

## BAB III

### LANDASAN TEORI

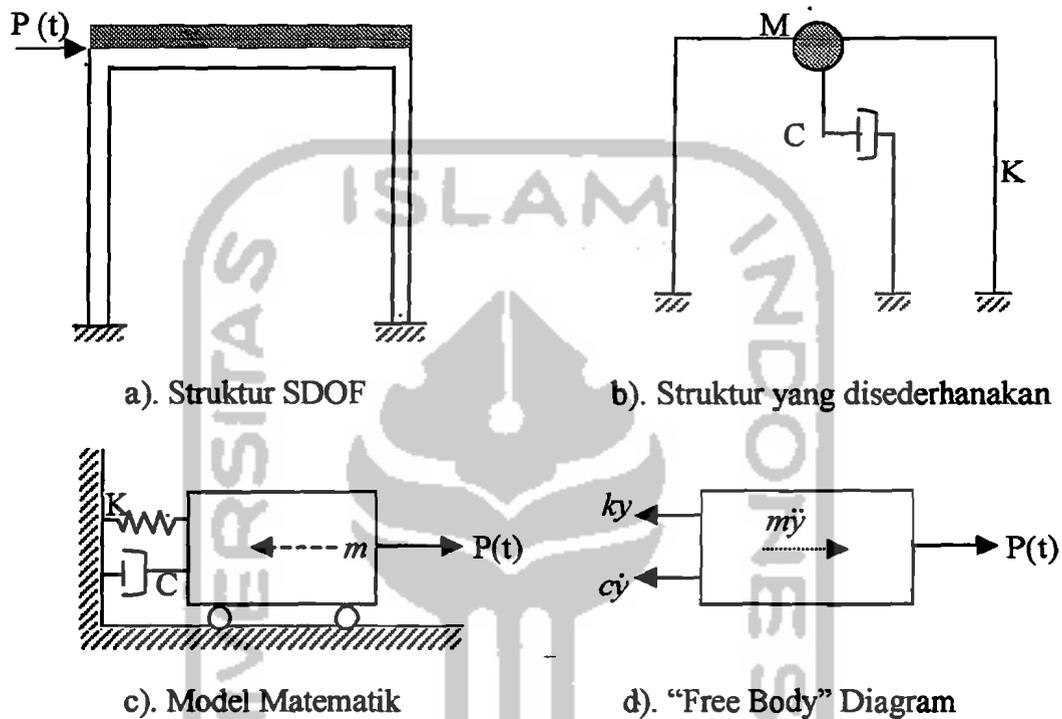
Landasan Teori memuat dasar-dasar teori yang akan dipergunakan secara garis besar dan merupakan tuntunan yang digunakan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Bagian ini juga akan memuat model-model matematik dan penjabarannya.

#### 3.1 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal

Sistem dengan derajat kebebasan tunggal mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jumlah derajat kebebasan biasanya dapat dikaitkan dengan jumlah massa, artinya suatu struktur 5 tingkat misalnya akan mempunyai 5 massa dan mempunyai 5 derajat kebebasan dengan anggapan bahwa struktur berperilaku seperti *Shear Building*. Struktur dengan derajat kebebasan tunggal atau *single degree of freedom* (SDOF) berarti hanya akan mempunyai satu massa.

Di dalam menyelesaikan masalah dinamik, sebaiknya memakai metoda yang menghasilkan suatu analisa yang tersusun dan sistematis. Yang terutama dan barangkali yang paling penting dalam praktek analisa dinamis adalah menggambar sebuah diagram *free body* (benda bebas) dari sistem yang memungkinkan penulisan

besaran matematik dari sistem tersebut. Salah satu contoh yang dapat dipakai misalnya struktur yang diskemakan pada Gambar 3.1.



**Gambar 3.1** Gaya yang bekerja pada sistem kebebasan tunggal

Gambar diatas menunjukkan sistem struktur yang dimodelisasikan sebagai osilator sederhana (*simple oscillator*) dengan redaman liat (*viscous damping*). Pada gambar tersebut  $m$  dan  $k$  adalah massa dan konstanta pegas (*spring constant*) dari osilator dan  $c$  adalah koefisien redaman liat (*viscous damping coefficient*).

Gambar 3.1 (c), untuk menentukan gerak, dengan mempelajari perpindahan atau kecepatan massa  $m$  pada saat  $t$  untuk kondisi awal pada saat  $t=0$ . Hubungan analitis antara perpindahan  $y$  dan waktu  $t$  dapat diberikan berdasarkan Hukum Newton Kedua, yaitu:

$$F = m a, \quad (3.1)$$

dimana  $F$  adalah resultan gaya yang bekerja pada partikel massa  $m$  dan  $a$  adalah resultan percepatan.

