

## **BAB III**

### **LANDASAN TEORI**

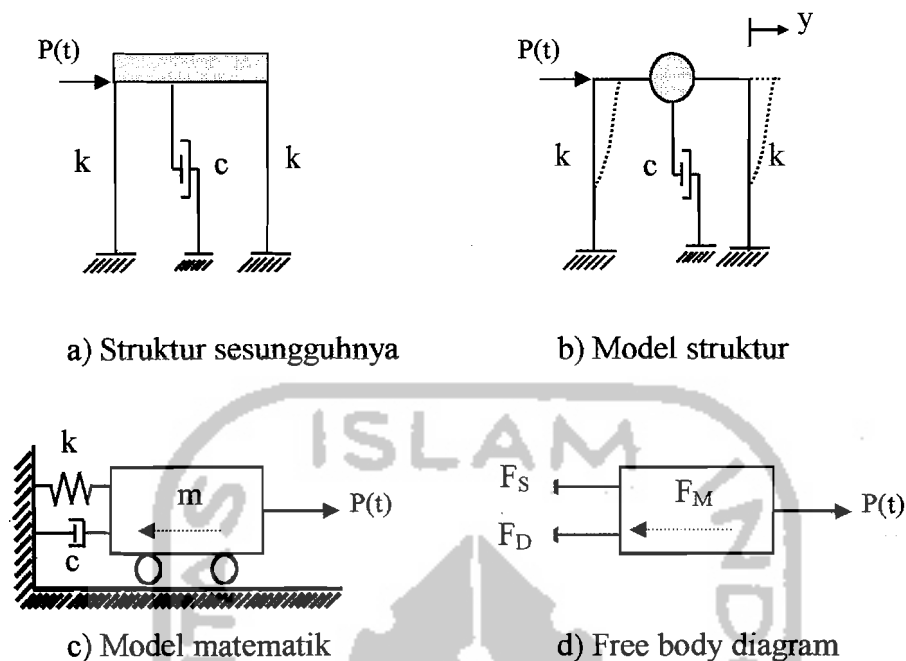
Landasan teori berupa teori-teori yang akan dipergunakan sebagai tuntunan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Landasan teori juga akan memuat teori-teori dinamika struktur, model-model matematik dan penjabarannya.

#### **3.1 Struktur dengan Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF)**

##### **3.1.1 Struktur (SDOF) Akibat Beban Dinamik**

Dalam hal ini beban merupakan fungsi/berubah menurut waktu. Oleh karena itu penyelesaian persoalan ini merupakan fungsi dari waktu yang mana solusi selengkapnya dapat dikerjakan secara berulang-ulang bergantung pada fungsi waktu yang ditinjau.

Beban dinamik seperti beban akibat putaran mesin atau beban akibat beban angin akan membebani secara langsung pada struktur bangunan dan umumnya dianggap bekerja secara langsung pada elevasi lantai, misalnya beban akibat putaran mesin  $P_{(t)} = P \sin \omega t$ . Model sistem dengan derajat kebebasan tunggal akibat beban dinamik ditunjukkan dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Model sistem SDOF akibat beban dinamik

Berdasarkan keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagai mana terlihat dalam Gambar 3.1.d) maka keseimbangan gaya adalah sebagai berikut:

$$F_M + F_D + F_S = P(t) \quad (3.1)$$

dengan,

$$F_M = m \cdot \ddot{y} \quad F_D = c \cdot \dot{y} \quad F_S = k \cdot y \quad (3.2)$$

$F_M$ ,  $F_D$ ,  $F_S$  masing-masing adalah gaya inersia, gaya redam, gaya tarik/desak pegas yang mempersentasikan kekakuan kolom,  $P(t)$  adalah beban dinamik, dan  $\ddot{y}$ ,  $\dot{y}$ ,  $y$  masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan, dan  $m$ ,  $c$ ,  $k$  masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan.

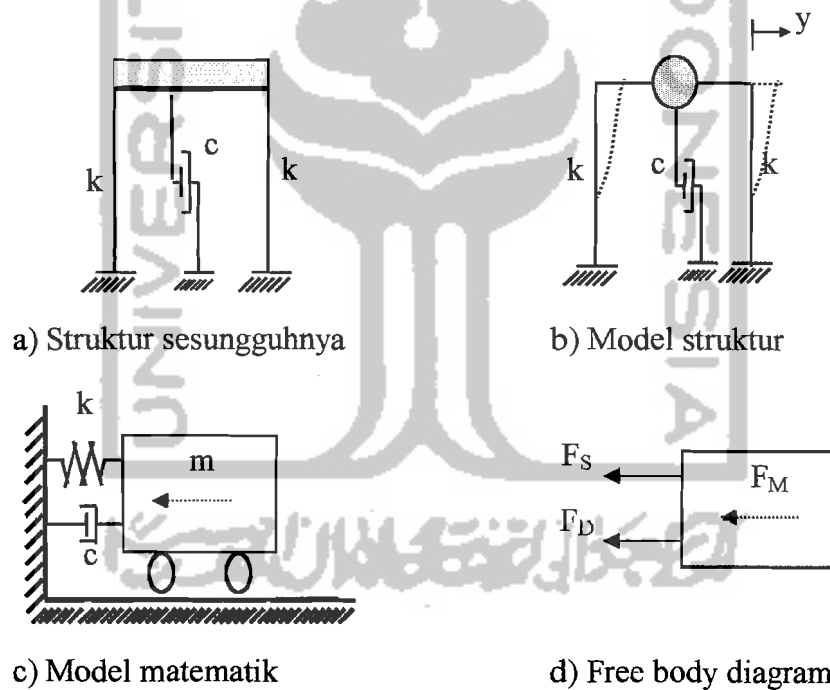
Substitusi persamaan (3.2) kedalam persamaan (3.1), sehingga didapatkan persamaan

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_{(t)} \quad (3.3)$$

persamaan (3.3) disebut persamaan diferensial gerakan (*differential equation of motion*).

