BAB III

LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi tentang dasar-dasar teori yang digunakan dalam penelitian ini yang meliputi struktur dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF), struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF), *mode shape*, simpangan horisontal, gaya geser dasar, momen guling, dinding pengisi bata merah dan resonansi. Keseluruhan penjelasan analisis struktur dalam bab ini adalah dengan anggapan sistem linier elastis.

3.1. Struktur Dengan Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF)

Untuk menyusun persamaan diferensial gerakan suatu massa maka diambil suatu model struktur dengan derajat kebebasan tunggal seperti Gambar 3.1. Dengan anggapan kolom bangunan terjepit secara penuh dan massa struktur tergumpal disatu titik.

Berdasarkan "*free body diagram*" (Gambar 3.1.c), maka

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \tag{3.1}$$

Dengan $F_M(t) = m\,\ddot{y}(t)$, $\quad F_D(t) = c\,\dot{y}(t)$, $\quad F_S(t) = k\,y(t)$ (3.2)

$F_M(t)$, $F_D(t)$, $F_S(t)$ masing–masing adalah gaya inersia, gaya redam, dan gaya tarik/desak yang mempresentasikan kekuatan kolom, m adalah massa lantai, $F(t)$

adalah beban dinamik, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing- masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan

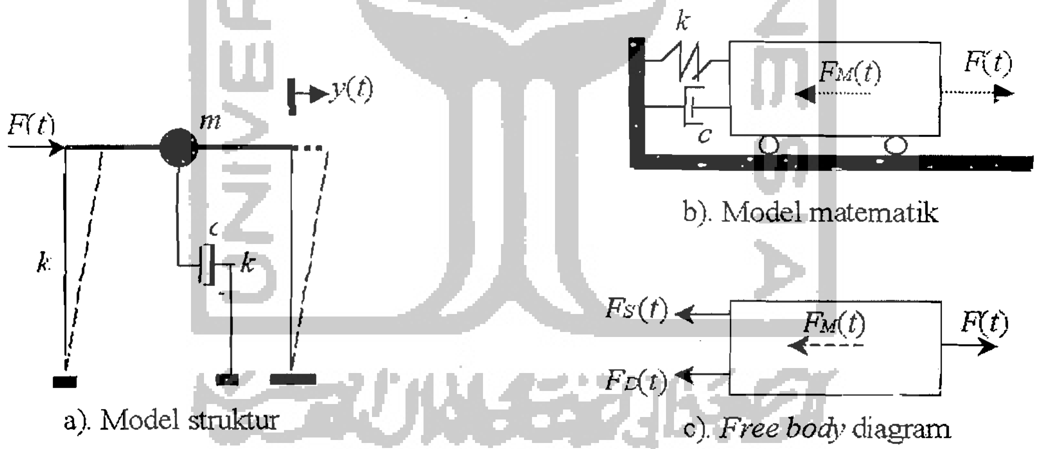
Dengan mensubtitusikan persamaan (3.2) kedalam persamaan (3.1) menjadi :

$$m\ \ddot{y}(t) + c\ \dot{y}(t) + k\ y(t) = F(t) \tag{3.3}$$

Persamaan di atas disebut persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*). Dalam prinsip dinamika struktur diperoleh hubungan :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (rad/dt), \quad \omega = angular\ frequency$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\ detik\ ), \quad T = \text{periode} \tag{3.4}$$



Gambar 3.1 Beban dinamik pada struktur SDOF

3.2. Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Umumnya struktur bangunan gedung justru mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF).

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, massa struktur digumpalkan (*lumped mass*) pada tempat tertentu, misalnya digumpalkan pada tiap-tiap muka tingkat. Jumlah derajat kebebasan berasosiasi dengan jumlah massa. Struktur yang mempunyai n tingkat, akan mempunyai n derajat kebebasan dan mempunyai n *mode*. Dengan prinsip bangunan geser (*shear building*) massa total tiap lantai dipusatkan pada masing-masing lantai, balok pada lantai kaku sekali dibanding dengan kolom dan deformasi struktur tak tergantung pada gaya aksial kolom (Theodosius, 1999). Prinsip bangunan geser digunakan untuk memperoleh persamaan diferensial gerakan suatu struktur dengan derajat kebebasan banyak.

