818366
DG12 =	0,7616766	DG22 =	-0,953549
DG13 =	0,8706952	DG23 =	0,8183663
DG14 =	-0,761677	DG24 =	0,9535494

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,870695 & 0 & 0,7616766 & 0 & 0,8706952 & 0 & -0,761677 & 0 \\ 0 & -0,818366 & 0 & -0,953549 & 0 & 0,8183663 & 0 & 0,9535494 \\ -0,818366 & -0,870695 & -0,953549 & 0,7616766 & 0,8183663 & 0,8706952 & 0,9535494 & -0,761677 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{MATRIKS } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,003482 \\ -0,000083 \\ -0,003363 \\ -0,000203 \\ -0,00339 \\ 0 \\ -0,003535 \end{bmatrix}$$

c. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5859,045 \\ -3532,129 \\ 954,83522 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -1,171809 \\ \sigma_y / b_y = -0,706426 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,190967 \end{array}$$

4. Elemen 37

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	0	4,647
2	0,656	4,622
3	0,75	5,196
4	0	5,196

b. Matriks J

$$J = D_i C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,703 & -0,0125 \\ 0,047 & 0,5615 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,395322$$

$$\begin{array}{ll} DG11 = & -0,72599 \quad DG21 = \quad -0,829703 \\ DG12 = & 0,6943707 \quad DG22 = \quad -0,948594 \\ DG13 = & 0,7259905 \quad DG23 = \quad 0,8297034 \\ DG14 = & -0,694371 \quad DG24 = \quad 0,9485938 \end{array}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,72599 & 0 & 0,6943707 & 0 & 0,7259905 & 0 & -0,694371 & 0 \\ 0 & -0,829703 & 0 & -0,948594 & 0 & 0,8297034 & 0 & 0,9485938 \\ -0,829703 & -0,72599 & -0,948594 & 0,6943707 & 0,8297034 & 0,7259905 & 0,9485938 & -0,694371 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,003535 \\ -0,000203 \\ -0,00339 \\ -0,000423 \\ -0,003411 \\ 0 \\ -0,003583 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10376,04 \\ -4716,72 \\ 504,89513 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -2,075208 \\ \sigma_y / b_y = -0,943344 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,100979 \end{array}$$

Tabel 3.1 Tabel Rasio Tegangan Daerah A - B

	3	3,2745	3,8235	4,3725	4,9215	5
PSCST		0,448276	-0,43103	-1,15517	-1,98276	
PSQ4		0,620689	-0,43103	-1,15517	-1,98276	
PSQ8		0,775862	-0,43103	-1,15517	-1,98276	
SAP90		0,635827	-0,41508	-1,17181	-2,0752	

3.6.2 Daerah C - D

1. Elemen 8

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	2,598	1,5
2	3,073	1,775
3	2,774	2,143
4	2,38	1,826

b. Matriks J

$$J = D_i \cdot C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,4345 & 0,296 \\ -0,2585 & 0,347 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} = 0,227288$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,112193 & DG21 &= -1,524501 \\ DG12 &= 1,4145081 & DG22 &= -0,387175 \\ DG13 &= 0,1121927 & DG23 &= 1,5245009 \\ DG14 &= -1,414508 & DG24 &= 0,3871748 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,112193 & 0 & 1,4145081 & 0 & 0,1121927 & 0 & -1,414508 & 0 \\ 0 & -1,524501 & 0 & -0,387175 & 0 & 1,5245009 & 0 & 0,3871748 \\ -1,524501 & -0,112193 & -0,387175 & 1,4145081 & 1,5245009 & 0,1121927 & 0,3871748 & -1,414508 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,0005209 \\ -0,000966 \\ 0,0005301 \\ -0,000791 \\ 0,000511 \\ -0,001119 \\ 0,000576 \\ -0,001338 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4385,64 \\ -10216,36 \\ 5840,3784 \end{bmatrix} \quad T_o = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot T_o = \begin{bmatrix} -785,4031 \\ -13816,59 \\ 395,4144 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,157081 \\ \sigma'_y / b_y &= -2,763319 \\ \tau'_{xy} / b_y &= 0,0790829 \end{aligned}$$

2. Elemen 20

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3,073	1,775
2	3,548	2,049
3	3,224	2,511
4	2,774	2,143

b. Matriks J

$$J = D_i C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,4625 & 0,321 \\ -0,3115 & 0,415 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,291929$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,160998 & DG21 &= -1,325665 \\ DG12 &= 1,2605805 & DG22 &= -0,258625 \\ DG13 &= 0,1609981 & DG23 &= 1,3256648 \\ DG14 &= -1,26058 & DG24 &= 0,2586245 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,160998 & 0 & 1,2605805 & 0 & 0,1609981 & 0 & -1,26058 & 0 \\ 0 & -1,325665 & 0 & -0,258625 & 0 & 1,3256648 & 0 & 0,2586245 \\ -1,325665 & -0,160998 & -0,258625 & 1,2605805 & 1,3256648 & 0,1609981 & 0,2586245 & -1,26058 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,0005301 \\ -0,000791 \\ 0,0004998 \\ -0,000643 \\ 0,0004227 \\ -0,000939 \\ 0,0005111 \\ -0,001119 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2799,808 \\ -7226,016 \\ 3355,5722 \end{bmatrix} \quad T_o = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot T_o = \begin{bmatrix} -1000,349 \\ -9025,474 \\ -238,8181 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,20007 \\ \sigma'_y / b_y &= -1,805095 \\ \tau'_{xy} / b_y &= -0,047764 \end{aligned}$$

3. Elemen 32

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3,548	2,049
2	4,023	2,324
3	3,674	2,879
4	3,224	2,511

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_i \mathbf{C}_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,4625 & 0,3215 \\ -0,3365 & 0,5085 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,343366$$

$$\begin{aligned} \text{DG11} &= -0,272304 & \text{DG21} &= -1,163482 \\ \text{DG12} &= 1,2086229 & \text{DG22} &= -0,183478 \\ \text{DG13} &= 0,2723042 & \text{DG23} &= 1,1634815 \\ \text{DG14} &= -1,208623 & \text{DG24} &= 0,1834777 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,272304 & 0 & 1,2086229 & 0 & 0,2723042 & 0 & -1,208623 & 0 \\ 0 & -1,163482 & 0 & -0,183478 & 0 & 1,1634815 & 0 & 0,1834777 \\ -1,163482 & -0,272304 & -0,183478 & 1,2086229 & 1,1634815 & 0,2723042 & 0,1834777 & -1,208623 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{MATRIKS } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,0004998 \\ -0,000643 \\ 0,0004597 \\ -0,000502 \\ 0,0003231 \\ -0,000768 \\ 0,0004223 \\ -0,000939 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1551,607 \\ -4977,781 \\ 2166,7763 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} -531,6675 \\ -5997,721 \\ -400,1886 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,106334 \\ \sigma'_y / b_y &= -1,199544 \\ \tau'_{xy} / b_y &= -0,080038 \end{aligned}$$

4. Elemen 44

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	4,023	2,324
2	4,5	2,598
3	4,125	3,2448
4	3,674	2,879

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = D_i C_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,464 & 0,3199 \\ -0,362 & 0,6009 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,394621$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,356037 & DG21 &= -1,046573 \\ DG12 &= 1,1666879 & DG22 &= -0,129238 \\ DG13 &= 0,3560375 & DG23 &= 1,0465727 \\ DG14 &= -1,166688 & DG24 &= 0,1292378 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,356037 & 0 & 1,1666879 & 0 & 0,3560375 & 0 & -1,166688 & 0 \\ 0 & -1,046573 & 0 & -0,129238 & 0 & 1,0465727 & 0 & 0,1292378 \\ -1,046573 & -0,356037 & -0,129238 & 1,1666879 & 1,0465727 & 0,3560375 & 0,1292378 & -1,166688 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,0004597 \\ -0,000502 \\ 0,0004089 \\ -0,000362 \\ 0,0001911 \\ -0,000568 \\ 0,0003231 \\ -0,000768 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}] \{\varepsilon\}$$

$$= [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -703,8361 \\ -2644,131 \\ 1214,9474 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma\} To \begin{bmatrix} -136,7345 \\ -3211,232 \\ -232,6986 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,027347 \\ \sigma'_y / b_y &= -0,642246 \\ \tau'_{xy} / b_y &= -0,04654 \end{aligned}$$

5. Elemen 9

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	2,772	1,148
2	3,242	1,331
3	3,073	1,775
4	2,598	1,5

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = D_L C_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,4725 & 0,229 \\ -0,1715 & 0,398 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,2273285$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,371709 & DG21 &= -1,416452 \\ DG12 &= 1,3790616 & DG22 &= -0,662038 \\ DG13 &= 0,3717088 & DG23 &= 1,4164524 \\ DG14 &= -1,379062 & DG24 &= 0,6620375 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,371709 & 0 & 1,3790616 & 0 & 0,3717088 & 0 & -1,379062 & 0 \\ 0 & -1,416452 & 0 & -0,662038 & 0 & 1,4164524 & 0 & 0,6620375 \\ -1,416452 & -0,371709 & -0,662038 & 1,3790616 & 1,4164524 & 0,3717088 & 0,6620375 & -1,379062 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,0004175 \\ -0,000635 \\ 0,000479 \\ -0,000549 \\ 0,0005301 \\ -0,000791 \\ 0,0005209 \\ -0,000966 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3627,853 \\ -11030,96 \\ 5411,6383 \end{bmatrix} \quad \text{To} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot \text{To} = \begin{bmatrix} -792,0133 \\ -13866,8 \\ -499,8197 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,158403 \\ \sigma'_y / b_y &= -2,77336 \\ \tau'_{xy} / b_y &= -0,099964 \end{aligned}$$

6. Elemen 21

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3,242	1,331
2	3,786	1,537
3	3,548	2,049
4	3,073	1,775

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_L \mathbf{C}_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,5095 & 0,24 \\ -0,2035 & 0,178 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,29238$$

DG11 =	-0,407003	DG21 =	-1,219299
DG12 =	1,22785	DG22 =	-0,52329
DG13 =	0,4070032	DG23 =	1,2192995
DG14 =	-1,22785	DG24 =	0,5232898

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,407003 & 0 & 1,22785 & 0 & 0,4070032 & 0 & -1,22785 & 0 \\ 0 & -1,219299 & 0 & -0,52329 & 0 & 1,2192995 & 0 & 0,5232898 \\ -1,219299 & -0,407003 & -0,52329 & 1,22785 & 1,2192995 & 0,4070032 & 0,5232898 & -1,22785 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,000479 \\ -0,000549 \\ 0,000484 \\ -0,000431 \\ 0,0004998 \\ -0,000643 \\ 0,0005301 \\ -0,000791 \end{bmatrix}$$

c. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$[D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3056,348 \\ -6978,611 \\ 3483,1002 \end{bmatrix} \quad T_o = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot T_o = \begin{bmatrix} -1020,46 \\ -9014,499 \\ 43,160078 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,204092 \\ \sigma'_y / b_y &= -1,8029 \\ \tau'_{xy} / b_y &= 0,008632 \end{aligned}$$

7. Elemen 33

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3,787	1,537
2	4,33	1,743
3	4,023	2,324
4	3,548	2,049

b. Matriks J

$$J = D_i C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,5095 & 0,2405 \\ -0,2725 & 0,5465 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,343978$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,444796 & DG21 &= -1,136701 \\ DG12 &= 1,1439685 & DG22 &= -0,344499 \\ DG13 &= 0,4447959 & DG23 &= 1,1367006 \end{aligned}$$

$$DG14 = -1,143969 \quad DG24 = 0,3444988$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,444796 & 0 & 1,1439685 & 0 & 0,4447959 & 0 & -1,14397 & 0 \\ 0 & -1,136701 & 0 & -0,344499 & 0 & 1,136701 & 0 & 0,344499 \\ -1,136701 & -0,444796 & -0,344499 & 1,1439685 & 1,1367006 & 0,444796 & 0,344499 & -1,14397 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{MATRIKS } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,000484 \\ -0,000431 \\ 0,0004774 \\ -0,000321 \\ 0,0004597 \\ -0,000502 \\ 0,0004998 \\ -0,000643 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}] \{\varepsilon\}$$

$$= [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2062,555 \\ -4446,287 \\ 2447,1098 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,8660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot T_o = \begin{bmatrix} -539,2288 \\ -5969,614 \\ 191,36843 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,107846 \\ \sigma'_y / l_x &= -1,193923 \\ \tau'_{xy} / b_y &= 0,0382737 \end{aligned}$$