Dianggaplah mempunyai sistem struktur yang dimodelisasikan sebagai osilator sederhana (*simple oscillator*) dengan redaman liat (*viscous damping*), seperti pada Gambar 3.1 (c). Pada gambar ini  $m$  dan  $k$  adalah massa dan konstanta pegas (*spring coefficient*) dari osilator dan  $c$  adalah koefisien redaman liat (*viscous damping coefficient*). Dengan cara seperti pada kondisi osilator tak teredam, dengan menggambar diagram free body (DFB) dan menggunakan Hukum Newton untuk mendapatkan persamaan differensial gerak (*differential equation oscillator*) dan gaya inersia  $m\ddot{y}$ , dimana  $\ddot{y}$  adalah percepatan sehingga dapat digunakan sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan persamaan kesetimbangan dinamis (*dynamic equilibrium*) yaitu menggunakan prinsip d'Alembert, yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan kesetimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia. Gambar 3.1 (d) memperlihatkan DFB dengan gaya inersia  $m\ddot{y}$  yang sama dengan massa dikalikan percepatan dan selalu diberikan arah negatif terhadap koordinat yang bersangkutan. Penggunaan prinsip d'Alembert memungkinkan pemakai persamaan kesetimbangan untuk mendapatkan persamaan gerak. Dengan memperhatikan Gambar 3.1 (d), jumlah gaya-gaya pada arah  $y$  memberikan

persamaan differensial gerak (*differential equation of motion*) untuk suatu sistem persamaan derajat kebebasan tunggal (SDOF) yaitu :

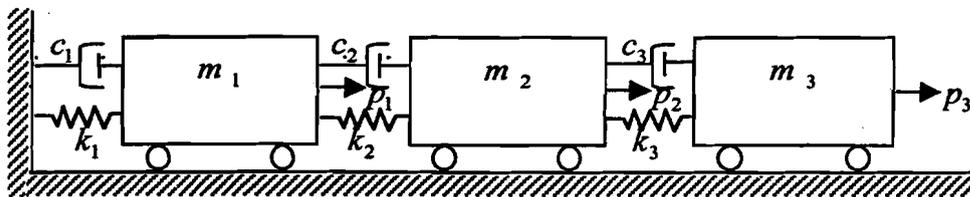
$$p(t) - ky - c\dot{y} = m\ddot{y} \quad (3.2)$$

### 3.2 Sistem Berderajat Kebebasan Banyak

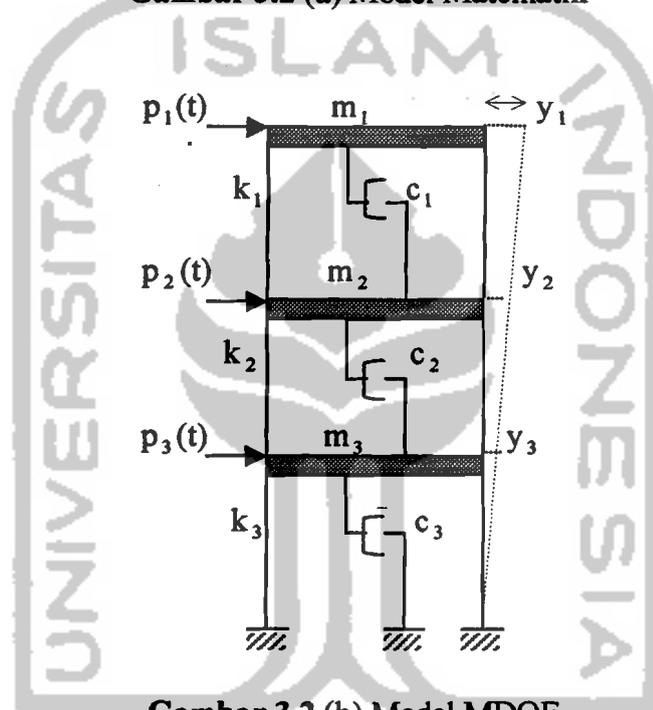
Secara umum struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Umumnya struktur bangunan gedung justru mempunyai derajat kebebasan banyak (*Multi Degree of Freedom*).

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan (*Lumped mass*) pada tiap-tiap tingkat. Banyaknya derajat kebebasan berasosiasi dengan jumlah massa. Untuk tinjauan struktur bidang, pada struktur yang mempunyai  $n$  tingkat, akan mempunyai  $n$  derajat kebebasan dan mempunyai  $n$  mode, bila struktur ruang (3 dimensi) maka struktur yang mempunyai  $n$  tingkat, akan mempunyai 3 derajat kebebasan dan mempunyai 3 mode. Pada prinsip bangunan geser (*Shear Building*) setiap massa hanya terpusat pada bidang lantai, balok pada lantai kaku tak hingga dibandingkan dengan kolom dan deformasi dari struktur tidak dipengaruhi gaya aksial yang terjadi pada kolom.