### 3.1.2 Struktur (SDOF) Akibat Gerakan Tanah

Beban dinamik yang umum diperhitungkan adalah beban gempa. Gempa bumi akan menyebabkan permukaan tanah menjadi bergetar. Tanah yang bergetar akan menyebabkan semua benda yang berada di atas tanah ikut bergetar termasuk struktur bangunan di atasnya. (Widodo, 2001)



**Gambar 3.2** Model sistem SDOF akibat gerakan tanah

Berdasarkan *free body diagram* yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.d) maka persamaan differensial gerakan adalah

$$m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + ky_1 = 0 \quad (3.4)$$

Persamaan (3.4) merupakan kondisi khusus dari persamaan (3.3). Akibat gempa bumi, tanah mempunyai percepatan, kecepatan, simpangan masing-masing sebesar

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_b + \ddot{y}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_b + \dot{y}, \quad y_1 = y_b + y \quad (3.5)$$

Dengan mendistribusikan persamaan (3.5) kedalam persamaan (3.4) maka persamaan (3.4) dapat ditulis menjadi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_b - c\dot{y}_b - ky_b \quad (3.6)$$

Pada kondisi *rigid body motion* dianggap struktur tidak terjadi simpangan dan kecepatan antara tanah dengan struktur. Dengan demikian persamaan (3.6) menjadi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_b \quad (3.7)$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = -\ddot{y}_b \quad (3.8)$$

Dalam prinsip dinamika struktur diperoleh hubungan

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \frac{c}{m} = 2\xi\omega$$

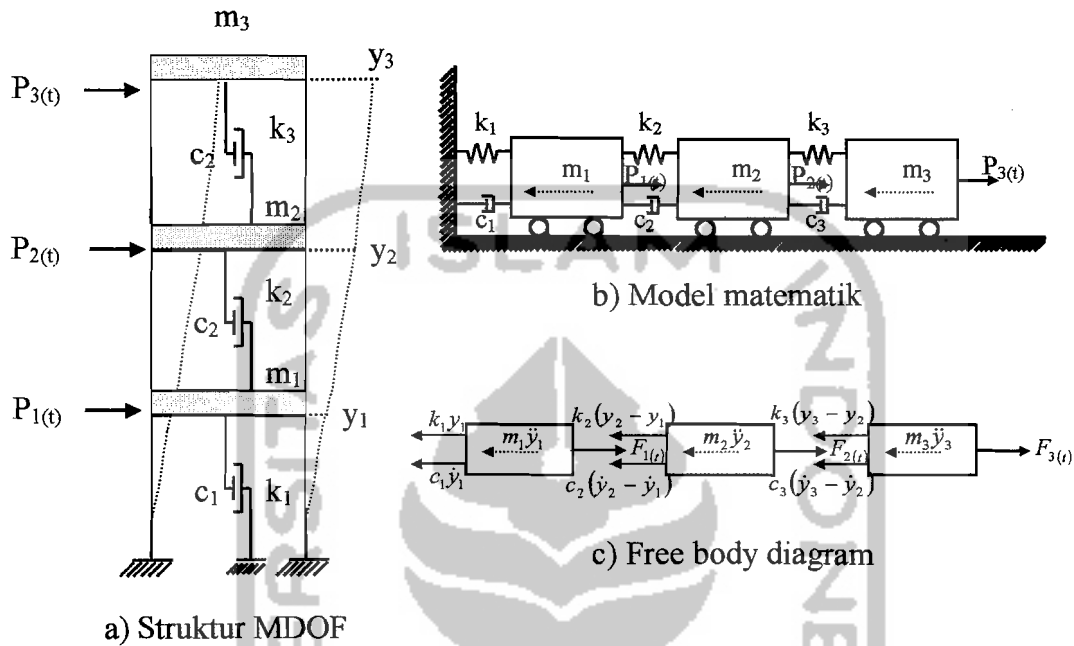
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad/dt),} \quad \omega = \text{angular frequency} \quad (3.9)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (dt),} \quad T = \text{periode} \quad (3.10)$$

### 3.2 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan pada setiap lantai (*lumped mass*), dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan dapat

dipandang sebagai struktur dengan derajat kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, maka dapat digunakan anggapan *shear building* sebagaimana pada struktur SDOF.



**Gambar 3.3** Struktur MDOF

Pada struktur gedung bertingkat tiga seperti pada Gambar 3.3.a), struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai  $n$ -tingkat akan mempunyai  $n$ -derajat kebebasan dan mempunyai  $n$ -modes. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur MDOF umumnya digunakan goyangan senada untuk goyangan yang  $y_3 > y_2 > y_1$ . Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada Gambar 3.3.c), maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) &= F_{1(t)} \\
m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) &= F_{2(t)} \\
m_3 \ddot{y}_3 + c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 (y_3 - y_2) &= F_{3(t)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Selanjutnya persamaan (3.34) dapat ditulis dalam bentuk matriks yang lebih ringkas

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F_{(t)}\} \tag{3.12}$$

dengan  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ , berturut-turut adalah matriks massa, matriks redaman, matriks kekakuan;

$$\begin{aligned}
[M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \\
[K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \\
[C] &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \text{ dan } \{F_{(t)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

$\{\ddot{y}\}$ ,  $\{\dot{y}\}$ ,  $\{y\}$  dan  $\{F_{(t)}\}$  adalah vektor percepatan, kecepatan, simpangan dan gaya.

### 3.3 Massa Struktur

Suatu struktur yang kontinyu akan mempunyai distribusi massa yang kontinyu pula sehingga terdapat beberapa derajat kebebasan pada setiap massa maka struktur tersebut akan mempunyai derajat kebebasan yang tak terhingga banyaknya. Hal ini akan menyulitkan analisis struktur karena banyaknya persamaan differensial yang perlu diselesaikan. Oleh karena itu perlu adanya asumsi-asumsi untuk menyederhanakan masalah. Terdapat dua pokok yang umumnya dilakukan untuk mendiskripsikan massa struktur.

1. Model *lumped mass*

Pada model ini massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat (*lumped mass*) join atau tempat-tempat tertentu. Dalam hal ini gerakan/*degree of freedom* suatu join sudah ditentukan. Untuk titik nodal yang hanya mempunyai satu derajat kebebasan/satu translasi maka nantinya elemen atau struktur yang bersangkutan akan mempunyai matrik yang isinya hanya bagian diagonal saja (Widodo, 2001). Clough dan Penzien (1993) dalam Widodo (2001) mengatakan bahwa bagian *off-diagonal* akan sama dengan nol karena gaya inersia hanya bekerja pada tiap-tiap massa. Selanjutnya dikatakan bahwa apabila terdapat gerakan rotasi massa (*rotation degree of freedom*) maka pada model *lumped mass* ini juga tidak akan ada *rotation moment of inertia*.

Jika prinsip tersebut dipakai maka hanya terdapat satu *degree of freedom* untuk setiap titik nodal/massa yaitu simpangan horisontal,

kondisi seperti ini pada prinsip bangunan geser (*shear building*). Untuk bangunan bertingkat banyak, konsentrasi beban akan terpusat pada tiap-tiap lantai tingkat bangunan. Sehingga untuk setiap tingkat hanya ada satu massa yang mewakili tingkat yang bersangkutan. Karena hanya terdapat satu derajat kebebasan yang terjadi pada setiap tingkat/massa maka jumlah derajat kebebasan pada suatu bangunan bertingkat banyak akan ditunjukkan oleh banyaknya tingkat bangunan yang bersangkutan.