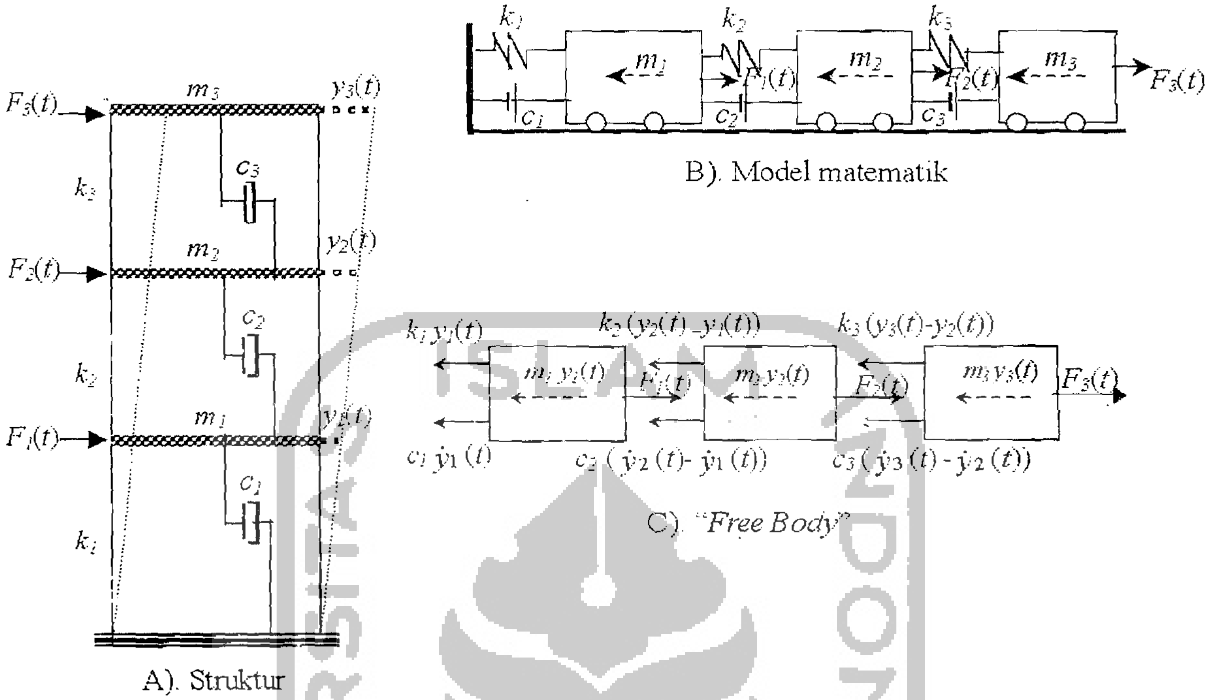
Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti Gambar 3.2, maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan.

Berdasarkan prinsip keseimbangan dinamik pada diagram *free body* akan diperoleh persamaan dibawah ini.

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + c_1 \dot{y}_1(t) + k_1 y_1(t) - c_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - k_2(y_2(t) - y_1(t)) - F_1(t) = 0 \tag{3.5a}$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + c_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2(y_2(t) - y_1(t)) - c_3(\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) - k_3(y_3(t) - y_2(t)) - F_2(t) = 0 \tag{3.5b}$$

$$m_3 \ddot{y}_3(t) + c_3(\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) + k_3(y_3(t) - y_2(t)) - F_3(t) = 0 \tag{3.5c}$$



Gambar 3.2 Struktur MDOF

Dari persamaan (3.5) untuk memperoleh keseimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat ini disebut *coupled equation*, penyelesaian persamaan *coupled* dilakukan secara simultan atau saling tergantung.