Gambar 3.2 (b) merupakan model-model yang ekuivalen untuk bangunan geser sedangkan model matematisnya terdapat pada Gambar 3.2 (a). Selanjutnya didapat persamaan-persamaan gerak dari bangunan berlantai tiga yang berasal dari diagram



Gambar 3.2 (a) Model Matematik



Gambar 3.2 (b) Model MDOF



Gambar 3.2 (c) Model Kesetimbangan Gaya

Persamaan differensial untuk bangunan diatas disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Berdasarkan pada prinsip kesetimbangan dinamik pada diagram *free body* maka diperoleh :

Persamaan differensial untuk bangunan diatas disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Berdasarkan pada prinsip kesetimbangan dinamik pada diagram *free body* maka diperoleh :

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 + c_1\dot{y}_1 - k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - p_1(t) = 0 \quad (3.4a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_3(y_3 - y_2) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - p_2(t) = 0 \quad (3.4b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - p_3(t) = 0 \quad (3.4c)$$

Dari persamaan di atas, tampak bahwa untuk memperoleh kesetimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudah massa/tingkat yang ditinjau. Persamaan differensial dengan sifat-sifat ini disebut *coupled equation*, karena persamaan-persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain. Penyelesaian dari persamaan *coupled* harus dilakukan secara simultan, artinya penyelesaian yang melibatkan seluruh persamaan yang ada.

Persamaan diatas kemudian disusun menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) akan diperoleh :

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = p_1(t) \quad (3.5a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3\dot{y}_3 - k_2y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3y_3 = p_2(t) \quad (3.5b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 - c_3\dot{y}_2 + c_3\dot{y}_3 - k_3y_2 + k_3y_3 = p_3(t) \quad (3.5c)$$

Selanjutnya persamaan (3.5) lebih tepat ditulis dengan notasi matriks sebagai berikut:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.6)$$

Dimana  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ , berturut-turut adalah matriks massa, redaman dan kekakuan,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.7b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.7c)$$

Sedangkan  $\{\ddot{y}\}$ ,  $\{\dot{y}\}$ ,  $\{y\}$  dan  $\{P(t)\}$  berturut-turut adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban dalam bentuk

$$\{\ddot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \text{ dan } \{p(t)\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

### **Mode Shape dan Frekuensi**

Suatu struktur umumnya akan bergerak akibat adanya pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal (*initial condition*). Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar  $y_n$  dan apabila gaya tarik tersebut dilepas kembali maka massa akan bergerak. Peristiwa gerakan massa tersebut dapat dikelompokkan ke dalam getaran bebas (*free vibration system*). Gerakan suatu massa disebabkan adanya pembebanan dari luar misalnya beban angin, beban gempa dan lainnya. Maka gerakan massa dikelompokkan sebagai gerakan

dipaksa (*forced vibration system*). Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamik struktur.

Persamaan differensial gerak pada getaran bebas pada struktur adalah :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.9)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, bila nilai rasio redaman (*damping ratio*) kecil. Maka persamaan 3.9 akan menjadi :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.10)$$

Persamaan diatas diasumsikan pada getaran bebas, maka vektor  $y$  berbentuk

$$\{y\} = \{\phi\}z(t) \quad (3.11a)$$

$$\{\ddot{y}\} = \{\phi\}\ddot{z}(t) \quad (3.11b)$$

$\{\Phi\}$  adalah vektor *mode shape* yaitu suatu vektor yang tidak berdimensi, yang memiliki paling sedikit sebuah elemen yang tidak sama dengan nol. Sedangkan  $z$  dan  $\ddot{z}$  adalah vektor perpindahan dan vektor percepatan. Jika persamaan (3.11) dimasukkan dalam persamaan (3.10), maka akan didapatkan :

$$[M]\{\phi\}\ddot{z}(t) + [K]\{\phi\}z(t) = 0 \quad (3.12)$$

$[M]$  dan  $[K]$  adalah matriks konstan dan pada sebuah hipotesis disebutkan, bahwa  $\{\Phi\}$  juga merupakan matriks konstan, maka akan didapatkan

$$\ddot{z}(t) + (\text{constant}) z(t) = 0 \quad (3.13)$$

Jika konstanta diatas adalah  $\omega_n^2$  (*undamped natural frequency*), maka persamaan (3.13) menjadi

$$\ddot{z}(t) + \omega_n^2 z(t) = 0 \quad (3.14)$$

Persamaan diatas diselesaikan dengan :

$$z(t) = A \sin \omega_n t \quad (3.15)$$

Dengan demikian maka persamaan (3.11) akan menjadi

$$\{y\} = \{\phi\} A \sin \omega t \quad (3.16a)$$

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{\phi\} A \sin \omega t \quad (3.16b)$$

Persamaan (3.16) dimasukkan ke dalam persamaan (3.12) didapatkan

$$(-\omega^2 [M] \{\phi\} + [K] \{\phi\}) A \sin \omega t = 0 \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*), jika A dan  $\omega$  keduanya adalah tidak sama dengan nol, sehingga

$$[K] - \omega^2 [M] \{\phi\} = 0 \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) akan ada penyelesaiannya atau suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas apabila nilai determinan ( $\{[K] - \omega^2 [M]\}$ ) adalah nol maka :