8. Elemen 45

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	4,33	1,743
2	4,875	1,949
3	4,5	2,598
4	4,023	2,324

b. Matriks J

$$J = D_L C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,511 & 0,24 \\ -0,341 & 0,615 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,396105$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,473359 & DG21 &= -1,075472 \\ DG12 &= 1,0792593 & DG22 &= -0,21459 \\ DG13 &= 0,4733593 & DG23 &= 1,0754724 \\ DG14 &= -1,079259 & DG24 &= 0,2145896 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,473359 & 0 & 1,0792593 & 0 & 0,4733593 & 0 & -1,079259 & 0 \\ 0 & -1,075472 & 0 & -0,21459 & 0 & 1,0754724 & 0 & 0,2145896 \\ -1,075472 & -0,473359 & -0,21459 & 1,0792593 & 1,0754724 & 0,4733593 & 0,2145896 & -1,079259 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0,000479 \\ -0,000549 \\ 0,000484 \\ -0,000431 \\ 0,000498 \\ -0,000643 \\ 0,0005301 \\ -0,000791 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\varepsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -962,1325 \\ -2254,204 \\ 1352,5406 \end{bmatrix} \quad \text{To} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,6660254 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866025 \\ -0,433013 & 0,4330127 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} \cdot \text{To} = \begin{bmatrix} -113,816 \\ -3102,521 \\ 116,78672 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma'_x / b_y &= -0,022763 \\ \sigma'_y / b_y &= -0,620504 \\ \tau'_{xy} / b_y &= 0,0233573 \end{aligned}$$

Tabel 3.2 Tabel Rata-rata Rasio Tegangan SAP90 Daerah C - D

SAP90	3	3,2745	3,8235	4,3725	4,9215	5
ATAS		-2,76332	-1,80509	-1,19954	-0,64225	
BAWAH		-2,77336	-1,8029	-1,193923	-0,620504	
RATA-RATA		-2,76834	-1,803995	-1,196732	-0,631377	

Tabel 3.3 Tabel Rasio Tegangan Daerah C - D

	3	3,2745	3,8235	4,3725	4,9215	5
PSCST		-2,58621	-1,7931	-1,17241	-0,65517	
PSQ4		-2,72414	-1,7931	-1,17241	-0,65517	
PSQ8		-2,86207	-1,7931	-1,17241	-0,65517	
SAP90		-2,76834	-1,803995	-1,196732	-0,631377	

3.6.3 Daerah E - F

1. Elemen 12

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3	0
2	3,75	0
3	3,581	0,444
4	2,974	0,392

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = D_i C_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,6785 & 0,026 \\ -0,0975 & 0,418 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,286148$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,68496 & DG21 &= -1,35594 \\ DG12 &= 0,7758223 & DG22 &= -1,01521 \\ DG13 &= 0,6849602 & DG23 &= 1,355942 \\ DG14 &= -0,775822 & DG24 &= 1,015209 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,68496 & 0 & 0,775822 & 0 & 0,68496 & 0 & -0,775822 & 0 \\ 0 & -1,35594 & 0 & -1,015209 & 0 & 1,355942 & 0 & 1,0152089 \\ -1,355942 & -0,68496 & -1,01521 & 0,7753223 & 1,355942 & 0,68496 & 1,0152089 & -0,775822 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,000187 \\ -0,00016 \\ 0,000116 \\ -0,00014 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1523,01 \\ -7631,69 \\ 2857,716 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -0,3046 \\ \sigma_y / b_y = -1,52634 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,571543 \end{array}$$

2. Elemen 24

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	3,75	0
2	-4,5	0
3	4,262	0,512
4	3,581	0,444

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = D_i C_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,7155 & 0,034 \\ -0,2035 & 0,478 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,286148$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,636234 & DG21 &= -1,316891 \\ DG12 &= 0,7336757 & DG22 &= -0,733676 \\ DG13 &= 0,6362344 & DG23 &= 1,3168906 \\ DG14 &= -0,733676 & DG24 &= 0,7336757 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,636234 & 0 & 0,7336757 & 0 & 0,6362344 & 0 & -0,733676 & 0 \\ 0 & -1,316891 & 0 & -0,733676 & 0 & 1,316891 & 0 & 0,7336757 \\ -1,316891 & -0,636234 & -0,733676 & 0,7336757 & 1,3168906 & 0,636234 & 0,7336757 & -0,733676 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0002079 \\ -0,000115 \\ 0,000187 \\ -0,000159 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1875,896 \\ -5924,706 \\ 3495,8953 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -0,375179 \\ \sigma_y / b_y = -1,184941 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,6991791 \end{array}$$

3. Elemen 36

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	4,5	0
2	5,25	0
3	4,943	0,581
4	4,262	0,512

b. Matriks J

$$J = D_i C_N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0,7155 & 0,0345 \\ -0,2725 & 0,5465 \end{bmatrix}$$

$$|J| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,400422$$

DG11 =	-0,639326	DG21 =	-1,233698
DG12 =	0,7254846	DG22 =	-0,553166
DG13 =	0,6393255	DG23 =	1,2336984
DG14 =	-0,725485	DG24 =	0,5531664

c. Matriks [B]

$$B_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,639326 & 0 & 0,7254846 & 0 & 0,6393255 & 0 & -0,725485 & 0 \\ 0 & -1,233698 & 0 & -0,553166 & 0 & 1,2336984 & 0 & 0,5531664 \\ -1,233698 & -0,639326 & -0,553166 & 0,7254846 & 1,2336984 & 0,6393255 & 0,5531664 & -0,725485 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0002037 \\ -9,27E-05 \\ 0,0002079 \\ -0,000115 \end{bmatrix}$$

e. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1626,177 \\ -4047,413 \\ 3003,6379 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -0,325235 \\ \sigma_y / b_y = -0,809483 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,6007276 \end{array}$$

4. Elemen 48

a. Koordinat Titik Buhul

	X	Y
1	5,25	0
2	6	0
3	5,625	0,65
4	4,943	0,581

b. Matriks J

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_L \mathbf{C}_N$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0,716 & 0,0345 \\ -0,341 & 0,6155 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}| = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} = 0,452463$$

$$\begin{aligned} DG11 &= -0,642042 & DG21 &= -1,168053 \\ DG12 &= 0,7182916 & DG22 &= -0,414399 \\ DG13 &= 0,6420422 & DG23 &= 1,1680526 \\ DG14 &= -0,718292 & DG24 &= 0,414399 \end{aligned}$$

c. Matriks [B]

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,642042 & 0 & 0,7182916 & 0 & 0,6420422 & 0 & -0,718292 & 0 \\ 0 & -1,168053 & 0 & -0,414399 & 0 & 1,1680526 & 0 & 0,414399 \\ -1,168053 & -0,642042 & -0,414399 & 0,7182916 & 1,1680526 & 0,6420422 & 0,414399 & -0,718292 \end{bmatrix}$$

d. Regangan

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$



$$\text{Matriks } \{d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0002064 \\ -0,000109 \\ 0,0002037 \\ -9,27E-05 \end{bmatrix}$$

c. Tegangan Normal & Rasio Tegangan

$$\{\epsilon\} = [B_i] \{d_i\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1396,005 \\ -3733,452 \\ 2477,7089 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_x / b_y = -0,279201 \\ \sigma_y / b_y = -0,74669 \\ \tau_{xy} / b_y = 0,4955418 \end{array}$$

Tabel 3.4 Tabel Rasio Tegangan Daerah E - F

	3	3,375	4,125	4,875	5,625	6
PSCST		-1,6207	-1,15517	-0,81035	-0,74138	
PSQ4		-1,5517	-1,15517	-0,81035	-0,74138	
PSQ8		-1,4655	-1,15517	-0,81035	-0,74138	
SAP90		-1,5263	-1,18494	-0,80948	-0,74689	

BAB IV

ANALISIS STRUKTUR MENARA AIR DENGAN SAP90

4.1 Umum

Untuk lebih memperjelas penggunaan Metode Elemen Hingga pada analisis struktur *shell 3 dimensi*, diambil kasus lain yaitu Menara Air, yang dimasukkan data strukturnya ke program SAP90 untuk menghitung analisis struktur tersebut.

4.2 Data Struktur Menara Air

Menara air ini mempunyai ketinggian total 22,5 meter dengan dimensi tandon : tinggi = 10,5 meter, diameter = 9 meter, tebal 20 cm, beban yang ditahan menara air adalah beban air sebesar 1 ton per meter persegi, ditambah berat sendiri struktur menara air tersebut.

Kapasitas tandon menara air adalah seperti pada perhitungan di bawah ini .

$$V_1 = \frac{1}{2} * \frac{4}{3} * \pi * (4.1)^3 = 144.3478048 \text{ m}^3$$

$$V_2 = \frac{1}{4} * \pi * (8.6)^2 * 3.0 = 174.2641438 \text{ m}^3$$

$$V_3 = \frac{1}{4} * \pi * (3)^2 * 3.0 = 21.20575041 \text{ m}^3$$

$$V_4 = \frac{1}{2} * \frac{4}{3} * \pi * (2.6)^3 = 36.81108832 \text{ m}^3$$

$$\Sigma_{\text{netto}} = 376.6287874 \text{ m}^3$$

$$= 376628.7874 \text{ liter}$$

$$\text{Kebutuhan air 1 orang per hari} = 400 \text{ liter}$$

$$\text{Menara air mampu melayani} = 376628.7874 / 400$$

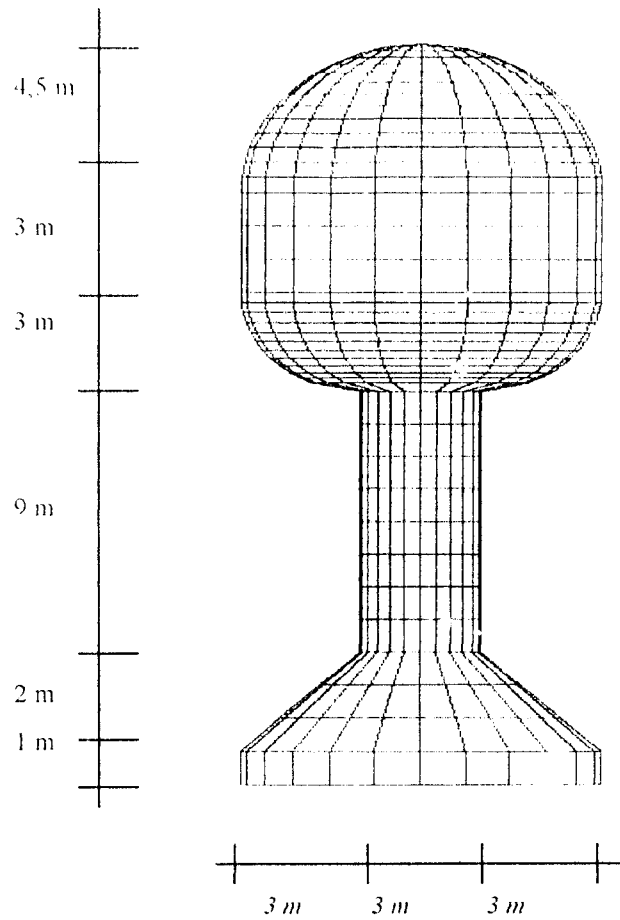
$$= 941.57 \text{ orang per hari}$$

Jika 1 kk terdiri dari 5 orang,

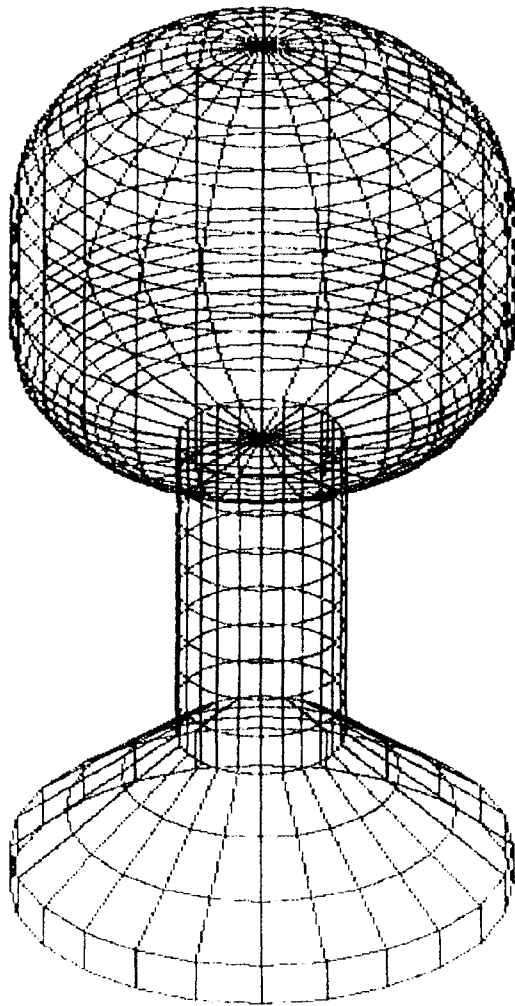
$$\text{maka Menara Air mampu melayani} = 941.57 / 5$$