Dengan menyusun persamaan (3.5) menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan), maka diperoleh persamaan di bawah ini.

$$m_1 \ddot y_1(t) + c_1 \dot y_1(t) + k_1 y_1(t) - c_2(\dot y_2(t) - \dot y_1(t)) - k_2(y_2(t) - y_1(t)) = F_1(t) \quad (3.6a)$$

$$m_2 \ddot y_2(t) + c_2(\dot y_2(t) - \dot y_1(t)) + k_2(y_2(t) - y_1(t)) - c_3(\dot y_3(t) - \dot y_2(t)) - k_3(y_3(t) - y_2(t)) = F_2(t) \quad (3.6b)$$

$$m_3 \ddot y_3(t) + c_3(\dot y_3(t) - \dot y_2(t)) + k_3(y_3(t) - y_2(t)) = F_3(t) \quad (3.6c)$$

Persamaan-persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks yang lebih kompleks :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{F(t)\} \tag{3.8}$$

dimana matriks massa, redaman dan kekakuan masing-masing adalah sebagai berikut.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},\ [C] = \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},\ [K] = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Sedangkan $\{\ddot{y}(t)\}$, $\{\dot{y}(t)\}$, $\{y(t)\}$ dan $\{F(t)\}$ masing-masing disebut vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban atau

$$\{\ddot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix},\ \{\dot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix},\ \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} \text{ dan } \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

3.3. *Mode Shape* dan Frekuensi

Suatu struktur umumnya akan bergerak akibat adanya pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal (*initial condition*). Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar y_n dan apabila gaya tersebut dikenal dengan getaran bebas (*free vibration system*). Gerakan massa yang disebabkan adanya pembebanan dari luar misalnya beban angin atau beban gempa, maka gerakan massa tersebut disebut sebagai gerakan dipaksa (*forced vibration system*). Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamik struktur.

Persamaan diferensial gerak pada getaran bebas ($F(t) = 0$) pada struktur adalah sebagai berikut.

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \tag{3.11}$$

Frekuensi pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur yang dianggap tanpa redaman apabila nilai *damping ratio* cukup kecil. Apabila hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka untuk nilai $[C] = 0$, persamaan (3.11) menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) adalah persamaan diferensial gerakan tanpa redaman, maka respon struktur akan bersifat harmonik, sehingga,

$$\{y\} = \{\phi\}\, A\ Sin\,(\omega\, t) \tag{3.13}$$

$$\{\dot{y}\} = \omega\{\phi\}\, A\ Cos\,(\omega\, t) \tag{3.14}$$

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2\{\phi\}\, A\ Sin\,(\omega\, t) \tag{3.15}$$

Dalam hal ini $\{\phi\}$ adalah vektor *mode shape*. Subtitusi persamaan (3.13) dan (3.15) kedalam persamaan (3.12) akan diperoleh,

$$-\omega^2 [M]\{\phi\} Sin\,(\omega\, t) + [K]\{\phi\} Sin\,(\omega\, t) = 0 \tag{3.16a}$$

$$\{[K] - \omega^2 [M]\}\ \{\phi\} = 0 \tag{3.16b}$$

Persamaan (3.16b) merupakan persamaan *eigen problem,* selanjutnya,

$$\omega_i^{\,2} [M]\{\phi_i\} = [K]\{\phi_i\} \tag{3.17a}$$

$$\omega_j^{\,2} [M]\{\phi_j\} = [K]\{\phi_j\} \tag{3.17b}$$

apabila tranpose persaman (3.17a) di*postmultiply* dengan $\{\phi_j\}$, maka

$$(\omega_i^{\,2} [M]\{\phi_i\})^T \{\phi_j\} = ([K]\ \{\phi_i\})^T \{\phi_j\} \tag{3.18}$$

karena matrik massa $[M]$ dan matrik kekakuan $[K]$ adalah matrik simetri, maka

$[M]^T = [M]$ dan $[K]^T = [K]$, sehingga

$$\omega_i^{\,2} [M]\{\phi_i\}^T \{\phi_j\} = [K]\ \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} \tag{3.19}$$

apabila persamaan (3.17b) dikalikan $\{\phi_i\}^T$, maka

$$\omega_j^{\,2} [M]\{\phi_i\}^T \{\phi_j\} = [K]\ \{\phi_i\}^T \{\phi_j\} \tag{3.20}$$

apabila persamaan (3.19) dikurangi dengan persamaan (3.20), maka akan diperoleh

$$(\omega_i^{\,2} - \omega_j^{\,2})\ \{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = 0 \tag{3.21}$$

karena $\omega_i^{\,2} \neq \omega_j^{\,2}$, maka $\omega_i^{\,2} - \omega_j^{\,2} \neq 0$, sehingga