Besar massa pada tiap tingkat dapat dihitung dengan rumus :

$$m_i = w/g \quad (3.15)$$

dimana  $m_i$ ,  $w$ ,  $g$  secara berurutan adalah massa, berat dan percepatan gravitasi.

## 2. Model *consistent mass matrix*

Pada prinsip ini elemen struktur akan berdeformasi menurut bentuk fungsi tertentu. Jika tiga derajat kebebasan (horisontal, vertikal dan rotasi) diperhitungkan pada setiap nodal maka standar *consistent mass matrix* akan menghasilkan *full populated consistent matrix* artinya suatu matrik yang *off-diagonal* matriknya tidak akan sama dengan nol. Clough dan Penzien (1993) dalam Widodo (2001) mengatakan bahwa pemakaian *consistent mass matrix* akan memerlukan hitungan yang lebih banyak. Dalam model *lumped mass* tidak akan terjadi ketergantungan antara massa (*mass coupling*) karena



matrik massa adalah diagonal. Apabila tidak demikian maka *mass of moment of inertia* akibat translasi dan rotasi harus diperhitungkan.

### 3.4 Kekakuan Struktur

Kekakuan adalah salah satu dinamik karakteristik struktur bangunan yang sangat penting disamping massa bangunan. Antara massa dan kekakuan struktur akan mempunyai hubungan yang unik yang umumnya disebut karakteristik diri atau eigenproblem. Hubungan tersebut akan menentukan nilai frekuensi sudut dan periode getar struktur  $T$ . Kedua nilai ini merupakan parameter yang sangat penting dan akan sangat mempengaruhi respon dinamik struktur.

Pada prinsip bangunan geser (*shear building*) balok lantai tingkat dianggap tetap horisontal baik sebelum maupun sesudah terjadinya penggoyangan. Adanya plat lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok sehingga anggapan tersebut tidak terlalu kasar. Plat dan balok lantai yang kaku dan tetap horisontal sebelum dan sesudah penggoyangan juga berarti bahwa balok mempunyai kekakuan tak terhingga. Sebelum dan sesudah penggoyangan join sama sekali tidak mengalami rotasi.

Pada disain struktur bangunan tahan gempa dikehendaki agar kolom lebih kuat dibandingkan dengan balok. Namun mungkin saja balok mempunyai kekakuan yang lebih besar dari kolomnya walaupun kekuatan yang ada harus sebaliknya. Dengan demikian, pada disain bangunan tahan gempa masih memungkinkan memakai model kekakuan yang dihitung menurut prinsip *shear building*, sekaligus memakai model *lumped mass*.

Pada prinsipnya semakin kaku balok maka semakin besar kemampuannya dalam mengekang rotasi ujung kolom, sehingga akan menambah kekakuan kolom. Pada prinsip Muto (1975), kekakuan joint juga dapat diperhitungkan sehingga hitungan kekakuan baik kekakuan balok maupun kekakuan kolom akan menjadi lebih teliti.

Dalam penelitian ini besarnya kekakuan tiap tingkat dihitung dengan prinsip *shear building* sebagai berikut :

$$k_t = 12EI / H^3 \quad (3.16)$$

dengan  $I = bh^3 / 12$ , sehingga

$$k_t = E * bh^3 / H^3 \quad (3.17)$$

$I$  adalah momen inersia dan  $E$  adalah modulus elastisitas bahan, modulus elastisitas dari beton bertulang diambil  $200000 \text{ kg/cm}^2$ .

Dengan melihat data struktur maka kekakuan dihitung secara paralel yaitu kekakuan tiap tingkat merupakan jumlah total dari kekakuan kolom, secara matematis dapat dituliskan dengan rumus berikut :

$$k_t = \sum k_c \quad (3.18)$$

dengan  $k_t$  dan  $k_c$  adalah kekakuan tingkat dan kekakuan kolom, sehingga kekakuan tingkat ke- $i$  dapat dihitung dengan rumus berikut :

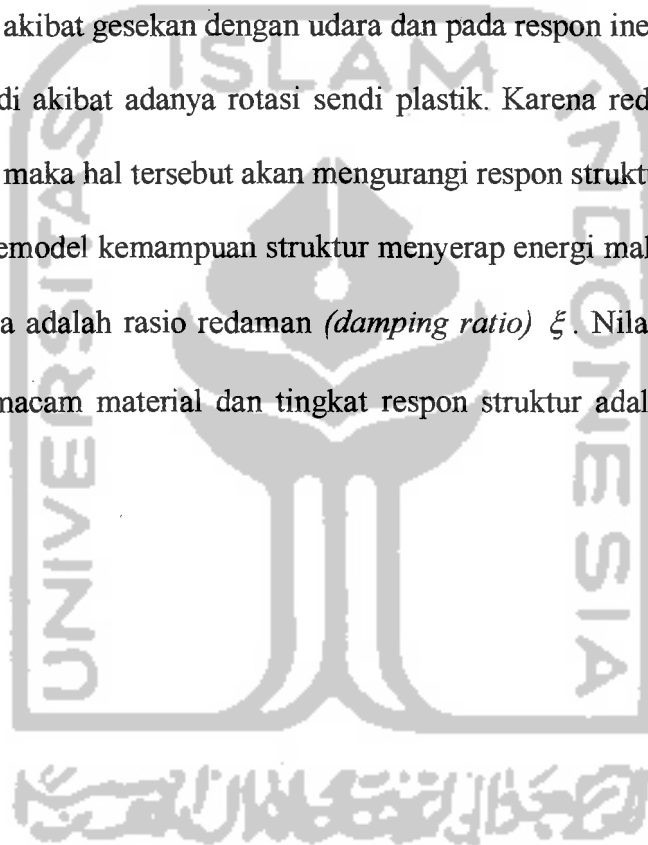
$$k_{t_i} = 2 * k_{cp_i} + \sum_{i=1}^n k_{ctg_i} \quad (3.19)$$

dimana  $k_{t_i}$ ,  $k_{cp_i}$ ,  $k_{ctg_i}$  adalah kekakuan tingkat ke- $i$ , kekakuan kolom tepi dan kekakuan kolom tengah.