$$= 188 \text{ kk} \approx 1 \text{ Kelurahan.}$$

selengkapnya data struktur Menara Air dapat dilihat pada gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1. Menara Air



Gambar 4.2. Tampak Tiga Dimensi Menara Air

4.3 Keluaran Perhitungan SAP90

4.3.1. Masukan Data

Masukan data struktur menara air pada program SAP90 seperti di bawah ini :

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"
SYSTEM

L=1

JOINTS

5000	X=0	Y=0	Z=0	
5001			Z=22	
1	X=-4.5		Z=0	A=5000,5001,1,11,1,30
13	X=-4.5		Z=1	A=5000,5001,13,11,1,30
25	X=-3.5		Z=2	A=5000,5001,25,11,1,30
37	X=-2.5		Z=3	A=5000,5001,37,11,1,30
49	X=-1.5		Z=4	A=5000,5001,49,11,1,30
61			Z=5	A=5000,5001,61,11,1,30
73			Z=6	A=5000,5001,73,11,1,30
85			Z=7	A=5000,5001,85,11,1,30
97			Z=8	A=5000,5001,97,11,1,30
109			Z=9	A=5000,5001,109,11,1,30
121			Z=10	A=5000,5001,121,11,1,30
133			Z=11	A=5000,5001,133,11,1,30
145			Z=12	A=5000,5001,145,23,1,15
5002	X=-1.5		Z=15	
C 5003		Y=10		A=5002,5003,145,23,1,15
241	X=-2.720	Y=.000	Z=12.259	A=5000,5001,241,23,1,15
265	X=-3.000	Y=.000	Z=12.402	A=5000,5001,265,23,1,15
289	X=-3.263	Y=.000	Z=12.573	A=5000,5001,289,23,1,15
313	X=-3.507	Y=.000	Z=12.771	A=5000,5001,313,23,1,15
337	X=-3.729	Y=.000	Z=12.993	A=5000,5001,337,23,1,15
361	X=-3.927	Y=.000	Z=13.237	A=5000,5001,361,23,1,15
385	X=-4.098	Y=.000	Z=13.500	A=5000,5001,385,23,1,15
409	X=-4.241	Y=.000	Z=13.780	A=5000,5001,409,23,1,15
433	X=-4.353	Y=.000	Z=14.073	A=5000,5001,433,23,1,15
457	X=-4.434	Y=.000	Z=14.376	A=5000,5001,457,23,1,15
481	X=-4.484	Y=.000	Z=14.686	A=5000,5001,481,23,1,15
505	X=-4.500	Y=.000	Z=15.000	A=5000,5001,505,23,1,15
529			Z=16	A=5000,5001,529,23,1,15
553			Z=17	A=5000,5001,553,23,1,15
577			Z=18	A=5000,5001,577,23,1,15
5004	X=0			
C 5005		Y=10		A=5004,5005,577,15,24,6
601	X=-4.475	Y=.000	Z=18.470	A=5000,5001,601,23,1,15
625	X=-4.402	Y=.000	Z=18.936	A=5000,5001,625,23,1,15
649	X=-4.280	Y=.000	Z=19.391	A=5000,5001,649,23,1,15
673	X=-4.111	Y=.000	Z=19.830	A=5000,5001,673,23,1,15
697	X=-3.897	Y=.000	Z=20.250	A=5000,5001,697,23,1,15
721	X=-3.641	Y=.000	Z=20.645	A=5000,5001,721,23,1,15
745	X=-3.344	Y=.000	Z=21.011	A=5000,5001,745,23,1,15
769	X=-3.011	Y=.000	Z=21.344	A=5000,5001,769,23,1,15


```

793 X=-2.645 Y=.000 Z=21.641 A=5000,5001,793,23,1,15
817 X=-2.250 Y=.000 Z=21.897 A=5000,5001,817,23,1,15
841 X=-1.830 Y=.000 Z=22.111 A=5000,5001,841,23,1,15
865 X=-1.391 Y=.000 Z=22.280 A=5000,5001,865,23,1,15
889 X=-.936 Y=.000 Z=22.402 A=5000,5001,889,23,1,15
913 X=0 Y=.000 Z=22.5

```

RESTRAINTS

```

1 12 1 R 1,1,1,1,1,1

```

SHELL

C CONTROL INFORMATION DATA

```

NM=1 Z=-1

```

C MATERIAL PROPERTIES DATA

```

1 E=2.35E6 U=0.2 W=2.4+0.5/0.2

```

C ELEMENT LOCATION DATA

```

1 JQ=1,2,13,14 M=1 TH=0.2 G=11,11
133 JQ=12,1,24,13 M=1 TH=0.2 G=1,11
146 JQ=145,146,241,242 M=1 TH=0.2 G=23,11
403 JQ=263,145,264,241 M=1 TH=0.2 G=1,11
416 JQ=529,530,553,554 M=1 TH=0.2 G=23,3
486 JQ=552,529,576,553 M=1 TH=0.2 G=1,3
489 JQ=601,602,625,626 M=1 TH=0.2 G=23,12
766 JQ=624,601,648,625 M=1 TH=0.2 G=1,12
777 JQ=889,890,913
778 JQ=890,891,913
779 JQ=891,892,913
780 JQ=892,893,913
781 JQ=893,894,913
782 JQ=894,895,913
783 JQ=895,896,913
784 JQ=896,897,913
785 JQ=897,898,913
786 JQ=898,899,913
787 JQ=899,900,913
788 JQ=900,901,913
789 JQ=901,902,913
790 JQ=902,903,913
791 JQ=903,904,913
792 JQ=904,905,913
793 JQ=905,906,913
794 JQ=906,907,913
795 JQ=907,908,913
796 JQ=908,909,913
797 JQ=909,910,913
798 JQ=910,911,913
799 JQ=911,912,913
800 JQ=912,889,913

```

4.3.2 Keluaran Data

Keluaran program SAP90 dalam kasus ini berupa file-file :

1. File *.SAP
2. File *.SOL
3. File *.EQN
4. File *.FEF
5. File *.F4F

Pada bagian keluaran data ini (SAP, SOL, EQN, FEF maupun F4F) koordinat joint, nomor elemen, anjakan (*displacement*), reaksi, kesetimbangan, momen dan gaya-gaya elemen tidak ditampilkan semua, mengingat jumlah joint yang sangat banyak. Tetapi dipilih nomor joint awal dan nomor joint akhir.

1. File *.SAP

Berisi data struktur dari struktur yang akan dieksekusi. Misalnya koordinat joint, lokasi elemen dan dukungan yang bekerja.

```
sap90.exe                                PAGE 1
                                           PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.SAP
MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SYSTEM DATA

EXECUTION CODE ----- 0
NUMBER OF LOAD CONDITIONS ----- 1
STEADY STATE LOAD FREQUENCY ----- .0000E+00
NUMBER OF EIGENVALUES ----- 0
EIGEN CONVERGENCE TOLERANCE ----- .1000E-03
EIGEN CUTOFF TIME PERIOD ----- .0000E+00
```

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

GENERATED JOINT COORDINATES

JOINT	X	Y	Z
1	-4.500	.000	.000
2	-4.347	-1.165	.000
3	-3.897	-2.250	.000
4	-3.182	-3.182	.000
5	-2.250	-3.897	.000
6	-1.165	-4.347	.000
7	.000	-4.500	.000
8	1.165	-4.347	.000
9	2.250	-3.897	.000
10	3.182	-3.182	.000
11	3.897	-2.250	.000
12	4.347	-1.165	.000
13	4.500	.000	.000
14	4.347	1.165	.000
15	3.897	2.250	.000
16	3.182	3.182	.000
17	2.250	3.897	.000
18	1.165	4.347	.000
19	.000	4.500	.000
20	-1.165	4.347	.000
21	-2.250	3.897	.000
22	-3.182	3.182	.000
23	-3.897	2.250	.000
24	-4.347	1.165	.000
25	-4.500	.000	1.000
.	.	.	.
975	.811	.468	22.402
976	.662	.662	22.402
977	.468	.811	22.402
978	.242	.904	22.402
979	.000	.936	22.402
980	-.242	.904	22.402
981	-.468	.811	22.402
982	-.662	.662	22.402
983	-.811	.468	22.402
984	-.904	.242	22.402
985	.000	.000	22.500
986	.000	.000	12.000
5000	.000	.000	.000
5001	.000	.000	22.000
5002	-1.500	.000	15.000
5004	.000	.000	18.000

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

R E S T R A I N T D A T A

JOINT	RX	RY	RZ	RXX	RYY	RZZ
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1
5000	1	1	1	1	1	1
5001	1	1	1	1	1	1
5002	1	1	1	1	1	1
5004	1	1	1	1	1	1

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

S H E L L C O N T R O L D A T A

NUMBER OF ELEMENT MATERIAL TYPES 1
 TYPE OF KELUARAN RESULTANTS

LOAD	GRAVITATIONAL MULTIPLIERS			TEMPERATURE	PRESSURE
COND	X	Y	Z	MULTIPLIERS	MULTIPLIERS
1	.000	.000	-1.000	.000	.000

MATERIAL PROPERTY DATA

MAT ID	MODULUS OF ELASTICITY	POISSONS RATIO	WEIGHT PER UNIT VOL.	MASS PER UNIT VOL.	THERMAL EXPANSION
1	.2350E+07	.200E+00	.1700E+02	.0000E+00	.0000E+00

SHELL ELEMENT DATA

ELT ID	JOINT I	JOINT J	JOINT K	JOINT L	ELT TYPE	MAT ID	MEMBRANE THICKNESS	BENDING THICKNESS	REF TEMP	LOC AXIS
1	1	2	25	26	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
2	2	3	26	27	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
3	3	4	27	28	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
4	4	5	28	29	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
5	5	6	29	30	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
6	6	7	30	31	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
7	7	8	31	32	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
8	8	9	32	33	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
9	9	10	33	34	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
10	10	11	34	35	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
11	11	12	35	36	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
12	12	13	36	37	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
13	13	14	37	38	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
14	14	15	38	39	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
15	15	16	39	40	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
16	16	17	40	41	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
17	17	18	41	42	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
18	18	19	42	43	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
19	19	20	43	44	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
20	20	21	44	45	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
21	21	22	45	46	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
22	22	23	46	47	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
23	23	24	47	48	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
24	25	26	49	50	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
25	26	27	50	51	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
26	27	28	51	52	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
27	28	29	52	53	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
28	29	30	53	54	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
29	30	31	54	55	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
30	31	32	55	56	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
31	32	33	56	57	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
32	33	34	57	58	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SHELL ELEMENT DATA