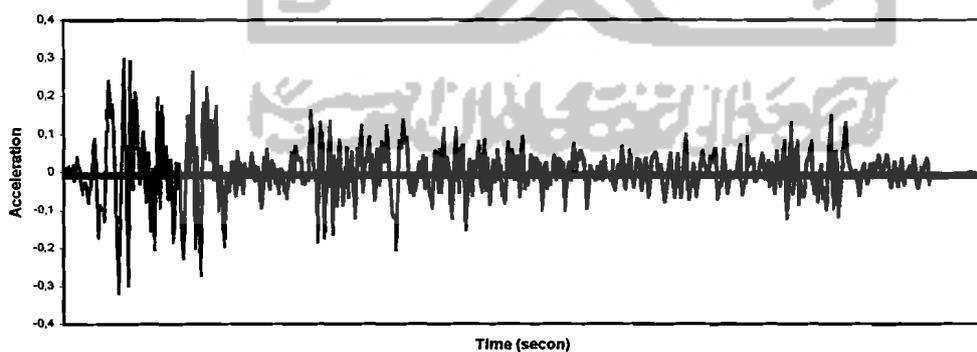
$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (3.19)$$

Nilai determinan pada persamaan (3.19) akan menghasilkan suatu persamaan polinomial dengan derajat ke-n yaitu  $\omega_n$ , kemudian nilai  $\omega_n$  disubstitusikan persamaan (3.18) maka akan menghasilkan nilai mode shape  $\{\phi\}_i$ . Indeks  $i$  menunjukkan ragam/pola goyangan.

### 3.3 Persamaan Gerak akibat Beban Gempa

Beban gempa adalah suatu beban yang unik. Umumnya beban yang bekerja pada struktur dalam satuan gaya, tetapi beban gempa berupa percepatan tanah, beban lain biasanya statis, tidak berubah pada periode waktu yang pendek. Tetapi beban gempa adalah beban yang dinamis yang berubah dengan sangat cepat dalam periode waktu yang pendek, katakan beban gempa dapat berubah setiap detik. Beban lain biasanya bekerja pada arah vertikal, tetapi beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal maupun horizontal bahkan beban gempa dapat berupa putaran, (Hu dan kawan-kawan, 1996).

Analisis yang didasarkan pada riwayat waktu dapat dipergunakan untuk memperkirakan besarnya jarak pemisah antara bangunan yang berdekatan didasarkan pada simpangan maksimum relatif. Pada tugas akhir ini dipakai analisa riwayat waktu gempa El Centro, 1940, seperti contoh pada Gambar 3.3.



**Gambar 3.3** Percepatan Tanah Gempa El Centro, 1940  
(Chopra, 1995)

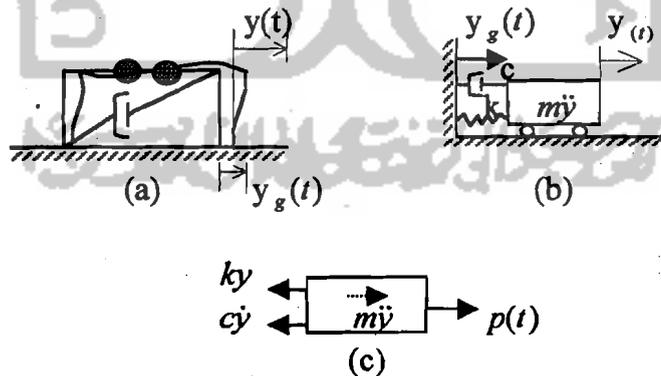
Pada daerah rawan gempa, masalah prinsip yang perlu diperhatikan adalah perilaku struktur bawah akibat beban gempa. Perpindahan tanah dinotasikan dengan  $y_g(t)$ , sedangkan antara massa dengan tanah dinotasikan dengan  $y(t)$ , sehingga perpindahan total yang terjadi adalah (Chopra, 1995).

$$y_{tot}(t) = y(t) + y_g(t) \quad (3.20)$$

Persamaan gerakan struktur yang dikenai beban gempa, dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajat kebebasan tunggal, Gambar 3.4 (a), sedangkan model matematisnya pada Gambar 3.4 (b).

Dengan menggunakan konsep kesetimbangan dinamis, dari diagram *free body* 3.4 (c), maka akan didapatkan persamaan

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g(t) \quad (3.21)$$



**Gambar 3.4** Sistem derajat kebebasan tunggal dengan beban gempa

Dapat dibuktikan bahwa solusi coba-coba (*trial error*)  $y = A \sin \omega t$  atau  $y = B \cos \omega t$  tidak akan memenuhi persamaan (3.2). Namun, fungsi eksponensial  $y = Ce^{pt}$  memenuhi persamaan ini.

Dengan mensubstitusikan fungsi dari persamaan (3.2) didapat persamaan

$$mCp^2 e^{pt} + cCp e^{pt} + kC e^{pt} = 0 \quad (3.22)$$

dimana setelah menghilangkan faktor yang sama, didapatkan persamaan yang disebut persamaan karakteristik (*the characteristic equation*) untuk sistem, yaitu

$$mp^2 + cp + k = 0 \quad (3.23)$$

Akar dari persamaan kuadrat ini adalah

$$p_1, p_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.24)$$

sehingga solusi umum (*general solution*) dari persamaan (3.2) didapat dari superposisi dua solusi yang mungkin, yaitu

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (3.25)$$

dimana  $C_1$  dan  $C_2$  adalah konstanta integrasi yang ditentukan dari kondisi awal (*initial conditions*).