$$\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = 0 \tag{3.22}$$

kondisi *orthogonal* berlaku pada matrik kekakuan $[K]$ dan kondisi *orthogonal* dianggap berlaku jugaterhadap matrik redaman $[C]$, maka

$$\{\phi_i\}^T [K]\{\phi_j\} = 0 \qquad i \neq j \tag{3.23a}$$

$$\{\phi_i\}^T [C]\{\phi_j\} = 0 \qquad i \neq j \tag{3.23b}$$

$$\{\phi_i\}^T [C]\{\phi_j\} = 0 \qquad i \neq j \tag{3.23b}$$

Untuk menyelesaikan persamaan simultan pada persamaan (3.17), maka persamaan (3.16b) dapat ditulis kembali menjadi

$$\{[K] - \omega^2 [M]\}\ \{\phi\} = 0 \tag{3.24}$$

Persamaan (3.24) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*) atau sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan $\{[K] - \omega^2\ [M]\}$ adalah nol, maka

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} = 0 \tag{3.25}$$

Determinan persamaan (3.25) akan menghasilkan persamaan polinominal dengan *degree-n* yang menghasilkan nilai ω_n , maka dengan mensubtitusikan ke dalam persamaan (3.24) akan menghasilkan nilai vektor *mode shape* $\{\phi\}_i$. Indek i menunjukkan ragam/pola goyangan.

3.4. Simpangan Horisontal

Simpangan horisontal yang dimaksud adalah simpangan relatif tiap lantai, yaitu simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap mode. Untuk menghitung simpangan relatif tiap lantai pada struktur digunakan metode *Upperbound* atau *Absolute Response*

$$P_j = \{\phi\}_j\ [M]\ \{1\}\ ; \qquad Z_j = \frac{p_j{}^*}{M_j{}^*}\ \frac{Cg}{\omega_j{}^2} \tag{3.26}$$

dengan M_j* didefinisikan sebagai generalisasi massa, $[M]$ adalah matriks massa, $\{\phi\}$ adalah *mode shape*, $\{1\}$ adalah matriks satu, ω adalah frekuensi sudut, g adalah percepatan gravitasi bumi dan C adalah koefisien gempa dasar (*basic seismic coefficient)* yang dapat dicari menurut daerah gempa, jenis tanah dan periode getar pada mode yang ditinjau dan simpangan lantai struktur pada masa yang ke-i (y_i) adalah

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\varphi_{ij} \ z_j \right] \tag{3.27}$$

dimana : y_i = simpangan relatif lantai ke-i

ϕ_{ij} = *mode shape*

z_j = modal amplitudo

3.5. Gaya Geser Dasar

Sesuai dengan prinsip elastik analisis untuk masalah dinamika struktur bahwa simpangan relatif, gaya lantai dan momen guling adalah elastik respon yang penting untuk dicari. Gaya horisontal lantai atau gaya lantai maksimum yang bekerja pada suatu massa sebagai kontribusi dari mode ke-i dapat dicari dengan rumus

$$F_i = k \ y_i \tag{3.28}$$

dimana: F_i = gaya lantai

k = kekakuan tingkat

y_i = simpangan relatif

Sedang gaya geser dasar (V), seperti terlihat pada Gambar 3.3, merupakan penjumlahan dari gaya lantai tetapi arahnya berlawanan.

$$V = -\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \tag{3.29}$$

3.6 Momen Guling (*"Overturning Moment"*)

Momen guling didapat dengan mengalikan gaya lantai yang terjadi pada setiap tingkat (F_i) dengan elevasi lantai (h_i) seperti pada Gambar 3.3, maka

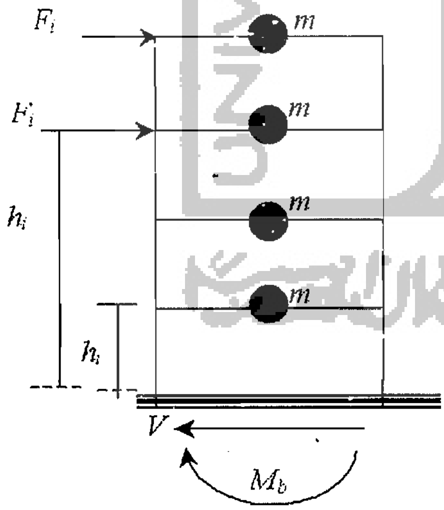
$$M_b = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad h_i \tag{3.30}$$

dimana : M_b = momen guling

F_i = gaya lantai

h_i = elevasi lantai

Notasi m yang tampak pada Gambar 3.3 menunjukkan massa pada tiap lantai.