ELT ID	JOINT I	JOINT J	JOINT K	JOINT L	ELT TYPE	MAT ID	MEMBRANE THICKNESS	BENDING THICKNESS	REF TEMP	LOC AXIS
33	34	35	58	59	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
34	35	36	59	60	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
35	36	37	60	61	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
36	37	38	61	62	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
37	38	39	62	63	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
38	39	40	63	64	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
39	40	41	64	65	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
40	41	42	65	66	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
41	42	43	66	67	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
42	43	44	67	68	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
43	44	45	68	69	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
44	45	46	69	70	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
45	46	47	70	71	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
46	47	48	71	72	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
47	49	50	73	74	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
48	50	51	74	75	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
49	51	52	75	76	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
50	52	53	76	77	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
51	53	54	77	78	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
52	54	55	78	79	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
.										
.										
.										
1022	294	295	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1023	295	296	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1024	296	297	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1025	297	298	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1026	298	299	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1027	299	300	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1028	300	301	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1029	301	302	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1030	302	303	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1031	303	304	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1032	304	305	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1033	305	306	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1034	306	307	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1035	307	308	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1036	308	309	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1037	309	310	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1038	310	311	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1039	311	312	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0
1040	312	289	986	986	0	1	.2000E+00	.2000E+00	.00	0

sap90.exe

PAGE 55

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.SAP

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

TOTAL WEIGHTS AND MASSES

PROP	WEIGHT	MASS
1	1702.7716	.0000
TOTAL	1702.7716	.0000

sap90.exe

PAGE 56

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.SAP

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

OUTPUT FILES CREATED BY PROGRAM

MASUKAN DATA ECHO	ta2.SAP
SOLUTION ERRORS AND WARNINGS	ta2.ERR
EQUATION NUMBERING	ta2.EQN
DISPLACEMENTS AND REACTIONS	ta2.SOL
ELEMENT FORCES	ta2.FEF
SHELL ELEMENT FORCES	ta2.F4F

2. File *.SOL

Pada file *.SOL ini ditampilkan anjakan *joint* (*joint displacement*), rotasi dan reaksi *joint* akibat beban yang ditahan oleh struktur.

sap90.exe

PAGE 1

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.SOL

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOV"

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
7	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
8	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
9	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
10	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
11	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
12	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
13	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
14	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
15	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
16	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
17	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
.						
.						
.						
981	.000006	-.000010	-.016241	.000020	.000012	.000000
982	.000008	-.000008	-.016241	.000016	.000016	.000000
983	.000010	-.000006	-.016241	.000012	.000020	.000000
984	.000011	-.000003	-.016241	.000006	.000022	.000000
985	.000000	.000000	-.016260	.000000	.000000	.000000
986	.000000	.000000	-.002947	.000000	.000000	.000000
5000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5001	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5002	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5004	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

REACTIONS AND APPLIED FORCES

LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1	17.4079	.0000	70.9350	.0000	12.5023	.0000
2	16.8147	4.5055	70.9350	-3.2358	12.0763	.0000
3	15.0757	8.7039	70.9350	-6.2512	10.8273	.0000
4	12.3092	12.3092	70.9350	-8.8405	8.8405	.0000
5	8.7039	15.0757	70.9350	-10.8273	6.2512	.0000
6	4.5055	16.8147	70.9350	-12.0763	3.2358	.0000
7	.0000	17.4079	70.9350	-12.5023	.0000	.0000
8	-4.5055	16.8147	70.9350	-12.0763	-3.2358	.0000
9	-8.7039	15.0757	70.9350	-10.8273	-6.2512	.0000
10	-12.3092	12.3092	70.9350	-8.8405	-8.8405	.0000
11	-15.0757	8.7039	70.9350	-6.2512	-10.8273	.0000
12	-16.8147	4.5055	70.9350	-3.2358	-12.0763	.0000
13	-17.4079	.0000	70.9350	.0000	-12.5023	.0000
14	-16.8147	-4.5055	70.9350	3.2358	-12.0763	.0000
15	-15.0757	-8.7039	70.9350	6.2512	-10.8273	.0000
16	-12.3092	-12.3092	70.9350	8.8405	-8.8405	.0000
17	-8.7039	-15.0757	70.9350	10.8273	-6.2512	.0000
18	-4.5055	-16.8147	70.9350	12.0763	-3.2358	.0000
19	.0000	-17.4079	70.9350	12.5023	.0000	.0000
20	4.5055	-16.8147	70.9350	12.0763	3.2358	.0000
21	8.7039	-15.0757	70.9350	10.8273	6.2512	.0000
22	12.3092	-12.3092	70.9350	8.8405	8.8405	.0000
23	15.0757	-8.7039	70.9350	6.2512	10.8273	.0000
24	16.8147	-4.5055	70.9350	3.2358	12.0763	.0000
.						
.						
.						
979	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
980	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
981	.0000E+00	.0000E+00	-.2205E-11	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
982	.0000E+00	.0000E+00	-.3539E-11	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
983	.0000E+00	.0000E+00	.6679E-11	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
984	.0000E+00	.0000E+00	.3726E-11	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
985	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
986	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
TOTAL	.1684E-11	-.2723E-10	.1702E+04	-.1165E-07	-.8896E-07	.3509E-11

3. File *.EQN

Berisi jumlah persamaan keseimbangan yang terjadi pada setiap joint. Masing-masing joint akan mempengaruhi jumlah persamaan keseimbangan joint lainnya.

sap90.exe

PAGE 1

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.EQN

MEHARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

EQUILIBRIUM EQUATION NUMBERS

JOINT	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
.						
.						
.						
975	5749	5750	5751	5752	5753	5754
976	5737	5738	5739	5740	5741	5742
977	5725	5726	5727	5728	5729	5730
978	5713	5714	5715	5716	5717	5718
979	5701	5702	5703	5704	5705	5706
980	5689	5690	5691	5692	5693	5694
981	5677	5678	5679	5680	5681	5682
982	5665	5666	5667	5668	5669	5670
983	5653	5654	5655	5656	5657	5658
984	5641	5642	5643	5644	5645	5646
985	5767	5768	5769	5770	5771	5772
986	1729	1730	1731	1732	1733	1734
5000	0	0	0	0	0	0
5001	0	0	0	0	0	0
5002	0	0	0	0	0	0
5004	0	0	0	0	0	0

4. File *.FEF

Berisi keluaran mekanika struktur yang dieksekusi tetapi dalam koordinat global, yaitu dalam arah x, y, dan z.

sap90.exe

PAGE 1

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.FEF

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"

SHELL ELEMENT JOINT FORCES

ELEMENT ID 1 -----

LOAD

COND	JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1							
	1	8.704	16.137	35.468	.644	6.251	.432
	2	12.584	-13.334	35.468	-2.240	5.871	-.432
	25	-16.263	41.281	-33.470	.835	4.772	-.178
	26	-.025	-44.083	-33.470	-2.041	4.393	.178

ELEMENT ID 2 -----

LOAD

COND	JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1							
	2	4.231	17.840	35.468	-.996	6.205	.432
	3	15.606	-9.623	35.468	-3.683	5.092	-.432
	26	-26.393	35.665	-33.470	-.429	4.825	-.178
	27	6.556	-43.882	-33.470	-3.109	3.715	.178

.
.

.

ELEMENT ID 1039 -----

LOAD

COND	JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1							
	311	-34.797	-129.864	.495	-3.561	.785	.000
	312	67.223	116.433	.495	3.073	-1.963	.000
	986	-67.223	-116.433	.000	-2.894	1.623	.000
	986	34.797	129.864	.000	3.194	-.899	.000

ELEMENT ID 1040 -----

LOAD

COND	JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1							
	312	.000	-134.445	.495	-3.643	-.163	.000
	289	34.797	129.864	.495	3.477	-1.101	.000
	986	-34.797	-129.864	.000	-3.216	.819	.000
	986	.000	134.445	.000	3.318	-.041	.000

5. File *.F4F

Berisi keluaran mekanika struktur yang dieksekusi tetapi dalam koordinat lokal dan setiap satuan panjang.

sap90.exe

PAGE 1

PROGRAM:SAP90/FILE:ta2.F4F

MENARA AIR DENGAN ELEMEN HINGGA UNTUK TUGAS AKHIR OLEH "FAJAR & NOVI"
SHELL ELEMENT FORCES

MEMBRANE FORCES ARE IN FORCE PER UNIT LENGTH
BENDING MOMENTS ARE IN MOMENTS PER UNIT LENGTH

ELEMENT ID 1 -----						
LOAD COND 1 -----						
JOINT	F11	F22	F12	FMAX	FMIN	ANGLE
1	-1.4639E+01	-7.3194E+01	-2.4063E+01	-6.0190E+00	-8.1814E+01	-19.71
2	-1.4639E+01	-7.3194E+01	2.4063E+01	-6.0190E+00	-8.1814E+01	19.71
25	1.3046E+02	-4.4174E+01	-2.4063E+01	1.3372E+02	-4.7429E+01	-7.70
26	1.3046E+02	-4.4174E+01	2.4063E+01	1.3372E+02	-4.7429E+01	7.70
JOINT	M11	M22	M12	MMAX	MMIN	ANGLE
1	0.0817E+00	1.0408E+01	-1.1452E-08	1.0408E+01	2.0817E+00	-90.00
2	2.0817E+00	1.0408E+01	5.5287E-10	1.0408E+01	2.0817E+00	90.00
25	-1.5738E+00	-7.8692E+00	-2.8679E-08	-1.5738E+00	-7.8692E+00	.00
26	-1.5738E+00	-7.8692E+00	-1.6674E-08	-1.5738E+00	-7.8692E+00	.00

ELEMENT ID 2 -----						
LOAD COND 1 -----						
JOINT	F11	F22	F12	FMAX	FMIN	ANGLE
2	-1.4639E+01	-7.3194E+01	-2.4063E+01	-6.0190E+00	-8.1814E+01	-19.71
3	-1.4639E+01	-7.3194E+01	2.4063E+01	-6.0190E+00	-8.1814E+01	19.71
26	1.3046E+02	-4.4174E+01	-2.4063E+01	1.3372E+02	-4.7429E+01	-7.70
27	1.3046E+02	-4.4174E+01	2.4063E+01	1.3372E+02	-4.7429E+01	7.70

ELEMENT ID 1040 -----						
LOAD COND 1 -----						
JOINT	F11	F22	F12	FMAX	FMIN	ANGLE
312	-1.7926E+02	-1.7926E+02	1.7068E-06	-1.7926E+02	-1.7926E+02	37.78
289	-1.7926E+02	-1.7926E+02	-1.7068E-06	-1.7926E+02	-1.7926E+02	-37.78
986	-1.7926E+02	1.7926E+02	5.3573E-11	-1.7926E+02	-1.7926E+02	.00
986	-1.7926E+02	-1.7926E+02	3.6432E-11	-1.7926E+02	-1.7926E+02	.00
JOINT	M11	M22	M12	MMAX	MMIN	ANGLE
312	-5.2030E+00	-5.8815E+00	-4.4659E-02	-5.2030E+00	-5.8844E+00	-3.75
289	-5.2030E+00	-5.8815E+00	4.4659E-02	-5.2001E+00	-5.8844E+00	3.75
986	-4.0158E+00	-4.0158E+00	-2.2359E-07	-4.0158E+00	-4.0158E+00	-3.78
986	-4.0158E+00	-4.0158E+00	2.2360E-07	-4.0158E+00	-4.0158E+00	3.78

BAB V

PEMBAHASAN

5.1 Umum

Struktur gorong-gorong diatas telah dianalisis oleh program komputer PSQ4 dengan elemen Q4, program komputer PSQ8 dengan elemen Q8, dan program komputer PSCST dengan elemen CST.