Bentuk akhir dari persamaan (3.2) tergantung pada tanda dari besaran di bawah tanda akar pada persamaan (3.24). Tiga bentuk dapat ditemukan ; besaran di bawah tanda akar dapat sama dengan nol, positif atau negatif. Kondisi dimana besaran di bawah tanda akar sama dengan nol akan diselesaikan dahulu. Redaman yang terjadi pada kondisi ini disebut redaman kritis (*critical damping*).

Tiga bentuk yang dapat ditemukan dari persamaan tersebut adalah :

### 1. Sistem Redaman Kritis (*Critically Damped System*)

Untuk suatu sistem yang beresilasi dengan redaman kritis (*critical damping*) seperti definisi di atas, ekspresi di bawah tanda akar pada persamaan (3.24) sama dengan nol, yaitu :

$$\left(\frac{C_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (3.26)$$

atau

$$C_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (3.27)$$

dimana  $C_{cr}$  menyatakan harga redaman kritis (*critical damping value*).

Karena frekuensi natural dari sistem tak teredam dinyatakan oleh  $\omega = \sqrt{k/m}$ , maka koefisien redaman kritis (*critical damping coefficient*) yang diberikan oleh persamaan (3.27) dapat juga dinyatakan dengan notasi,

$$C_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} \quad (3.28)$$

Harga-harga akar persamaan karakteristik dari sistem redaman kritis, adalah sama dan berasal dari persamaan (3.24) yaitu,

$$p_1 = p_2 = -\frac{C_{cr}}{2m} \quad (3.29)$$

Karena kedua akar tersebut sama, maka solusi umum yang diberikan oleh persamaan (3.25) mempunyai satu konstanta integrasi, sebab itu terdapat satu solusi independen yaitu,

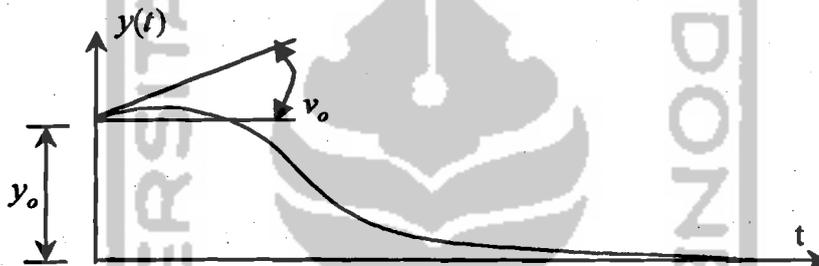
$$y_1(t) = C_1 e^{-(c_c/2m)t} \quad (3.30)$$

Solusi independen yang lain didapat dengan menggunakan fungsi,

$$y_2(t) = C_2 t e^{-(c_c/2m)t} \quad (3.31)$$

Persamaan ini dapat diuji dan akan memenuhi persamaan diferensial (3.2). Solusi umum untuk sistem redaman kritis diberikan oleh superposisi dua solusi di atas

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(c_c/2m)t} \quad (3.32)$$



Gambar 3.5 Respon Getar Bebas dengan Redaman Kritis

## 2. Sistem Redaman Superkritis (*Overdamped System*)

Pada sistem redaman superkritis (*overdamped system*), koefisien redamannya lebih besar dari sistem redaman kritis yaitu,

$$C > C_{cr} \quad (3.33)$$

Oleh karena itu besaran di bawah tanda dari persamaan (3.24) adalah positif, jadi kedua akar dari persamaan karakteristik adalah riil dan solusinya diberikan oleh persamaan (3.25). Perlu diperhatikan bahwa, untuk sistem redaman superkritis dan redaman kritis, gerakan yang terjadi bukan osilasi, namun besar osilasi mengecil secara eksponensial dengan waktu menuju nol. Gambar 3.5 menyatakan grafik respon dari osilator sederhana dengan redaman kritis.

Respon dari sistem redaman superkritis mirip dengan gerak sistem redaman kritis pada 3.5, tetapi diperlukan lebih banyak waktu untuk kembali ke posisi netral bila redaman bertambah.



Gambar 3.6 Respon Getaran Bebas untuk Sistem redaman Superkritis

### 3. Sistem Redaman Subkritis (*Underdamped System*)

Bila harga koefisien redaman lebih kecil dari harga kritis ( $C < C_{cr}$ ), yang mana akan terjadi bila besaran di bawah tanda akar negatif, maka harga akar-akar dari persamaan karakteristik (3.24) adalah bilangan kompleks, jadi

$$p_1, p_2 = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (3.34)$$

dimana  $i = \sqrt{-1}$  adalah unit imajiner. Untuk hal ini perlu digunakan persamaan Euler yang menghubungkan fungsi-fungsi eksponensial dengan trigonometri yaitu,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x, \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dengan mensubstitusi akar-akar  $p_1$  dan  $p_2$  dari persamaan (3.34) ke dalam persamaan (3.25) dan dengan menggunakan persamaan (3.35) akan memberikan bentuk solusi umum dari sistem redaman subkritis (*Underdamped System*).