Gambar 3.3 Momen Guling (M_b) dan Gaya Geser Dasar (V) akibat Gaya (F_i) dan jarak (h_i)

3.7. Dinding Pengisi Bata Merah

Bata merah yang dipakai pada penelitian tugas akhir ini disesuaikan dengan peratuan pada Bata Merah Sebagai Bahan Bangunan NI-10 (DPU, 1983). Hal ini dimaksudkan agar bata merah yang dipergunakan sesuai dengan aturan umum yang ada di Indonesia. Definisi bata merah sesuai dengan NI-10 adalah suatu unsur bangunan yang diperuntukkan pembuatan konstruksi bangunan dan yang dibuat dari tanah dengan atau tanpa campuran bahan-bahan lain, dibakar cukup tinggi, hingga tidak dapat hancur lagi bila direndam dalam air. Nama bata merah dipakai ialah untuk membedakan antara bata dari tanah yang dibuat dengan pembakaran dan bata beton atau tras-kapur, yang dibuat tanpa pembakaran. Sedangkan ukuran-ukuran standar bata merah sesuai dengan NI-10 adalah sebagai berikut ini

1. Bata merah : panjang 240 mm, lebar 115 mm, tebal 52 mm.
2. Bata merah : panjang 230 mm, lebar 110 mm, tebal 50 mm.

Kuat tekan bata merah menurut NI-10 digolongkan menjadi tiga bagian seperti pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Tabel kuat tekan bata merah

Mutu bata merah	Kuat tekan rata-rata (kg/cm^2)
Tingkat I	lebih besar dari 100
Tingkat II	100 – 80
Tingkat III	80 – 60

Pada penelitian tugas akhir ini bata merah yang dipergunakan adalah bata merah dengan ukuran panjang 230 mm, lebar 110 mm, tebal 50 mm dengan kuat tekan dipakai 70 kg/cm^2 dan 90 kg/cm2.

3.7.1 Kekakuan Dinding Pengisi Bata Merah.

Kekakuan dinding pengisi bata merah berdasarkan Gambar 3.4 untuk suatu struktur secara teoritis adalah sebagai berikut ini.

$$\Delta = \frac{F_j}{\cos\varphi} \; \frac{d}{w\,t} \; \frac{1}{E_{bata}} \; \frac{1}{\cos\varphi} \tag{3.31}$$

dimana : Δ = perubahan bentuk horisontal,

F_j = beban horisontal,

w = lebar *diagonal strut*,

d = *equivalent diagonal strut*,

t = tebal bata,

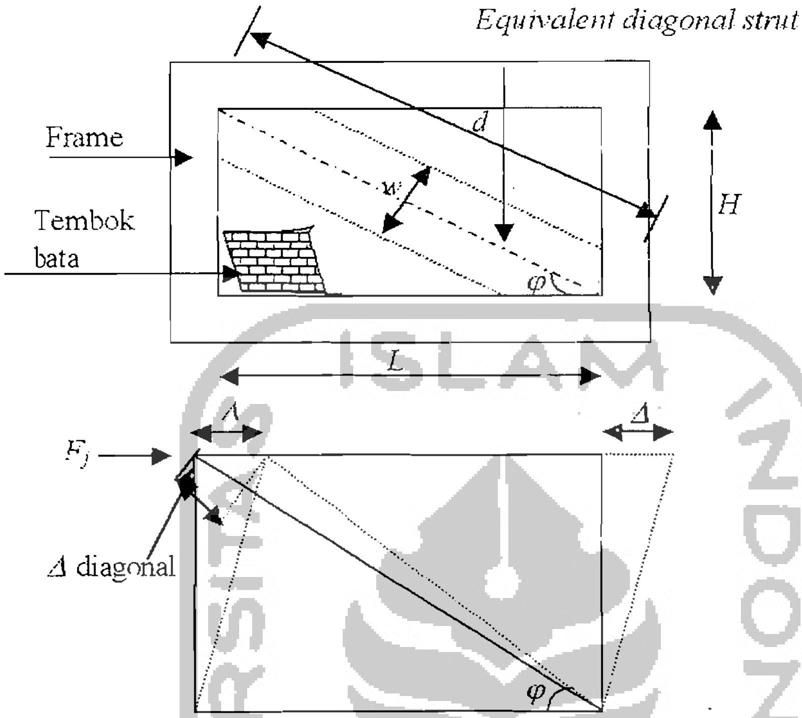
E_{bata} = modulus elastisitas pasangan bata