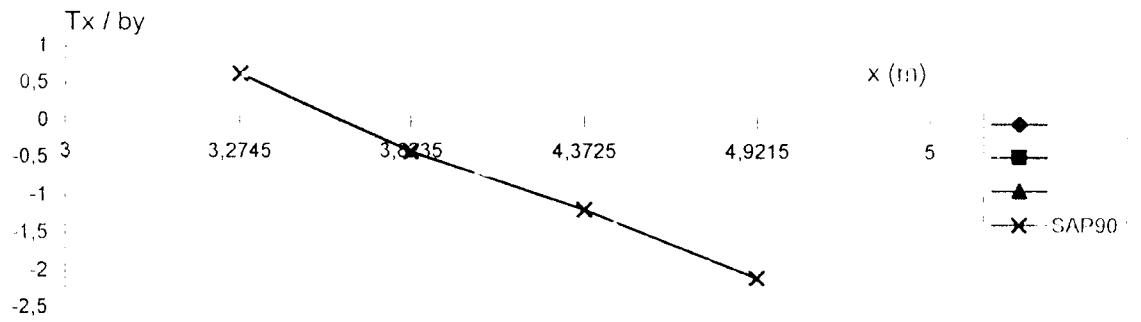
Dari ketiga program diatas didapat rasio tegangan ketiga elemen pada daerah tertentu. Plot dari ketiga rasio tegangan diatas menunjukkan keakuratan dari masing-masing tipe elemen.

5.2 Struktur Gorong-gorong dengan SAP90

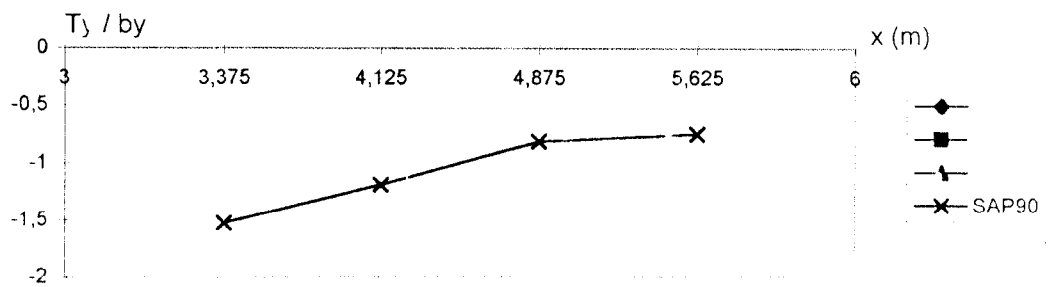
Struktur gorong-gorong diatas dianalisis dengan program komputer SAP90. Data struktur yang digunakan sama dengan data struktur pada ketiga program diatas, tetapi pembebanannya tidak sama. Hal ini karena pada program SAP90 beban pada elemen Shell sebagai beban titik. Oleh karena itu beban pada ketiga program diatas dikonversi menjadi beban titik untuk dimasukan pada program SAP90.

Keluaran dari SAP90 digunakan untuk mencari rasio tegangan dengan menggunakan Formula Isoparametrik Kuadrilateral , untuk kemudian dibandingkan dengan rasio tegangan ketiga program lainnya.

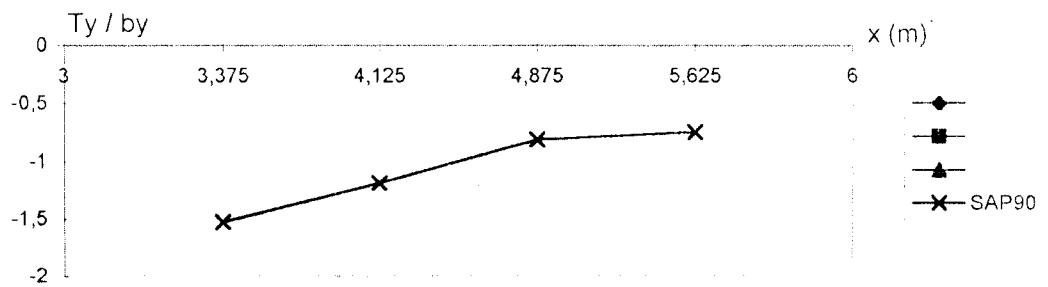
Rasio tegangan dengan program SAP90 dan formula Isoparametrik Kuadrilateral daerah A - B, C - D dan E - F ditampilkan berturut-turut pada grafik berikut ini:



Grafik 5.1 Rasio Tegangan dengan SAP90, daerah A - B



Grafik 5.2 Rasio Tegangan dengan SAP90, daerah C - D

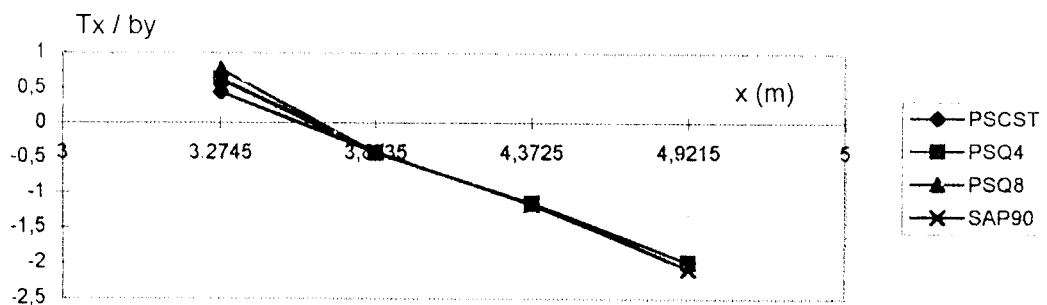


Grafik 5.3 Rasio Tegangan dengan SAP90, daerah E - F

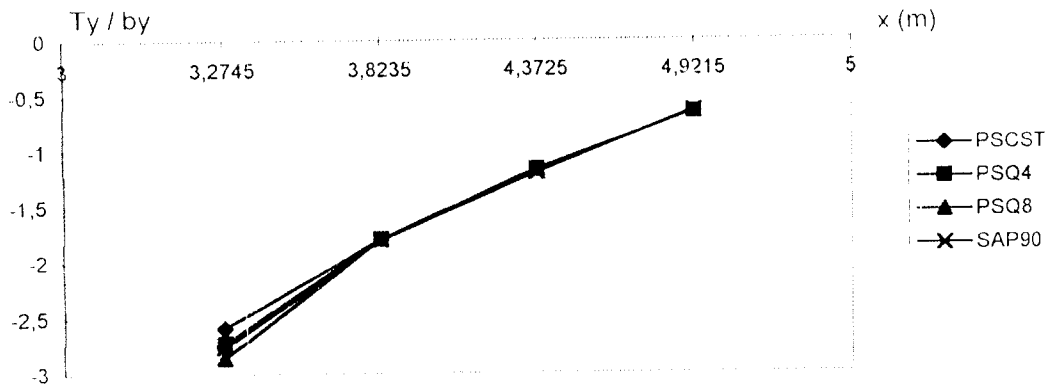
5.3 Komparasi Rasio Tegangan Struktur Gorong-gorong antara SAP90 dan Metode Elemen Hingga

Dari keempat rasio tegangan didapatkan plot grafik yang berhimpit antara elemen Q4 dengan keluaran SAP90 dan Formula Isoparametrik Kuadrilateral. Hal ini terjadi karena program SAP90 menganalisis elemen shell dengan tipe elemen segiempat yang dapat dianggap sebagai tipe elemen Isoparametrik Kuadrilateral Q4 sama dengan program PSQ4.

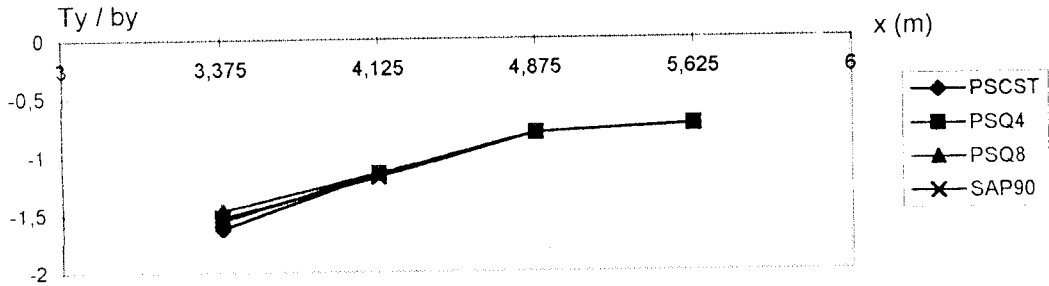
Pada perhitungan SAP90 untuk struktur gorong-gorong tersebut pembagian elemen-elemennya berupa elemen segiempat dengan nomor joint pada setiap sudut elemennya dan garis elemennya merupakan garis lurus. Bentuk elemen tersebut mirip dengan elemen Q4, tetapi pada elemen Q4 garis elemennya dapat dianggap sebagai garis lengkung maupun garis lurus. Plot keempat grafik seperti pada grafik dibawah ini :



Grafik 5.4 Rasio Tegangan daerah A - B



Grafik 5.5 Rasio Tegangan daerah C - D



Grafik 5.6 Rasio Tegangan daerah E - F

Ketiga grafik tersebut merupakan rasio tegangan dengan b_y (σ_x dan σ_y / b_y) keluaran perhitungan program SAP90 jika diplotkan pada grafik rasio tegangan dengan b_x keluaran perhitungan program PSCST, PSQ4 dan PSQ8.

Pada grafik pertama (untuk garis A-B) dan ketiga (untuk garis E-F) titik yang diplotkan menunjukkan nilai rasio tegangan :

SAP90 - rata-rata dari keempat titik integrasi

Sedangkan nilai rasio tegangan dalam grafik kedua (untuk garis C-D) :

SAP90 - rata-rata dari dua quadrilateral (satu pada setiap sisi C-D)

1. SAP90 dengan PSCST

Selisih terbesar terjadi pada titik 3,2745 daerah A - B, yaitu sebesar :

$$\frac{0,635827 - 0,448276}{0,635827} \times 100 \% = 29,4972 \% > 5 \%$$

2. SAP90 dengan PSQ4

Pada grafik diatas terlihat bahwa σ_x dan σ_y / b_y keluaran program SAP90 hampir sama dengan σ_x dan σ_y / b_y keluaran program PSQ4, dan selisih terbesar terjadi pada titik 4,9125 daerah A - B, yaitu sebesar :

$$\frac{(- 2,0752) - (- 1,98276)}{(- 2,0752)} \times 100 \% = 4,4545 \% < 5 \%$$

3. SAP90 dengan PSQ8

Selisih terbesar terjadi pada titik 3,2745 daerah A - B, yaitu sebesar :

$$\frac{0,775862 - 0,635827}{0,775862} \times 100 \% = 18,049 \% > 5 \%$$

Selisih rasio tegangan antara program SAP90 dengan PSCST dan PSQ8 ada yang lebih besar dari 5 % karena pada analisis SAP90 memakai jenis elemen segiempat yang mempunyai bentuk dasar mirip dengan quadrilateral Q4 pada Metode Elemen Hingga dan bukan jenis elemen segitiga maupun jenis elemen quadrilateral Q8.

5.4 Struktur Menara Air

Pada struktur Menara air digunakan tipe elemen isoparametrik kuadrilateral Q4. Tetapi karena struktur tersebut berupa struktur 3 dimensi yang melengkung, dalam membagi elemennya dibagi sedemikian kecil agar tetap didapatkan elemen isoparametrik kuadrilateral Q4 (datar).

Pada struktur menara air digunakan koordinat sumbu tiga dimensi, sedangkan struktur gorong-gorong digunakan koordinat sumbu dua dimensi. Oleh karena itu untuk menghitung rasio tegangannya dapat digunakan formula Isoparametrik Kuadrilateral dengan modifikasi koordinat sumbu tiga dimensi.