### 3.5 Redaman Struktur

Redaman adalah peristiwa penyerapan energi (*energy dissipation*) oleh struktur akibat adanya berbagai macam sebab. Beberapa penyebab itu diantaranya adalah pelepasan energi oleh adanya gerakan antara molekul di dalam material, pelepasan energi oleh gesekan alat penyambung maupun sistem dukungan, pelepasan energi akibat gesekan dengan udara dan pada respon inelastik pelepasan energi juga terjadi akibat adanya rotasi sendi plastik. Karena redaman berfungsi menyerap energi maka hal tersebut akan mengurangi respon struktur.

Untuk memodel kemampuan struktur menyerap energi maka besaran yang dipakai umumnya adalah rasio redaman (*damping ratio*)  $\xi$ . Nilai rasio redaman untuk berbagai macam material dan tingkat respon struktur adalah seperti pada tabel 3.1.



Tabel 3.1 Nilai-nilai rasio redaman untuk berbagai jenis kondisi

No	Level tegangan ( <i>stress level</i> )	Jenis dan kondisi Struktur	Rasio redaman ( <i>damping ratio</i> )
1.	Tegangan elastik atau tegangan kurang $\frac{1}{2}$ tegangan leleh	○ Struktur baja las, beton prestress, beton biasa retak rambut	2 – 3 %
		○ Beton biasa retak minor	3 – 5 %
		○ Struktur baja sambungan baut, keling, struktur kayu dengan sambungan baut/paku	5 – 7 %
2.	Tegangan sedikit di bawah leleh atau pada saat leleh	○ Struktur baja las, beton prestress tanpa loss of orestress secara total	4 – 7 %
		○ Beton prestress dengan tegangan lanjut	7 – 10 %
		○ Beton biasa	7 – 10 %
		○ Struktur baja dengan sambungan baut, keling, atau struktur kayu dengan sambungan baut	10 – 15 %
		○ Struktur kayu dengan sambungan paku	15 – 20 %

Sumber Newmark N. M, Hall W. J (1982) dalam Widodo (2001)

Untuk memperoleh redaman ada tiga cara yang dapat digunakan, yaitu :

1. Redaman proporsional dengan massa (*mass proportional damping*)

Bentuk umum hubungan antara redaman dengan massa adalah,

$$[C] = \alpha[M] \quad (3.20)$$

apabila prinsip kondisi orthogonal diterapkan pada persamaan (3.20) di atas maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} \phi^T C \phi &= \alpha \phi^T M \phi \\ C_j^* &= \alpha M_j^* \\ 2\xi_j \omega_j M_j^* &= \alpha M_j^* \end{aligned} \quad (3.21)$$

dari persamaan (3.21) akan diperoleh

$$\alpha = 2\xi_j \omega_j \quad (3.22)$$

persamaan (3.22) adalah suatu koefisien matrik massa apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan. Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti pada persamaan (3.21). Oleh karena itu untuk mode ke- $i$  akan diperoleh hubungan,

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \alpha M_i^* \quad (3.23)$$

substitusi nilai  $\alpha$  dari persamaan (3.22) ke dalam persamaan (3.23) selanjutnya akan diperoleh,

$$\begin{aligned} 2\xi_i \omega_i M_i^* &= 2\xi_j \omega_j M_i^* \\ \xi_i &= \frac{\xi_j \omega_j}{\omega_i} \end{aligned} \quad (3.24)$$

2. Redaman proporsional dengan kekakuan (*stiffness proportional damping*)

Bentuk umum hubungan antara redaman dengan kekakuan adalah,

$$[C] = \beta[K] \quad (3.25)$$

apabila prinsip kondisi orthogonal diterapkan pada persamaan (3.25)

di atas maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} \phi^T C \phi &= \beta \phi^T K \phi \\ C_j^* \beta K_j^* \\ 2\xi_j \omega_j M_j^* &= \beta \omega_j^2 M_j^* \end{aligned} \quad (3.26)$$

dari persamaan (3.26) akan diperoleh,

$$\beta = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (3.27)$$

persamaan (3.27) adalah suatu koefisien matrik kekakuan apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan. Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti pada persamaan (3.26). oleh karena itu untuk mode ke-i akan diperoleh hubungan,

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \beta \omega_j^2 M_i^2 \quad (3.28)$$

substitusi nilai  $\beta$  dari persamaan (3.27) ke dalam persamaan (3.28)

selanjutnya akan diperoleh,

$$\begin{aligned} 2\xi_i \omega_i M_i^* &= \frac{2\xi_j}{\omega_j} \omega_i^2 M_i^* \\ \xi_i &= \frac{\xi_j \omega_i}{\omega_j} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3. Redaman proporsional terhadap massa dan kekakuan (*mass and stiffness propotional damping*)

Bentuk umum hubungan antara redaman, massa dan kekakuan tersebut adalah,

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.30)$$

apabila prinsip kondisi orthogonal diterapkan pada persamaan (3.30) di atas maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} \phi^T C \phi &= \alpha \phi^T M \phi + \beta \phi^T K \phi \\ C_j^* &= \alpha M_j^* + \beta \omega_j^2 M_j^* \\ 2\xi_j \omega_j &= \alpha + \beta \omega_j^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

untuk dua mode yang berurutan yaitu mode ke-i dan mode ke-j maka dari persamaan (3.31) akan menghasilkan,

$$2\xi_j \omega_j = \alpha + \beta \omega_j^2 \quad (3.32)$$

dan

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (3.33)$$

berdasarkan persamaan (3.32) dan (3.33) maka akan diperoleh nilai-nilai  $\beta$  dan  $\alpha$  sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2(\xi_j \omega_j - \xi_i \omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \\ \alpha &= 2\xi_j \omega_j - \beta \omega_j^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

persamaan (3.34) adalah suatu koefisien matrik massa dan matrik kekakuan apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan.

Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti pada persamaan (3.32) dan persamaan (3.33). Untuk dua mode yang ditinjau, persamaan (3.32) dan persamaan (3.33) dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta}{2}\omega_j &= \xi_j \\ \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i &= \xi_i\end{aligned}\quad (3.35)$$

persamaan (3.35) adalah persamaan simultan yang mana nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  perlu diperhitungkan. Dalam *mass and stiffness proportional damping*, frekuensi sudut dan ratio redaman untuk mode ke-i dan mode ke-j sudah ditentukan dan berfungsi sebagai nilai referensi. Apabila hal ini telah dilakukan maka sebenarnya nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dapat dicari melalui bentuk matrik persamaan (3.35) yaitu,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \omega_j \\ \omega_j & 1 \\ 1 & \omega_i \\ \omega_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_j \\ \xi_i \end{Bmatrix}\quad (3.36)$$

melalui persamaan (3.36) apabila nilai-nilai frekuensi sudut dan rasio redaman untuk mode ke-i dan mode ke-j sudah ditentukan maka nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dapat dihitung. Selanjutnya nilai-nilai rasio redaman untuk setiap mode dapat dicari dengan mengambil salah satu dari persamaan (3.35) yaitu,

$$\frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i = \xi_i\quad (3.37)$$