$$y(t) = e^{-(c/2m)t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (3.36)$$

di mana  $A$  dan  $B$  adalah konstanta integrasi dan  $\omega_D$  adalah frekuensi redaman dari sistem yang diberikan oleh,

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (3.37)$$

atau

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.38)$$

Hasil terakhir ini didapatkan sesudah mensubstitusikan pada persamaan (3.37), besaran frekuensi natural tak teredam (*Undamped Natural Frekuensi*),

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.39)$$

dan ratio redaman (*damping ratio*) dari sistem yang didefinisikan sebagai,

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}} \quad (3.40)$$

Kemudian bila ditentukan kondisi awal (*initial conditions*) dari perpindahan dan kecepatan adalah  $y_0$  dan  $v_0$ , maka konstanta integrasi dapat dihitung kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.36) memberikan,

$$y(t) = e^{-\xi \omega t} \left( y_0 \cos \omega_D t + \frac{v_0 + y_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (3.41)$$

Alternatif lain penulisan persamaan ini adalah,

$$y(t) = C e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad (3.42)$$

dimana

$$C = \sqrt{y_o^2 + \frac{(v_o + y_o \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} \quad (3.43)$$

dan

$$\tan \alpha = \frac{(v_o + y_o \xi \omega)}{\omega_D y_o} \quad (3.44)$$

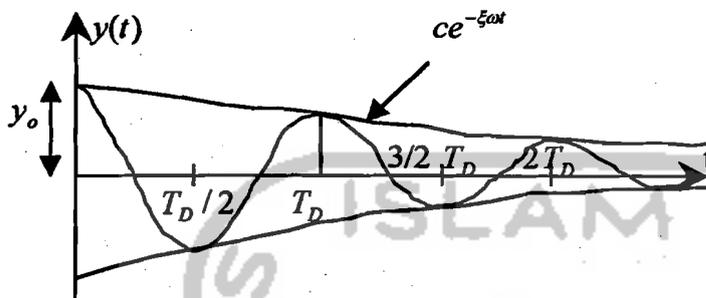
Redaman grafik dari respon pada suatu sistem redaman subkritis (*undamped system*) dengan perpindahan awal (*initial displacement*)  $y_o$ , tetapi mulai dengan kecepatan nol ( $v_o = 0$ ) adalah seperti Gambar 3.7. Terlihat pada gambar ini bahwa gerak adalah osilasi tapi tidak periodik. Amplitudo dari getaran tidak konstan selaman gerakan tetapi berkurang setiap siklus, namun osilasi itu mempunyai interval waktu yang sama. Interval waktu ini disebut periode redaman getaran (*damped period of vibration*) dan diberikan oleh persamaan (3.38).

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.45)$$

Harga dari koefisien redaman untuk struktur adalah jauh lebih kecil dari koefisien redaman kritis dan biasanya diantara 2 sampai dengan 20 % dari harga redaman kritis. Substitusi harga maksimum  $\xi = 0,20$  pada persamaan (3.38) akan diperoleh,

$$\omega_D = 0,98 \omega \quad (3.46)$$

teredam. Jadi dalam praktek, frekuensi natural dari sistem teredam dapat diambil sama dengan frekuensi natural sistem tak teredam.



Gambar 3.7 Respon Getaran Bebas untuk Sistem Redaman Subkritis

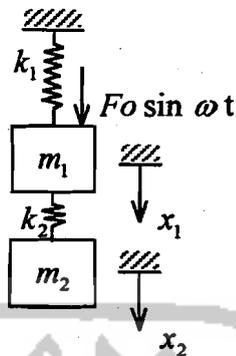
### 3.3.1 Filosofi Dasar Penyerapan Energi

Sebuah sistem pegas-massa  $k_2, m_2$  pada Gambar 3.5 yang diselaraskan dengan frekuensi gaya eksitasi sedemikian hingga  $\omega^2 = k_2 / m_2$ , akan berfungsi sebagai penyerap energi dan mereduksi gerak massa utama  $m_1$  menjadi nol. Dengan substitusi :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (3.47)$$

dan asumsi bahwa gerak adalah harmonik, maka persamaan untuk amplitudo  $X_1$  dapat dibuktikan sama dengan :

$$\frac{X_1 k_1}{F_0} = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.48)$$