Bentuk struktur menara air khususnya pada bagian kolom (dibawah tandon air) dapat dianggap sebagai benda putar (elemen-elemen mengelilingi sumbu putar seperti pada prinsip benda putar). Pada Metode Elemen Hingga terdapat formula khusus untuk menghitung tegangan struktur dengan jenis elemen benda putar, yaitu Formula Aksisimetri.

Aksisimetri adalah salah satu tipe elemen dalam Metode Elemen Hingga, prinsip dari elemen aksisimetri ini adalah berupa elemen-elemen bidang yang mengelilingi garis sumbu dengan jarak elemen-elemen terhadap sumbu selalu sama. Jenis elemen aksisimetri ini biasa digunakan untuk jenis struktur simetris, seperti cerobong nuklir, pipa-pipa air, dan menara-menara.

Pada pembuatan masukan data program SAP90 dalam membagi segmen lingkaran agar dibuat sekecil mungkin sehingga tiap segmen menjadi berupa elemen bidang datar, ini dilakukan agar didapatkan keluaran program yang mendekati sebenarnya karena program SAP90 mengasumsikan setiap elemen bidang sebagai elemen bidang datar. Jadi walaupun terdapat elemen bidang lengkung pada suatu struktur, program SAP90 mengasumsikan elemen tersebut sebagai elemen bidang datar, oleh karena itu pembagian segmen pada struktur bidang amat menentukan ketepatan keluaran keluaran program SAP90. Semakin banyak membagi segmen bidang akan semakin teliti keluaran keluaran SAP90 dengan yang terjadi sebenarnya

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari Bab I sampai dengan Bab V, dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut ini .

1. Grafik rasio tegangan normal dengan beban hidup (b_y) menunjukkan adanya kecenderungan rasio tegangan keluaran program SAP90 mendekati PSQ4. Hal ini berarti bahwa program SAP90 menggunakan Metode Elemen Hingga Formula Isoparametrik dengan jenis elemen isoparametrik kuadrilateral Q4, sehingga jika menggunakan SAP90 dibuat elemen struktur yang berbentuk isoparametrik kuadrilateral Q4 agar didapatkan hasil analisis struktur yang akurat.
2. Program SAP90 tidak menggunakan jenis elemen segitiga regangan konstan (CST) ataupun elemen kuadrilateral Q8, karena selisih rasio tegangannya lebih besar dari 5 % seperti terlihat dalam bab V.
3. Struktur tandon menara air pada Bab IV dianalisis dengan formula Isoparametrik Kuadrilateral, struktur kolom menara air pada Bab IV dapat dianalisis dengan formula Aksisimetri
4. Pembagian elemer dalam program SAP90 sangat menentukan tingkat ketelitian hasil perhitungannya.
5. Pembebanan elemen shell pada program SAP90 dikonversi menjadi beban titik.

6.1. Saran-saran

1. Untuk penulisan selanjutnya tentang analisis SAP90 dengan Metode Elemen Hingga, hendaknya jenis elemen yang dipakai dapat ditambahkan jenis elemen segitiga atau dengan menggunakan jenis elemen dengan tingkat ketelitian yang lebih tinggi.
2. Tinjauan beban dinamis pada SAP90 dapat juga dibuat analisisnya dengan Metode Elemen Hingga.
3. Tekanan tanah dapat juga dianalisis dengan menggunakan Metode Elemen Hingga dengan formula dan jenis elemen tertentu.
4. Untuk mempermudah perhitungan tegangan pada analisis SAP90 dapat dibuat suatu program komputer dengan masukan dari keluaran program SAP90 untuk dicari tegangan elemennya.
5. Dari analisis menara air dapat ditindaklanjuti sampai dengan disain elemen strukturnya.
6. Perlu usaha mandiri mahasiswa untuk mempelajari Mata Kuliah Metode Elemen Hingga.

DAFTAR PUSTAKA

1. SOEMONO, (1985), *Ilmu Gaya Bangunan-bangunan Statis Tak Tentu*, Penerbit Djambatan, Jakarta, Saptodadi,.
2. TIMOSHENKO, S., and KRIEGER, S.W. (1967), *Theory of Plates and Shells*, McGraw - Hill, New York,.
3. ZIENKIEWICZ, O.C., and TAYLOR, L.R.(1991), *The Finite Element Method 4th Edition Vol. I*, McGraw - Hill, Singapore,.
4. ZIENKIEWICZ, O.C., and TAYLOR, L.R.(1991), *The Finite Element Method 4th Edition Vol. II*, McGraw - Hill, Singapore,.
5. DESAI, C.S.(1979), *Elementary Finite Element Method*, Prentice - Hall, Inc.
6. GRAY BA, W.S. and MANNING, G.P., M Eng., FICE., M Cons.E.(1973), *Concrete Water Towers Bunkers Silos and Other Elevated Structures 5th Edition*, Cement and Concrete Association, Billing and Sons Limited, Guilford and London, Great Britain,.
7. WEAVER, WILLIAM, JR. and JOHNSTON, PAUL R. (1984), *Finite Element For Structural Analysis*, Prentice - Hall, Inc., Engelwoods Cliffs, New Jersey 07632,.
8. COOK, ROBERT DAVIS. (1981), *Concept and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Edition*, Department of Engineering Mechanics, University of Wisconsin - Madison, John Wiley & Sons, Inc., Singapore.
9. COOK, ROBERT DAVIS, MALKUS, DAVID S., PLESHA, MICHAEL E. (1989), *Concept and Applications of Finite Element Analysis, 3rd Edition*, University of Wisconsin - Madison, John Wiley & Sons, Inc., Canada.
10. COOK, ROBERT DAVIS.(1995), *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, University of Wisconsin - Madison, John Wiley & Sons, Inc., New York, United State of America.

11. WILSON, EDWARD L. and HABIBULLAH, ASHRAF,(1990). *SAP90™ A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures USERS MANUAL* , Computers & Structures, Inc. 1918 University Avenue, California 94704, USA.
12. WILSON, EDWARD L. and HABIBULLAH, ASHRAF, (1990). *SAP90™ A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, Sample Example and Verification Manual*, Computers & Structures, Inc. 1918 University Avenue, California 94704, USA.
13. KATILI, IRWAN, LATIEF, YUSUF, PRANOTO, WATI, (1996), *Konsep Baru Elemen Cangkang Triangular Sempel dan Efisien*, Media Komunikasi Teknik Sipil Edisi VII / September 1996, Semarang.
14. LOGAN, DARYL L. (1990), *A First Course in the Finite Element Method*, Rose - Hulman Institute of Technology, PWS. Publishers, Boston, USA.
15. KARDESTUNCER, HAYRETTIN and NORRIE, DOUGLAS H.(1988)., *Finite Elemen Handbook*, McGraw - Hill International Editions, Singapore.

LAMPIRAN

MEMEN
COORDINAT JOINT

	X	Y
1	0	3
2	0,392	2,974
3	0,469	3,474
4	0	3,549

2	2	2	2	0	0,75
-2	-2	2	2	0,098	0,7435
				0,11725	0,8685
				0	0,88725

J =	0,4305	-0,0505
	0,0385	0,5245

[J] = 0,2277415

4 [J] = 0,910966

DG11 = -1,2623962 DG21 = -0,8606249

DG12 = 1,04065355 DG22 = -1,0296762

DG13 = 1,26239618 DG23 = 0,86062488

DG14 = -1,0406535 DG24 = 1,02967619

TRIK [-1,2623962	0	1,0406535	0	1,2623962	0	-1,0406535	0
	0	-0,8606249	0	-1,0296762	0	0,8606249	0	1,0296762
	-0,8606249	-1,2623962	-1,0296762	1,0406535	0,8606249	1,2623962	1,0296762	-1,0406535

1/0,09 = 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik d =	0
D =	0,3	1	0		-0,003407
	0	0	0,35		0,000141
					-0,003342
					0,000013
					-0,003353
					0
					-0,003447

tegangan

-1,2623962	-0,2581875	1,04065355	-0,3089029	1,26239618	0,25818746	-1,0406535	0,30890286
-0,3787189	-0,8606249	0,31219606	-1,0296762	0,37871885	0,86062488	-0,3121961	1,02967619
-0,3012187	-0,4418387	-0,3603867	0,36422874	0,30121871	0,44183866	0,36038667	-0,3642287

matrik	0,00014465	3179,13459	0,63582692
teg.	-1,27E-05	-279,10476	-0,055821
	1,5205E-05	334,167669	0,06683353

EL-2A

	X	Y
1	0	3,549
2	0,469	3,474
3	0,563	4,048
4	0	4,098

matrik	-2	2	2	-2	0	0,88725
J =	-2	-2	2	2	0,11725	0,8685
					0,14075	1,012
					0	1,0245

0,516	-0,0625
0,047	0,5615

[J] = 0,292672

4 [J] = 1,170686

DG11 = -1,06604	DG21 = -0,80124
DG12 = 0,852492	DG22 = -0,96183
DG13 = 1,066042	DG23 = 0,80124
DG14 = -0,85249	DG24 = 0,961829

matrik	-1,06604	0	0,852492	0	1,066042	0	-0,85249	0
B =	0	-0,80124	0	-0,96183	0	0,80124	0	0,961829
	-0,80124	-1,06604	-0,96183	0,852492	0,80124	1,066042	0,961829	-0,85249

E/0.09 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik	0
D =	0,3	1	0	d =	-0,00345
	0	0	0,35		0,000013
					-0,00335
					-8,3E-05
					-0,00336
					0
					-0,00348

tegangan

-1,06604	-0,24037	0,852492	-0,28855	1,066042	0,240372	-0,85249	0,288549
-0,31981	-0,80124	0,255747	-0,96183	0,319812	0,80124	-0,25575	0,961829
-0,28043	-0,37311	-0,33664	0,298372	0,280434	0,373115	0,33664	-0,29837

matrik	-9,4E-05	Tx =	-2075,4	Tx/by =	-0,41508
teg.	-8E-05	Ty =	-1758,06	Ty/by =	-0,35161
	4,22E-05	Gxy =	927,0173	Gxy/by =	0,185403

W	X	Y
1	0	4,098
2	0,563	4,048
3	0,656	4,622
4	0	4,647

trik	-2	2	2	-2	0	1,0245
=	-2	-2	2	2	0,14075	1,012
					0,164	1,1555
					0	1,16175

0,6095 -0,0375
0,0465 0,5615

] = 0,343978

] = 1,375912

11 = -0,8707 DG21 = -0,81837

12 = 0,761677 DG22 = -0,95355

13 = 0,870695 DG23 = 0,818366

11 = -0,76168 DG24 = 0,953549

trik	-0,8707	0	0,761677	0	0,870695	0	-0,76168	0
] =	0	-0,81837	0	-0,95355	0	0,818366	0	0,953549
	-0,81837	-0,8707	-0,95355	0,761677	0,818366	0,870695	0,953549	-0,76168

1,09 -21978022

trik	1	0,3	0	matrik d	0
] =	0,3	1	0		-0,00348
	0	0	0,35		-8,3E-05
					-0,00336
					-0,0002
					-0,00339
					0
					-0,00354

egangan

	-0,8707	-0,24551	0,761677	-0,28606	0,870695	0,24551	-0,76168	0,286065
	-0,26121	-0,81837	0,228503	-0,95355	0,261209	0,818366	-0,2285	0,953549
	-0,28643	-0,30474	-0,33374	0,266587	0,286428	0,304743	0,333742	-0,26659

matrik	-0,00027	Tx =	-5859,04	-1,17181
teg.	-0,00016	Ty =	-3532,13	-0,70643
	4,34E-05	Gxy =	954,8352	0,190967