Nilai modulus elastisitas pasangan bata ditentukan dengan rumus sebagai berikut (Scarlat, 1996).

$$E_{bata} = 70{,}307 \;\; f'm \;\; (\text{kg/cm}^2) \tag{3.32}$$

dimana : E_{bata} = modulus elastisitas pasangan bata,

$f'm$ = kuat tekan bata merah.



Gambar 3.4 Gambar *equivalent diagonal strut* dan perubahan bentuk horisontal (Δ) akibat beban F_j

Penentuan nilai lebar *diagonal struts* (w) ditentukan dari Tabel 3.2. (Scarlat, 1996).

Tabel 3.2 Tabel penentuan lebar *diagonal struts* (w)

L/H	1	1,5	2	2,5
w/d	0,45	0,4	0,34	0,3

dimana : w = lebar *diagonal strut,*

d = *equivalent diagonal strut.*

Persamaan kekakuan dinding bata merah :

$$K_{bata} = E_{bata}\ (L^2 / (L^2 + H^2))\ (w/d)\ (5t) \qquad (3.33)$$

Dimana : K_{bata} = kekakuan dinding pengisi bata merah,

E_{bata} = modulus elastisitas pasangan bata,

L = panjang tembok,

H = tinggi tembok,

w = lebar *diagonal strut*,

d = *equivalent diagonal strut*,

t = tebal dinding.

3.8. Resonansi (*resonance*)

Bila seseorang menggoyang sebuah tiang denga cara mendorong dan menarik berkali-kali maka orang itu harus mempelajari waktu yang tepat saat mendorong dan menarik tiang tersebut. Agar goyangan dapat maksimum maka saat mendorong dan menarik tiang harus sesuai dengan waktu goyang tiang tersebut. Jangka waktu antara dorong sampai dorong berikutnya disebut waktu getar alami tiang. Bila saat dorong tarik itu sesuai dengan yang terjadi pada tiang maka goyangan tiang akan semakin besar. Keadaan ini disebut tiang berresonansi, akibatnya amplitudo getaran semakin besar dan percepatan ujung atas tiang semakin besar pula.

Getaran tanah pada saat terjadi gempa membuat gedung bergetar dengan cara serupa seperti orang menggetarkan tiang. Waktu getar alami gedung bervariasi antara 0,1 sampai 3 detik. Waktu getar tanah berkisar antara 0,5 sampai 1 detik tergantung jenis dan tebal lapisannya. Berdasarkan waktu getar alami gedung dan waktu getar tanah dapat ditemui kemungkinan kesamaan waktu getar. Bila waktu getar alami gedung sama denga waktu getar tanah, maka gedung akan mengalami resonansi. Untuk menghindari terjadinya resonansi, maka perlu dibuat agar waktu getar gedung berbeda dengan waktu getar tanah. Biasanya waktu getar gedung lebih mudah diubah daripada mengubah waktu getar tanah. Waktu getar alami gedung dapat diubah dengan cara sebagai berikut ini.

1. Mengubah posisi massa sedikit ke bawah.
2. Mengubah tinggi kolom.
3. Mengubah luas tampang kolom.
4 Mengubah bahan kolom (misalnya kolom terbuat dari beton diganti dengan kolom yang terbuat dari baja).

Resonansi lebih sering terjadi pada gedung tinggi yang terletak di atas tanah lunak daripada gedung yang terletak diatas tanah keras. Hal ini karena getaran pada tanah lunak lebih harmonis daripada getaran pada tanah keras. Getaran pada tanah keras berupa getaran yang tidak beraturan karena meneruskan semua getaran, sedangkan pada tanah lunak getaran yang berwaktu getar panjang saja yang diteruskan.