Gambar 3.8 Penyerapan Energi

Diketahui bahwa  $k_2/k_1 = \mu(\omega_2/\omega_1)^2$ , karena sistem mempunyai dua derajat kebebasan, maka ada dua frekuensi natural. Sejah ini tidak ada yang dikatakan tentang ukuran massa penyerap. Pada  $\omega = \omega_2$ , amplitudo  $X_1 = 0$ , tetapi massa penyerap mengalami amplitudo yang sama dengan

$$X_2 = -\frac{F_0}{k_2} \quad (3.49)$$

Karena gaya yang bekerja pada  $m_2$  adalah

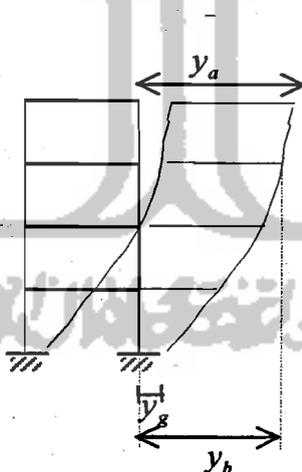
$$k_2 X_2 = \omega^2 m_2 X_2 = -F_0 \quad (3.50)$$

maka sistem penyerap  $k_2, m_2$  mengadakan gaya yang sama besar dan berlawanan arah dengan gaya pengganggu. Jadi ukuran  $k_2$  dan  $m_2$  tergantung pada nilai  $X_2$  yang diperbolehkan.

### 3.3.2 Jenis-jenis Simpangan dan Efeknya Terhadap Kerusakan

#### 1. Simpangan Relatif

Simpangan ini adalah simpangan yang dihitung relatif terhadap lantai 1. Simpangan relatif ini mempunyai efek yang berpengaruh terhadap *Structural Pounding*. Masalah *Structural Pounding* ini biasa terjadi pada bangunan yang berdekatan untuk memaksimalkan penggunaan lahan, hal ini dapat menyebabkan kerusakan yang fatal pada bangunan bahkan dapat menyebabkan kerusakan total. Hal ini dapat dicegah dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang saling berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan horisontal plastik pada setiap tingkat. Pada simpangan ini dihitung relatif terhadap lantai 1 yaitu  $(y_a - y_g)$ .

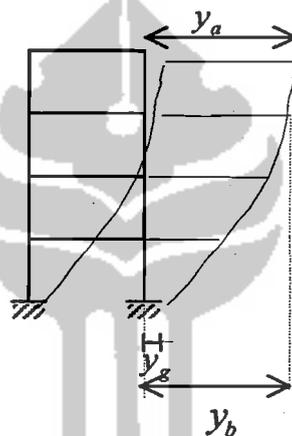


**Gambar 3.9** Model Simpangan Relatif

#### 2. Simpangan Antar Tingkat (*Inter Story Drift*)

Simpangan ini adalah simpangan yang terjadi pada tiap tingkat, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan lantai atas dikurangi simpangan lantai bawah. *Inter*

*Story Drift* terjadi karena cacatnya perencanaan konfigurasi bangunan yang berhubungan dengan kekakuan struktur. Terjadinya distribusi kekakuan struktur secara vertikal tidak merata yang menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah. *Inter Story Drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada daerah tingkat lemah, oleh karena itu kerusakan struktur akibat ini sangat sering terjadi. Dihitung dengan  $(y_a - y_b)$ .



**Gambar 3.10** Model Simpangan Antar Tingkat

### 3.4 Persamaan Diferensial Independen (*Uncoupling*)

Struktur pada kondisi standar yang mempunyai  $n$  derajat kebebasan akan mempunyai  $n$  *modes*. Pada prinsip ini, masing-masing *mode* akan memberikan kontribusi pada simpangan horizontal tiap-tiap massa. Simpangan massa ke- $i$  atau  $Y_i$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap *modes*. Kontribusi mode ke- $j$  terhadap simpangan horizontal massa ke- $i$  tersebut dinyatakan dalam produk antara  $\phi_{ij}$  dengan suatu model amplitudo  $Z_j$ . Yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\} \quad (3.51a)$$

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\} \quad (3.51b)$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\} \quad (3.51c)$$

Substitusi persamaan (3.51) kedalam persamaan (3.21) akan diperoleh :

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\phi]\{\dot{Z}\} + [K][\phi]\{Z\} = -[M]\{1\}\ddot{y}, \quad (3.52)$$

Apabila persamaan (3.52) dikalikan dengan *transpose* suatu *mode*  $\{\phi\}^T$ , maka

$$\{\phi\}^T [M][\phi]\{\ddot{Z}\} + \{\phi\}^T [C][\phi]\{\dot{Z}\} + \{\phi\}^T [K][\phi]\{Z\} = -\{\phi\}^T [M]\{1\}\ddot{y} \quad (3.53)$$

Misal, diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan gerak (3.53) berbentuk :

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \phi_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Dengan catatan persamaan diatas dalam hubungan orthogonal,  $m=n$ . Pada kondisi ortogonal apabila  $m$  tidak sama dengan  $n$  maka perkalian matriks sama dengan nol.

$$\phi_m^T [M] \phi_n = 0 \quad (3.55 a)$$

$$\phi_m^T [K] \phi_n = 0 \quad (3.55b)$$

$$\phi_m^T [C] \phi_n = 0 \quad (3.55c)$$

Untuk *mode* ke  $n$  maka secara umum persamaan (3.54) dapat ditulis dengan :

$$\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n \ddot{Z}_n \quad (3.56)$$

Persamaan (3.53) pada suku ke-2 dan ke-3 diubah seperti pada persamaan (3.56), maka persamaan akan menjadi :

$$\begin{aligned} \{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n \ddot{Z}_n + \{\phi\}_n^T [C] \{\phi\}_n \dot{Z}_n + \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_n Z_n \\ = -\{\phi\}_n^T [M] \{1\} \ddot{y}_i \end{aligned} \quad (3.57)$$

Persamaan (3.57) adalah persamaan diferensial yang bebas/*independent* antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan orthogonal, baik orthogonal matriks massa, redaman, kekakuan. Dengan demikian untuk  $n$  derajat dengan  $n$  persamaan diferensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent/uncoupling*. Dengan sifat-sifat tersebut maka persamaan diferensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh *mode*.