4A

	X	Y
1	0	4,647
2	0,656	4,622
3	0,75	5,196
4	0	5,196

rik	-2	2	2	-2	0	1,16175
=	-2	-2	2	2	0,164	1,1555
					0,1875	1,299
					0	1,299

0,703	-0,0125
0,047	0,5615

J = 0,395322

J] = 1,581288

11 = -0,72599 DG21 = -0,8297

12 = 0,694371 DG22 = -0,94859

13 = 0,72599 DG23 = 0,829703

14 = -0,69437 DG24 = 0,948594

trik	-0,72599	0	0,694371	0	0,72599	0	-0,69437	0
=	0	-0,8297	0	-0,94859	0	0,829703	0	0,948594
	-0,8297	-0,72599	-0,94859	0,694371	0,829703	0,72599	0,948594	-0,69437

0,09 21978022

atrik	1	0,3	0	atrik d	0
=	0,3	1	0		-0,00354
	0	0	0,35		-0,0002
					-0,00339
					-0,00042
					-0,00341
					0
					-0,00358

egangan

-0,72599	-0,24891	0,694371	-0,28458	0,72599	0,248911	-0,69437	0,284578
-0,2178	-0,8297	0,208311	-0,94859	0,217797	0,829703	-0,20831	0,948594
-0,2904	-0,2541	-0,33201	0,24303	0,290396	0,254097	0,332008	-0,24303

atrik	-0,00047	Tx =	-10376	Tx/by =	-2,07521
teg.	-0,00021	Ty =	-4716,72	Ty/by =	-0,94334
	2,3E-05	Gxy =	504,8951	Gxy/by =	0,100979

-10

	X	Y
1	2,598	1,5
2	3,073	1,775
3	2,774	2,143
4	2,38	1,826

matrik	-2	2	2	-2	0,6495	0,375
J =	-2	-2	2	2	0,76825	0,4375
					0,6935	0,53575
					0,595	0,4565

matrik	0,4345	0,296
J =	-0,2585	0,347

[J] = 0,227288

[J] = 0,90915

g11 =	-0,11219	DG21 =	-1,5245
g12 =	1,414508	DG22 =	-0,38717
g13 =	0,112193	DG23 =	1,524501
g14 =	-1,41451	DG24 =	0,387175

matrik	-0,11219	0	1,414508	0	0,112193	0	-1,41451	0
B =	0	-1,5245	0	-0,38717	0	1,524501	0	0,387175
	-1,5245	-0,11219	-0,38717	1,414508	1,524501	0,112193	0,387175	-1,41451

/0,09 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik d	0,000521
D =	0,3	1	0		-0,00097
	0	0	0,35		0,00053
					-0,00079
					0,000511
					-0,00112
					0,000576
					-0,00134

tegangan

	-0,11219	-0,45735	1,414508	-0,11615	0,112193	0,45735	-1,41451	0,116152
	-0,03366	-1,5245	0,424352	-0,38717	0,033658	1,524501	-0,42435	0,387175
	-0,53358	-0,03927	-0,13551	0,495078	0,533575	0,039267	0,135511	-0,49508

matrik	-0,0002	Tx =	-4385,64	Tx/by =	-0,87713
teg.	-0,00046	Ty =	-10216,4	Ty/by =	-2,04327
	0,000266	Gxy =	5940,378	Gxy/by =	1,168076

To =	0,75	0,25	0,866025
	0,25	0,75	-0,86603
	-0,43301	0,433013	0,5

T'=To=	-785,403	Tx/by =	-0,15708
	-13816,6	Ty/by =	-2,76332
	395,4144	Gxy/by =	0,079083

ID	X	Y
1	2,772	1,148
2	3,242	1,331
3	3,073	1,775
4	2,598	1,5

rik	-2	2	2	-2	0,693	0,287
=	-2	-2	2	2	0,8105	0,33275
					0,76825	0,44375
					0,6495	0,375

rik	0,4725	0,229
=	-0,1715	0,398

J	= 0,227329	
J]	= 0,909314	
i1	= -0,37171	DG21 = -1,41645
i2	= 1,379062	DG22 = -0,66204
i3	= 0,371709	DG23 = 1,416452
i11	= -1,37906	DG24 = 0,662038

matrik	-0,37171	0	1,379062	0	0,371709	0	-1,37906	0
3 =	0	-1,41645	0	-0,66204	0	1,416452	0	0,662038
	-1,41645	-0,37171	-0,66204	1,379062	1,416452	0,371709	0,662038	-1,37906

0,09 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik d	0,000418
D =	0,3	1	0		-0,00063
	0	0	0,35		0,000479
					-0,00055
					0,00053
					-0,00079
					0,000521
					-0,00097

tegangan

	-0,37171	-0,42494	1,379062	-0,19861	0,371709	0,424936	-1,37906	0,198611
	-0,11151	-1,41645	0,413718	-0,66204	0,111513	1,416452	-0,41372	0,662038
	-0,49576	-0,1301	-0,23171	0,482672	0,495758	0,130098	0,231713	-0,48267

matrik	-0,00017	Tx =	-3627,85	Tx/by =	-0,72557
teg.	-0,00005	Ty =	-11031	Ty/by =	-2,20619
	0,000246	Gxy =	5411,638	Gxy/by =	1,082328

To =	0,75	0,25	0,866025
	0,25	0,75	-0,86603
	-0,43301	0,433013	0,5

T'=To=	-792,013	Tx/by =	-0,1584
	-13866,8	Ty/by =	-2,77336
	-499,82	Gxy/by =	-0,09996

20

	X	Y
1	3,073	1,775
2	3,548	2,049
3	3,224	2,511
4	2,774	2,143

atrik	-2	2	2	-2	0,76825	0,44375
J =	-2	-2	2	2	0,887	0,51225
					0,806	0,62775
					0,6935	0,53575

atrik	0,4625	0,321
J =	-0,3115	0,415

J] = 0,291929

[J] = 1,167716

311 = -0,161 DG21 = -1,32566

312 = 1,26058 DG22 = -0,25862

313 = 0,160998 DG23 = 1,325665

311 = -1,26058 DG24 = 0,258625

atrik	-0,161	0	1,26058	0	0,160998	0	-1,26058	0
B =	0	-1,32566	0	-0,25862	0	1,325665	0	0,258625
	-1,32566	-0,161	-0,25862	1,26058	1,325665	0,160998	0,258625	-1,26058

/0.09 21978022

atrik	1	0,3	0	atrik d	0,00053
D =	0,3	1	0	J	-0,00079
	0	0	0,35		0,0005
					-0,00064
					0,000422
					-0,00094
					0,000511
					-0,00112

tegangan

	-0,161	-0,3977	1,26058	-0,07759	0,160998	0,397699	-1,26058	0,077587
	-0,0483	-1,32566	0,378174	-0,25862	0,048299	1,325665	-0,37817	0,258625
	-0,46398	-0,05635	-0,09052	0,441203	0,463983	0,056349	0,090519	-0,4412

atrik	-0,00013	Tx =	-2799,81	Tx/by =	-0,55996
teg.	-0,00033	Ty =	-7226,02	Ty/by =	-1,4452
	0,000153	Gxy =	3355,572	Gxy/by =	0,671114

To =	0,75	0,25	0,866025
	0,25	0,75	-0,86603
	-0,43301	0,433013	0,5

T'=To =	-1000,35	Tx/by =	-0,20007
	-9025,47	Ty/by =	-1,80509
	-238,818	Gxy/by =	-0,04776

L-2D

	X	Y
1	3,242	1,331
2	3,786	1,537
3	3,548	2,049
4	3,073	1,775

atrik	-2	2	2	-2	0,8105	0,3275
J =	-2	-2	2	2	0,9465	0,38425
					0,887	0,51225
					0,76825	0,4375

atrik	0,5095	0,24
J =	-0,2035	0,478

[J] =	0,292381		
[J] =	1,169524		
G11 =	-0,4070032	D G21 =	-1,2192995
G12 =	1,22785	D G22 =	-0,5232898
G13 =	0,4070032	D G23 =	1,2192995
G14 =	-1,22785	D G24 =	0,5232898

atrik	-0,4070032	0	1,22785	0	0,4070032	0	-1,22785	0
B =	0	-1,2192995	0	-0,5232898	0	1,2192995	0	0,5232898
	-1,2192995	-0,4070032	-0,5232898	1,22785	1,2192995	0,4070032	0,5232898	-1,22785

E/0.09 21978022

atrik	1	0,3	0	atrik d	0,000479
D =	0,3	1	0		-0,0005492
	0	0	0,35		0,000484
					-0,0004313
					0,0004998
					-0,0006434
					0,0005301
					-0,000791

tegangan

-0,4070032	-0,3657898	1,22785	-0,1569869	0,4070032	0,3657898	-1,22785	0,1569869
-0,122101	-1,2192995	0,368355	-0,5232898	0,122101	1,2192995	-0,368355	0,5232898
-0,4267548	-0,1424511	-0,1831514	0,4297475	0,4267548	0,1424511	0,1831514	-0,4297475

atrik	-0,0001391	Tx =	-3056,3478	Tx/by =	-0,6112696
teg.	-0,0003175	Ty =	-6978,6115	Ty/by =	-1,3957223
	0,0001585	Gxy =	3483,1002	Gxy/by =	0,69662

To =	0,75	0,25	0,8660254
	0,25	0,75	-0,8660254
	-0,4330127	0,4330127	0,5

T' = To =	-1020,4605	Tx/by =	-0,2040921
	-9014,4988	Ty/by =	-1,8028998
	43,160078	Gxy/by =	0,008632

D	X	Y
1	3,548	2,049
2	4,023	2,324
3	3,674	2,879
4	3,224	2,511

k	-2	2	2	-2	0,887	0,51225
	-2	-2	2	2	1,00575	0,581
					0,9185	0,71975
					0,806	0,62775

ik	0,4625	0,3215
=	-0,3365	0,5085

= 0,343366

l) = 1,373464

l1 = -0,2723 DG21 = -1,16348

l2 = 1,208623 DG22 = -0,18348

l3 = 0,272304 DG23 = 1,163482

l1 = -1,20862 DG24 = 0,183478

atrik	-0,2723	0	1,208623	0	0,272304	0	-1,20862	0
=	0	-1,16348	0	-0,18348	0	1,163482	0	0,183478
	-1,16348	-0,2723	-0,18348	1,208623	1,163482	0,272304	0,183478	-1,20862

0,09 21978022

atrik	1	0,3	0	atrik d	0,0005
=	0,3	1	0		-0,00064
	0	0	0,35		0,00046
					-0,0005
					0,000323
					-0,00077
					0,000422
					-0,00094

regangan								
	-0,2723	-0,34904	1,208623	-0,05504	0,272304	0,349044	-1,20862	0,055043
	-0,08169	-1,16348	0,362587	-0,18348	0,081691	1,163482	-0,36259	0,183478
	-0,40722	-0,09531	-0,06422	0,423018	0,407219	0,095306	0,064217	-0,42302

atrik	-7,1E-05	Tx =	-1551,61	Tx/by =	-0,31032
teg.	-0,00023	Ty =	-4977,78	Ty/by =	-0,99556
	9,86E-05	Gxy =	2166,776	Gxy/by =	0,433355

To =	0,75	0,25	0,866025
	0,25	0,75	-0,86603
	-0,43301	0,433013	0,5

T'x =	-531,668	T'x/by =	-0,10633
T'y =	-5997,72	T'y/by =	-1,19954
G'xy =	-400,189	G'xy/by =	-0,08004

-3D

	X	Y
1	3,786	1,537
2	4,33	1,743
3	4,023	2,324
4	3,548	2,049

trik	-2	2	2	-2	0,9465	0,38425
=	-2	-2	2	2	1,0825	0,43575
					1,00575	0,581
					0,887	0,51225

trik	0,5095	0,2405
=	-0,2725	0,5465

[I] =	0,343978		
[J] =	1,375912		
g11 =	-0,4447959	D G21 =	-1,1367006
g12 =	1,1439685	D G22 =	-0,3444988
g13 =	0,4447959	D G23 =	1,1367006
g11 =	-1,1439685	D G24 =	0,3444988

matrk	-0,4447959	0	1,1439685	0	0,4447959	0	-1,14397	0
B =	0	-1,1367006	0	-0,3444988	0	1,136701	0	0,344499
	-1,1367006	-0,4447959	-0,3444988	1,1439685	1,1367006	0,444796	0,344499	-1,14397