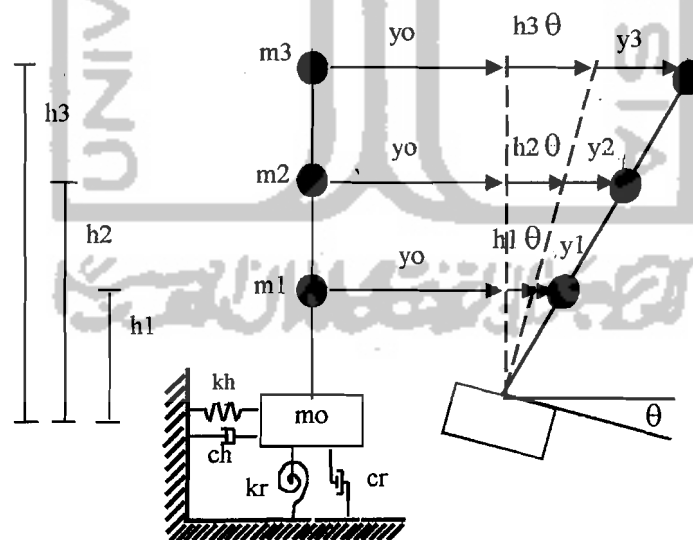
dengan catatan nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dihitung menurut persamaan (3.36).



### 3.6 Struktur dengan Memperhitungkan Rotasi Pondasi Akibat Gerakan Tanah

Tanah pada dasar gedung (pondasi) tidak sepenuhnya kaku, karena tanah pada dasar pondasi akan terpengaruh apabila terjadi getaran gedung akibat gerakan tanah. Keadaan gedung akan mengalami getaran ke tiga arah, yaitu getaran arah horizontal, getaran arah vertikal dan getaran berputar. Akibat gerakan tanah tersebut maka pondasi gedung akan mengalami rotasi (perputaran), yang mana dipengaruhi oleh nilai kekakuan horizontal, kekakuan vertikal dan kekakuan putar tanah yang berbeda.

Pengaruh gerakan tanah yang mengakibatkan rotasi pondasi pada struktur bangunan karena mengalami getaran arah horizontal dan getaran berputar pada struktur MDOF dapat digambarkan sebagai berikut



Model struktur

**Gambar 3.4** Struktur MDOF dengan rotasi pondasi

Dari Gambar 3.4 dengan asumsi struktur bangunan bergeser ke arah horizontal sedangkan arah vertikal diabaikan dan massa mengumpul (*lumped mass*). Jika

gaya inersia, gaya redam serta gaya kekakuan adalah  $F_I, F_C$  dan  $F_K$  maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$F_I = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta}\} = 0$$

$$F_C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta}\} = 0 \quad (3.38)$$

$$F_K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{y_j + y_b + y_0 + h_j \theta\} = 0$$

Sedangkan untuk keseimbangan struktur untuk arah horisontal diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$F_{I,h} = \sum_{j=1}^N m_j \{\ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta}\} + m_0 \{\ddot{y}_b + \ddot{y}_0\} = 0 \quad (3.39)$$

$$F_{C,h} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta}\} + Ch \dot{y}_0 = 0$$

$$F_{K,h} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{y_j + y_b + y_0 + h_j \theta\} + Kh \cdot y_0 = 0$$

Sedangkan untuk keseimbangan struktur untuk arah putar diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$F_{I,r} = \sum_{j=1}^N m_j h_j \{\ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta}\} + I_G \ddot{\theta} = 0$$

$$F_{C,r} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{ \dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta} \} + Cr\dot{\theta} = 0 \quad (3.40)$$

$$F_{K,r} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{ y_j + y_b + y_0 + h_j \theta \} + Kr\theta = 0$$

dari persamaan (3.38), (3.39) dan (3.40) maka akan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_1 & m_1 h_1 \\ 0 & m_2 & 0 & m_2 & m_2 h_2 \\ 0 & 0 & m_3 & m_3 & m_3 h_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_0 + m_1 + m_2 + m_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 \\ m_1 h_1 & m_2 h_2 & m_3 h_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 & I_G + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 \ddot{y}_b \\ m_2 \ddot{y}_b \\ m_3 \ddot{y}_b \\ (m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_b \\ (m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3) \ddot{y}_b \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

dimana dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_1 & m_1 h_1 \\ 0 & m_2 & 0 & m_2 & m_2 h_2 \\ 0 & 0 & m_3 & m_3 & m_3 h_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_0 + m_1 + m_2 + m_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 \\ m_1 h_1 & m_2 h_2 & m_3 h_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 & I_G + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix}$$

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Untuk matriks redaman pada struktur atas dapat dihitung dengan tiga cara yaitu, redaman proposional dengan massa, redaman proposional dengan kekakuan dan redaman proposional dengan massa dan kekakuan. Sehingga matriks redaman berturut-turut menjadi,

$$[C] = \begin{bmatrix} \alpha.m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha.m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha.m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \beta.(k_1 + k_2) & \beta.-k_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta.-k_2 & \beta.(k_2 + k_3) & \beta.-k_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta.-k_3 & \beta.k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \alpha.m_1 + \beta.(k_1 + k_2) & \beta.-k_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta.-k_2 & \alpha.m_2 + \beta.(k_2 + k_3) & \beta.-k_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta.-k_3 & \alpha.m_3 + \beta.k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

dengan:

$I_G$  = Inertia polar moment

$C_h$  = Redaman horisontal tanah

$C_r$  = Redaman horisontal tanah

$K_h$  = Kekakuan horisontal tanah

$K_r$  = Kekakuan putar (rotasi) tanah

### 3.7 Getaran Bebas pada Struktur Derajat Kebebasan Banyak

Suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar misalnya akibat beban angin maupun akibat beban gerakan tanah/gempa. Getaran-getaran seperti ini dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *force vibration system*. Membahas tentang getaran bebas pada struktur dengan derajat kebebasan banyak akan diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat pada analisa dinamika struktur. Karakter-karakter itu adalah frekuensi sudut, periode getar dan frekuensi alam. Pembahasan getaran bebas ini masih diikuti dengan penyederhanaan permasalahan yaitu dengan menganggap struktur tidak mempunyai redaman (*undamped system*).