Berdasarkan persamaan (3.57) maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass*), redaman dan kekakuan sebagai berikut,

$$M_n^* = (\phi)_n^T [M] \{\phi\}_n \quad (3.58 a)$$

$$C_n^* = (\phi)_n^T [C] \{\phi\}_n \quad (3.58b)$$

$$K_n^* = (\phi)_n^T [K] \{\phi\}_n \quad (3.58c)$$

Dengan definisi seperti persamaan (3.58) maka persamaan (3.57) akan menjadi:

$$M_n^* \ddot{Z}_n + C_n^* \dot{Z}_n + K_n^* Z_n = -P_n^* \ddot{y}_i \quad (3.59)$$

Dengan,

$$P_n^* = \{\phi\}_n^T [M] \{1\} \quad (3.60)$$

Terdapat suatu hubungan bahwa :

$$\xi_n = \frac{C_n^*}{C_n^*} = \frac{C_n^*}{2M_n^* \omega_n}, \text{ maka } \frac{C_n^*}{M_n^*} = 2\xi_n \omega_n \quad (3.61a)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_n^*}{M_n^*} \text{ dan } \Gamma_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} \quad (3.61b)$$

Dengan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.61) maka persamaan (3.60) akan menjadi :

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = -\Gamma_n \ddot{y}_i \quad (3.62)$$

Dan persamaan (3.62) sering disebut dengan partisipasi setiap mode *mode participation factor*.

$$\Gamma = \frac{P_n^*}{M_n^*} = \frac{\{\phi\}_n^T [M] \{1\}}{\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n} \quad (3.63)$$

Selanjutnya persamaan (3.62) juga dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n} + 2\xi_n \frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n} + \omega_n^2 \frac{Z_n}{\Gamma_n} = -\ddot{y}_i \quad (3.64)$$

apabila diambil suatu notasi bahwa :

$$\ddot{q}_n = \frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n}, \dot{q} = \frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n} \text{ dan } q = \frac{Z_n}{\Gamma_n} \quad (3.65)$$

Maka persamaan (3.64) menjadi :

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{y}_t \quad (3.66)$$

Persamaan (3.66) adalah persamaan diferensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap *mode*.

Nilai partisipasi setiap *mode* dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap *mode*  $\phi_{mn}$  telah diperoleh. Nilai  $q$ ,  $\dot{q}$  dan  $\ddot{q}$  dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai  $Z_n$  dapat dihitung.

### 3.5 Respon terhadap Beban Gempa

Dengan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.66). Nilai  $q(t)$  dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.66) dengan persamaan gerakan *mode* ke- $n$  sistem dari SDOF. Sistem SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency*) ( $\omega_n$ ) dan rasio redaman ( $\xi$ ) *mode* ke- $n$  dari sistem MDOF, dengan  $n = 1, 2, 3, \dots, n$

Nilai yang akan dicari adalah  $q_n(t)$ , dan misalnya dipakai metode *central difference* maka proses integrasi adalah sebagai berikut. Pada metode *central difference*, diperoleh hubungan awal bahwa:

$$\dot{q}_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \quad \ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.67)$$

Substitusi persamaan (3.67) kedalam persamaan (3.66) akan diperoleh,

$$\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi\omega_n \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} + \omega_n^2 q_n = -\ddot{y}_t \quad (3.68)$$

Persamaan (3.68) dapat ditulis menjadi,

$$\left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi\omega_n}{2\Delta t} \right] q_{n+1} = -\ddot{y}_n - \left[ \omega_n^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right] q_n - \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi\omega_n}{2\Delta t} \right] q_{n-1} \quad (3.69)$$

Persamaan (3.69) dapat ditulis menjadi,

$$q_{n+1} = \frac{-\ddot{y}_n - aq_n - bq_{n-1}}{\hat{k}} \quad (3.70)$$

Dengan,

$$a = \left[ \omega_n^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right] \quad (3.71a)$$

$$b = \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi\omega_n}{2\Delta t} \right] \quad (3.71b)$$

$$\hat{k} = \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi\omega_n}{2\Delta t} \right] \quad (3.71c)$$

Setelah diperoleh nilai  $q$  untuk tiap-tiap *mode*. Selanjutnya nilai simpangan tiap *mode* dapat diperoleh  $y_n(t)$  :

$$y_n(t) = \Gamma_n \phi_n q_n(t) \quad (3.72)$$