0,09 21978022

matrk	1	0,3	0	matrk d	0,000484
D =	0,3	1	0		-0,0004313
	0	0	0,35		0,0004774
					-0,0003205
					0,0004597
					-0,0005018
					0,0004998
					-0,0006434

egangan

	-0,4447959	-0,3410102	1,1439685	-0,1033496	0,4447959	0,34101	-1,14397	0,10335
	-0,1334388	-1,1367006	0,3431906	-0,3444988	0,1334388	1,136701	-0,34319	0,344499
	-0,3978452	-0,1556786	-0,1205746	0,400389	0,3978452	0,155679	0,120575	-0,40039

matrk	-9,385E-05	Tx =	-2062,5549	Tx/by =	-0,412511
teg.	-0,0002023	Ty =	-4446,2874	Ty/by =	-0,8892575
	0,0001113	Gxy =	2447,1098	Gxy/by =	0,489422

To =	0,75	0,25	0,8660254
	0,25	0,75	-0,8660254
	-0,4330127	0,4330127	0,5

T'=To=	-539,22883	Tx/by =	-0,1078458
	-5969,6135	Ty/by =	-1,1939227
	191,36843	Gxy/by =	0,0382737

-4C

	X	Y
1	4,023	2,324
2	4,5	2,598
3	4,125	3,2448
4	3,674	2,879

matrik	-2	2	2	-2	1,00575	0,581
I =	-2	-2	2	2	1,125	0,6495
					1,03125	0,8112
					0,9185	0,71975

matrik	0,464	0,3199
I =	-0,362	0,6009

J] =	0,394621		
[J] =	1,578486		
g11 =	-0,35604	DG21 =	-1,04657
g12 =	1,166688	DG22 =	-0,12924
g13 =	0,356037	DG23 =	1,046573
g11 =	-1,16669	DG24 =	0,129238

matrik	-0,35604	0	1,166688	0	0,356037	0	-1,16669	0
B =	0	-1,04657	0	-0,12924	0	1,046573	0	0,129238
	-1,04657	-0,35604	-0,12924	1,166688	1,046573	0,356037	0,129238	-1,16669

/0.09 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik d	0,00046
D =	0,3	1	0		-0,0005
	0	0	0,35		0,000409
					-0,00036
					0,000191
					-0,00057
					0,000323
					-0,00077

tegangan

	-0,35604	-0,31397	1,166688	-0,03877	0,356037	0,313972	-1,16669	0,038771
	-0,10681	-1,04657	0,350006	-0,12924	0,106811	1,046573	-0,35001	0,129238
	-0,3663	-0,12461	-0,04523	0,408341	0,3663	0,124613	0,045233	-0,40834

matrik	-3,2E-05	Tx =	-703,836	Tx/by =	-0,14077
teg.	-0,00012	Ty =	-2644,13	Ty/by =	-0,52883
	5,53E-05	Gxy =	1214,947	Gxy/by =	0,242989

To =	0,75	0,25	0,866025	T'x =	-136,735
	0,25	0,75	-0,86603	T'y =	-3211,23
	-0,43301	0,433013	0,5	G'xy =	-232,699

T' = To	-136,735	Tx/by =	-0,02735
	-3211,23	Ty/by =	-0,64225
	-232,699	Gxy/by =	-0,04654

EL-4D

	X	Y
1	4,33	1,743
2	4,875	1,949
3	4,5	2,598
4	4,023	2,324

matrik	-2	2	2	-2	1,0825	0,43575
J =	-2	-2	2	2	1,21875	0,48725
					1,125	0,6495
					1,00575	0,581

matrik	0,511	0,24
J =	-0,341	0,615

[J] =	0,396105		
4 [J] =	1,58442		
DG11 =	-0,47336	DG21 =	-1,07547
DG12 =	1,079259	DG22 =	-0,21459
DG13 =	0,473359	DG23 =	1,075472
DG14 =	-1,07926	DG24 =	0,21459

matrik	-0,47336	0	1,079259	0	0,473359	0	-1,07926	0
B =	0	-1,07547	0	-0,21459	0	1,075472	0	0,21459
	-1,07547	-0,47336	-0,21459	1,079259	1,075472	0,473359	0,21459	-1,07926

E/0.09 21978022

matrik	1	0,3	0	matrik d	0,000477
D =	0,3	1	0		-0,00032
	0	0	0,35		0,000477
					-0,00025
					0,000409
					-0,00036
					0,00046
					-0,0005

tegangan

	-0,47336	-0,32264	1,079259	-0,06438	0,473359	0,322642	-1,07926	0,064377
	-0,14201	-1,07547	0,323778	-0,21459	0,142008	1,075472	-0,32378	0,21459
	-0,37642	-0,16568	-0,07511	0,377741	0,376415	0,165676	0,075106	-0,37774

matrik	-4,4E-05	Tx =	-962,133	Tx/by =	-0,19243
teg.	-0,0001	Ty =	-2254,2	Ty/by =	-0,45084
	6,15E-05	Gxy =	1352,541	Gxy/by =	0,270508

To =	0,75	0,25	0,866025
	0,25	0,75	-0,86603
	-0,43301	0,433013	0,5

T'=To=	-113,816	Tx/by =	-0,02276
	-3102,52	Ty/by =	-0,6205
	116,7867	Gxy/by =	0,023357

EL-1E

	X	Y
1	3	0
2	3,75	0
3	3,581	0,444
4	2,974	0,392

matrik J	-2	2	2	-2	0,75	0
	-2	-2	2	2	0,9375	0
					0,89525	0,111
					0,7435	0,098

matrik J	0,6785	0,026
	-0,0975	0,418

[J] = 0,286148

4 [J] = 1,144592

DG11 = -0,68496 DG21 = -1,3559

DG12 = 0,775822 DG22 = -1,0152

DG13 = 0,68496 DG23 = 1,35594

DG14 = -0,77582 DG24 = 1,01521

matrik B =	-0,68496	0	0,77582	0	0,68496	0	-0,77582	0
	0	-1,3559	0	-1,01521	0	1,35594	0	1,015209
	-1,35594	-0,685	-1,0152	0,775822	1,35594	0,68496	1,015209	-0,77582

/0,09 = 21978022

matrik D =	1	0,3	0	0
	0,3	1	0	0
	0	0	0,35	0
				0
				0,00019
				-0,0002
				0,00012
				-0,0001

GANGAN

	-0,68496	-0,4068	0,77582	-0,30456	0,68496	0,40678	-0,77582	0,304563
	-0,20549	-1,3559	0,23275	-1,01521	0,20549	1,35594	-0,23275	1,015209
	-0,47458	-0,2397	-0,3553	0,271538	0,47458	0,23974	0,355323	-0,27154

matrik TEG.	-6,9E-05	Tx =	-1523	Tx/by =	-0,3046
	-0,00035	Ty =	-7631,7	Ty/by =	-1,5263
	0,00013	Gxy =	2857,72	Gxy/by =	0,57154

EL-2E

	X	Y
1	3,75	0
2	4,5	0
3	4,262	0,512
4	3,581	0,444

matrik J	-2	2	2	-2	0,9375	0
	-2	-2	2	2	1,125	0
					1,0655	0,128
					0,89525	0,111

matrik J	0,7155	0,034
	-0,2035	0,478

- [J] = 0,348928
- 4 [J] = 1,395712
- DG11 = -0,63623 DG21 = -1,31689
- DG12 = 0,733676 DG22 = -0,73368
- DG13 = 0,636234 DG23 = 1,316891
- DG14 = -0,73368 DG24 = 0,733676

matrik B =	-0,63623	0	0,733676	0	0,636234	0	-0,73368	0
	0	-1,31689	0	-0,73368	0	1,31689	0	0,733676
	-1,31689	-0,63623	-0,73368	0,733676	1,316891	0,63623	0,733676	-0,73368

1/0.09: 21978022

matrik D =	1	0,3	0	MATRIK d:	0
	0,3	1	0		0
	0	0	0,35		0
					0
					0,000208
					-0,00012
					0,000187
					-0,00016

GANGAN

	-0,63623	-0,39507	0,733676	-0,2201	0,636234	0,39507	-0,73368	0,220103
	-0,19087	-1,31689	0,220103	-0,73368	0,19087	1,31689	-0,2201	0,733676
	-0,46091	-0,22268	-0,25679	0,256787	0,460912	0,22268	0,256787	-0,25679

matrik TEG.	-8,5E-05	Tx =	-1875,9	Tx/by =	-0,37518
	-0,00027	Ty =	-5924,71	Ty/by =	-1,18494
	0,000159	Gxy =	3495,895	Gxy/by =	0,699179

EL-3E

	X	Y
1	4,5	0
2	5,25	0
3	4,943	0,581
4	4,262	0,512

atrik J	-2	2	2	-2	1,125	0
	-2	-2	2	2	1,3125	0
					1,23575	0,14525
					1,0655	0,128

atrik J	0,7155	0,0345
	-0,2725	0,5465

[J] = 0,400422
 † [J] = 1,601688
 G11 = -0,63933 DG21 = -1,2337
 G12 = 0,725485 DG22 = -0,55317
 G13 = 0,639326 DG23 = 1,233698
 G14 = -0,72548 DG24 = 0,553166

matrik B =	-0,63933	0	0,725485	0	0,639326	0	-0,72548	0
	0	-1,2337	0	-0,55317	0	1,233698	0	0,553166
	-1,2337	-0,63933	-0,55317	0,725485	1,233698	0,639326	0,553166	-0,72548

/0.09 : 21978022

matrik D =	1	0,3	0	MATRIK d :	0
	0,3	1	0		0
	0	0	0,35		0
					0
					0,000204
					-9,3E-05
					0,000208
					-0,00012

BANGAN

-0,63933	-0,37011	0,725485	-0,16595	0,639326	0,37011	-0,72548	0,16595
-0,1918	-1,2337	0,217645	-0,55317	0,191798	1,233698	-0,21765	0,553166
-0,43179	-0,22376	-0,19361	0,25392	0,431794	0,223764	0,193608	-0,25392

matrik TEG.	-7,4E-05	Tx =	-1626,18	Tx/by =	-0,32524
	-0,00018	Ty =	-4047,41	Ty/by =	-0,80948
	0,000137	Gxy =	3003,638	Gxy/by =	0,600728



1E	X	Y
1	5,25	0
2	6	0
3	5,625	0,65
4	4,943	0,581

rik d	-2	2	2	-2	1,3125	0
	-2	-2	2	2	1,5	0
					1,40625	0,1625
					1,23575	0,14525

rik d	0,716	0,0345
	-0,341	0,6155

J = 0,452463

JJ = 1,80985

J1 = -0,64204 DG21 = -1,16805

J2 = 0,718292 DG22 = -0,4144

J3 = 0,642042 DG23 = 1,168053

J4 = -0,71829 DG24 = 0,414399

matrik	-0,64204	0	0,718292	0	0,642042	0	-0,71829	0
J =	0	-1,16805	0	-0,4144	0	1,168053	0	0,414399
	-1,16805	-0,64204	-0,4144	0,718292	1,168053	0,642042	0,414399	-0,71829

J.09 21978022

matrik	1	0,3	0	MATRIK d :	0
D =	0,3	1	0		0
	0	0	0,35		0
					0
					0,000206
					-0,00011
					0,000204
					-9,3E-05

SIANGAN

	-0,64204	-0,35042	0,718292	-0,12432	0,642042	0,350416	-0,71829	0,12432
	-0,19261	-1,16805	0,215487	-0,4144	0,192613	1,168053	-0,21549	0,414399
	-0,40882	-0,22471	-0,14504	0,251402	0,408818	0,224715	0,14504	-0,2514

matrik	-6,4E-05	Tx =	-1396,01	Tx/by =	-0,2792
TEG.	-0,00017	Ty =	-3733,45	Ty/by =	-0,74669
	0,000113	Gxy =	2477,709	Gxy/by =	0,495542