### 3.7.1 Nilai Karakteristik (*Eigenproblem*)

Getaran bebas (*free vibration system*) pada kenyataan jarang terjadi pada struktur MDOF, namun membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran/karakteristik dari struktur yang bersangkutan yang selanjutnya sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya.

Pada getaran bebas untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak maka persamaan differensial geraknya adalah seperti persamaan berikut ini dengan nilai ruas kanan sama dengan nol,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.46)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, apabila nilai damping ratio relatif kecil. Jika hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak maka untuk nilai  $C = 0$ , persamaan (3.46) menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad (3.47)$$

Karena persamaan (3.47) adalah persamaan diferensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman maka sebagaimana penyelesaian persamaan diferensial yang sejenis maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik menurut bentuk,

$$\begin{aligned} Y &= \{\phi\}_i \sin(\omega t) \\ \dot{Y} &= \omega \{\phi\}_i \cos(\omega t) \\ \ddot{Y} &= -\omega^2 \{\phi\}_i \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

dimana  $\{\phi\}_i$  adalah suatu ordinat massa pada mode ke-i. Persamaan (3.48) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.47) maka akan diperoleh,

$$-\omega^2 [M] \{\phi\}_i \sin(\omega t) + [K] \{\phi\}_i \sin(\omega t) = 0$$

$$[K] - \omega^2 [M] \{\phi\}_i = 0 \quad (3.49)$$

Persamaan (3.49) adalah suatu persamaan yang sangat penting dan biasanya disebut dengan persamaan *eigenproblem* atau karakteristik problem atau ada juga yang menyebut *eigenvalue* problem. Persamaan (3.49) tersebut adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan simultan tersebut adalah dengan memakai dalil Cramer (1704 – 1752). Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor  $\{\phi\}_i$  adalah nol, sehingga,

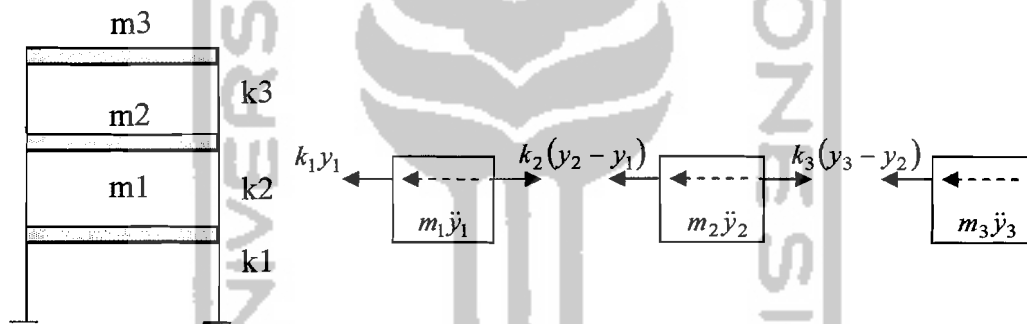
$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (3.50)$$

Dengan adanya hubungan antara jumlah mode dengan jumlah massa struktur maka struktur yang mempunyai n-tingkat maka akan mempunyai n-derajat kebebasan. Persamaan (3.50) akan menghasilkan suatu polinomial pangkat-n yang selanjutnya akan menghasilkan nilai  $\omega_i^2$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Selanjutnya substitusi masing-masing frekuensi sudut  $\omega_i$  kedalam persamaan (3.49) maka akan diperoleh nilai-nilai *mode shape*.

### 3.7.2 Metode Polinomial

Metode polinomial pada dasarnya masih menggunakan persamaan *eigenproblem*. Untuk mencari atau menghitung *eigenvalue* (nilai-nilai frekuensi sudut) tidak dapat lagi digunakan cara determinan. Cara yang dipakai adalah dengan mentransfer persamaan simultan *eigenproblem* menjadi suatu persamaan polinomial pangkat banyak. Akar-akar persamaan polinomial inilah yang akan dicari yang seterusnya akan menghasilkan nilai-nilai *eigenvektor*.

Untuk membahas cara polinomial ini maka dapat ditinjau suatu struktur dengan tingkat seperti pada Gambar 3.5



**Gambar 3.5** Struktur bangunan 3 derajat kebebasan

Berdasarkan keseimbangan gaya-gaya *free body diagram* maka dapat disusun persamaan simultan gerakan dibawah ini,

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Persamaan (3.51) dapat disederhanakan menjadi seperti dibawah ini,

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 &= 0 \\
 m_3 \ddot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$



persamaan (3.52) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

untuk lebih jelasnya mengenai metode polinomial maka diambil contoh hitungan seperti struktur pada Gambar 3.5.

Data struktur:  $m_1=1,0 \text{ kg} \cdot \text{dt}^2/\text{cm}$ ;  $m_2=1,5 \text{ kg} \cdot \text{dt}^2/\text{cm}$ ;  $m_3=2,0 \text{ kg} \cdot \text{dt}^2/\text{cm}$

$k_1=1800 \text{ kg/cm}$  (2 kolom);  $k_2=1200 \text{ kg/cm}$  (2 kolom);

$k_3=600 \text{ kg/cm}$  (2 kolom)

maka matriks massa dan matriks kekakuan untuk struktur tersebut jika dipakai unit massa  $m=1 \text{ kg} \cdot \text{dt}^2/\text{cm}$  dan unit kekakuan  $k=600 \text{ kg/cm}$  adalah,

$$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Dengan memperhatikan matriks-matriks di atas maka persamaan *eigenproblem* yang dapat disusun adalah sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} 5k - 2\omega^2 m & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1,5\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Persamaan (3.25) dapat ditulis menjadi,

$$\begin{bmatrix} 5 - 2 \frac{\omega^2}{k/m} & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1,5 \frac{\omega^2}{k/m} & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{\omega^2}{k/m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Apabila diambil suatu notasi

$$\lambda = \frac{\omega^2}{k/m} \quad (3.57)$$

maka persamaan (3.56) menjadi

$$\begin{aligned} (5 - 2\lambda)\phi_1 - 2\phi_2 &= 0 \\ -2\phi_1 + (3 - 1,5\lambda)\phi_2 - \phi_3 &= 0 \\ \phi_2 + (1 - \lambda)\phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Penyelesaian persamaan simultan homogen tidaklah memberikan nilai-nilai yang pasti, tetapi hasil-hasil yang diperoleh hanya merupakan perbandingan antara yang satu dengan yang lain. Oleh karena itu dengan mengambil nilai,

$$\phi_1 = 1 \quad (3.59)$$

Dengan mensubstitusikan nilai persamaan (3.59) ke dalam baris pertama persamaan (3.58) akan diperoleh,

$$\phi_2 = (2,5 - \lambda) \quad (3.60)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.60) ke dalam baris ke-2 persamaan (3.58) maka akan diperoleh,

$$\phi_3 = 1,5\lambda^2 - 6,75\lambda + 5,5 \quad (3.61)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.60) dan (3.61) ke dalam persamaan (3.58), setelah disusun akan diperoleh,

$$1,5\lambda^3 - 8,25\lambda^2 + 11,25\lambda - 3 = 0 \quad (3.62)$$

Persamaan (3.62) adalah persamaan polinomial pangkat 3 dan nilai yang akan dicari adalah nilai-nilai  $\lambda$  yang merupakan akar persamaan tersebut. Untuk mencari akar-akar persamaan (3.62) adalah dengan cara yang paling sederhana

yaitu dengan cara coba-coba. Setelah nilai-nilai  $\lambda$  diperoleh maka nilai percepatan sudut dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.57). nilai akar-akar dari persamaan (3.62) berikut nilai percepatan sudutnya adalah,

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 0,3515 \text{ maka } \omega_1 &= \sqrt{0,3515 * \frac{600}{1}} = 14,5224 \text{ rad/dt} \\ \lambda_2 = 1,6066 \text{ maka } \omega_2 &= \sqrt{1,6066 * \frac{600}{1}} = 31,0500 \text{ rad/dt} \\ \lambda_3 = 3,5419 \text{ maka } \omega_3 &= \sqrt{3,5419 * \frac{600}{1}} = 46,0992 \text{ rad/dt}\end{aligned}\tag{3.63}$$

Pada struktur yang memiliki derajat kebebasan banyak maka akan diperoleh persamaan polinomial yang berpangkat banyak pula sehingga akan kesulitan untuk mencari koefisien persamaan-persamaan polinomial. Selain itu untuk mencari akar-akar persamaan yang jumlahnya bergantung pada jumlah DOF.

### 3.7.3 Metode Transformasi Jacobi

Metode solusi dasar Jacobi telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah-masalah matriks yang riil dan simetris. Metode Jacobi berusaha mentransformasi suatu matriks  $A$  menjadi matriks diagonal  $A_{k+1}$ . Dalam keadaan ini elemen-elemen diagonal utama matriks  $A_{k+1}$  adalah harga-harga *eigen* yang dicari.

Untuk merubah matriks  $A$  menjadi matriks diagonal  $A_{k+1}$  dilakukan transformasi ortogonal. Oleh sebab itu hubungan antara matriks  $A$  dan  $A_{k+1}$  adalah serupa *ortogonal similiar orthogonal*, sehingga harga-harga *eigen* dari matriks  $A_{k+1}$  adalah juga harga-harga *eigen* dari matriks  $A$ .



Jadi dengan demikian dapat diperoleh elemen-elemen dari matriks  $U_{k+1}$  karena matriksnya dalam bentuk ortogonal sehingga  $U_{k+1}^{-1} = U_{k+1}^T$ . Dari sini dapat dihitung  $A_{k+1} = U_{k+1}^{-1} * A_k * U_{k+1}$  untuk  $k=0$

Untuk  $k$  besar matriks  $A_{k+1}$  akan berubah menjadi,

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & 0 & - & 0 \\ 0 & a_{22}^{(k)} & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

dimana harga-harga eigen dari matriks  $A_k$  atau  $A_{k+1}$  adalah,

$$\lambda_1 = a_{11}^{(k)}, \lambda_2 = a_{22}^{(k)}, \lambda_n = a_{nn}^{(k)} \quad (3.70)$$

Untuk lebih jelas mengenai metode Jacobi diambil contoh matrik di bawah ini,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Pertama diusahakan untuk mengenkalkan elemen yang bukan diagonal, misalnya  $a_{12}$  atau  $a_{21}$ . Dalam hal ini  $k=0$ ,  $i=1$  dan  $j=2$  maka diperoleh,

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 * a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)} - a_{22}^{(0)}} \quad (3.72)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 * 2}{5 - 4} = 37,98$$

Setelah nilai  $\alpha$  diperoleh maka persamaan (3.67) yang merupakan elemen-elemen matriks  $U_{k+1}$  persamaan (3.66) adalah,

$$\begin{aligned} U_{11} &= \cos \alpha = 0,7882 & U_{12} &= -\sin \alpha = -0,6154 \\ U_{21} &= \sin \alpha = 0,6154 & U_{22} &= \cos \alpha = 0,7882 \end{aligned} \quad (3.73)$$

maka matriks persamaan (3.66) menjadi,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0,7882 & -0,6154 & 0 \\ 0,6154 & 0,7882 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$U_1^{-1} = U_1^T = \begin{bmatrix} 0,7882 & 0,6154 & 0 \\ -0,6154 & 0,7882 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan diketahuinya nilai dari persamaan (3.71) dan persamaan (3.74) maka dari persamaan (3.65) diperoleh,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6,5614 & 0,0000 & 6,5754 \\ 0,0000 & 2,4384 & -1,3278 \\ 6,5754 & -1,3278 & 2,0000 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Terlihat bahwa  $a_{12}$  dan  $a_{21}$  telah menjadi nol, selanjutnya kita mengeliminasi elemen non diagonal yang lain, misalnya  $a_{13}$  kemudian langkah selanjutnya sama seperti pada saat mengeliminasi  $a_{12}$  maka akan diperoleh,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 11,2406 & -0,7648 & 0,0001 \\ 0,7648 & 2,4384 & -1,0819 \\ 0,0001 & -1,0819 & -2,6790 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Terlihat bahwa  $a_{13}$  dan  $a_{31}$  telah mendekati nol maka selanjutnya mengeliminasi  $a_{23}$ . Adapun langkahnya sama seperti pada saat mengeliminasi  $a_{12}$  dan  $a_{13}$ , maka akan diperoleh,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 11,2403 & -0,7544 & -0,1528 \\ 0,7544 & 2,6574 & 0,0000 \\ 0,1528 & 0,0000 & -2,8980 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Sampai dengan tahap ini baru dilakukan satu kali putaran. Untuk putaran selanjutnya mengikuti prosedur yang dilakukan pada putaran pertama. Terlihat

bahwa elemen-elemen non diagonal makin mendekati nol. Proses ini dilanjutkan sampai matriks A berubah menjadi matriks diagonal. Dalam hal ini untuk 3 kali putaran diperoleh matriks diagonal A sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 11,30 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 2,59 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -2,90 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

sehingga dapat disimpulkan,

$$\lambda_1 = 11,30 \quad \lambda_2 = 2,59 \quad \lambda_3 = -2,90$$

Pembahasan di atas tampak bahwa metode Jacobi membutuhkan ketelitian dalam setiap rotasi/putaran, sebab hasil matriks putaran sebelumnya mempengaruhi nilai matriks selanjutnya.

### 3.7.4 Metode Gauss Jordan

Metode eliminasi Gauss mempergunakan operasi baris elementer untuk menghapus semua elemen-elemen matriks yang berada disebelah kiri diagonal utama matriks A(n x n). Dalam pelaksanaan metode Gauss Jordan, matriks A(n x n) terlebih dahulu dijadikan A(n x n+1) karena vektor pada kolom  $\Delta \dot{p}_i$  diletakkan di dalam kolom n+1.

Secara simbolis, metode Gauss Jordan dapat diterangkan sebagai berikut. Misalnya suatu persamaan linier simultan ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \dot{p}_1 \\ \Delta \dot{p}_2 \\ \Delta \dot{p}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

Untuk mencari harga-harga  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$ ,  $\Delta y_3$  maka langkah-langkah yang harus dilakukan adalah menggabungkan matriks A dan vektor  $\Delta \dot{P}_i$  sehingga matriks  $A(n \times n)$  menjadi  $A(n \times n+1)$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \Delta \dot{P}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \Delta \dot{P}_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \Delta \dot{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

selanjutnya nilai matriks tersebut diubah menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} \text{ kemudian menjadi } \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

yang akhirnya menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & 1 & 0 & d_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

maka akan diperoleh nilai-nilai  $\Delta y_1 = d_{14}$ ,  $\Delta y_2 = d_{24}$  dan  $\Delta y_3 = d_{34}$

### 3.8 Metode $\beta$ -Newmark

Metode  $\beta$ -Newmark dapat dipakai untuk menyelesaikan integrasi persamaan diferensial *coupled* struktur MDOF secara langsung. Metode  $\beta$ -Newmark yang dimaksud misalnya adalah metode yang berdasarkan pada incremental method, sedangkan untuk struktur yang berperilaku linear inelastik maupun non linear inelastik maka perlu dikembangkan model integrasi yang dapat mensimulasikan perubahan kekakuan menurut fungsi dan waktu.



Persamaan differensial yang berlaku saat interval yang ditinjau pada metode  $\beta$ -Newmark adalah

$$m \Delta \ddot{y}_i + c \Delta \dot{y}_i + k \Delta y_i = \Delta P_i \quad (3.83)$$

Apabila beban dinamik yang dipakai adalah beban gempa maka untuk struktur MDOF persamaan differensialnya adalah

$$[M] \Delta \ddot{y}_i + [C] \Delta \dot{y}_i + [K] \Delta y_i = \{M\} \Delta \ddot{y}_{b,i} \quad (3.84)$$

Pada metode  $\beta$ -Newmark memakai perjanjian notasi untuk perubahan simpangan  $\Delta y$ , perubahan kecepatan  $\Delta \dot{y}$  dan perubahan percepatan  $\Delta \ddot{y}$  adalah

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i, \Delta \dot{y} = \dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i, \Delta \ddot{y} = \ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i \quad (3.85)$$

Sedangkan perubahan intensitas pembebanan pada interval yang ditinjau adalah

$$\Delta P_i = P_{i+1} - P_i \quad (3.86)$$

Untuk struktur MDOF akibat gempa bumi maka persamaan differensial yang digunakan

$$\Delta P_i = \{M\} (\ddot{y}_{b,i+1} - y_{b,i}) \quad (3.87)$$

Untuk memulai integrasi numerik tersebut digunakan persamaan

$$\Delta \ddot{y}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta y_i - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{y}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{y}_i \quad (3.88)$$

dengan  $\Delta \ddot{y}_i$  adalah perubahan percepatan pada langkah ke-i, sedangkan perubahan kecepatan pada langkah yang sama  $\Delta \dot{y}_i$  adalah

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \Delta y_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{y}_i + (\Delta t) \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{y}_i \quad (3.89)$$

Kemudian untuk perubahan simpangan dapat dicari dengan persamaan

$$\Delta y = \frac{\Delta \hat{P}_i}{k} \quad (3.90)$$

yang mana

$$k = \left\{ K + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} C + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M \right\} \quad (3.91)$$

$$\Delta \hat{P}_i = (P_{i+1} - P_i) + a \dot{y}_i + b \ddot{y}_i \quad (3.92)$$

Sedangkan untuk struktur MDOF akibat beban gempa bumi maka persamaan (3.88) akan menjadi

$$\Delta \hat{P}_i = \{M\}(\ddot{y}_{b,i+1} - \ddot{y}_{b,i}) + a \dot{y}_i + b \ddot{y}_i \quad (3.93)$$

dimana nilai a dan b pada persamaan diatas adalah

$$a = \left\{ \frac{1}{\beta(\Delta t)} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right\} \quad b = \left\{ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right\} \quad (3.94)$$

Pada metode  $\beta$ -Newmark terdapat perbedaan nilai koefisien berdasarkan metode yang digunakan, yaitu :

1. Metode percepatan rata-rata, dengan nilai koefisien  $\gamma = \frac{1}{2}$  dan

$$\beta = \frac{1}{4}.$$

2. Metode percepatan linier, dengan nilai koefisien  $\gamma = \frac{1}{2}$  dan  $\beta = \frac{1}{6}$ .

Selanjutnya simpangan, kecepatan, dan percepatan pada akhir interval adalah

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \dot{y}_{i+1} &= \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \\ \ddot{y}_{i+1} &= \ddot{y}_i + \Delta \ddot{y}_i\end{aligned}\tag{3.95}$$

Tahap-tahapan integrasi numerik berdasarkan interval waktu pada metode  $\beta$ -Newmark adalah sebagai berikut:

1. Nilai matriks  $k$ ,  $m$ ,  $\xi$  dan  $dt$  diketahui terlebih dahulu.
2. Disusun matriks  $[M]$ , matriks redaman  $[C]$  dan matriks kekakuan
3. Dihitung nilai  $k$  pada persamaan (3.91) nilai  $a$  dan  $b$  pada persamaan (3.94)
4. Dihitung nilai  $\Delta P_i$  pada persamaan (3.87),  $\Delta \hat{P}_i$  pada persamaan (3.93),  $\Delta y_i$  pada persamaan (3.90),  $\Delta \dot{y}_i$  pada persamaan (3.89) dan  $\Delta \ddot{y}_i$  pada persamaan (3.88).
5. Dihitung nilai simpangan, kecepatan dan percepatan struktur pada akhir interval menurut persamaan (3.95).
6. Untuk hitungan selanjutnya kembali kelangkah ke-4.