

BAB III

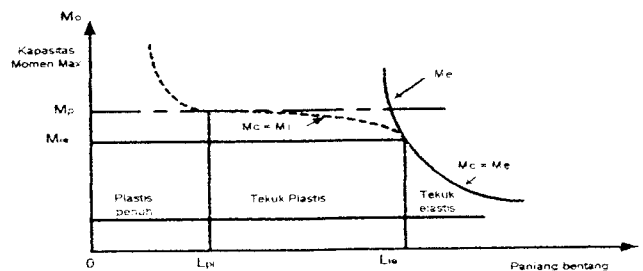
LANDASAN TEORI

3.1 Konsep Dasar

Keruntuhan pada balok dapat terjadi karena salah satu dari dua hal berikut ini :

1. Tegangan-tegangan yang terjadi pada balok melebihi kapasitas tegangan yang dapat diterima oleh material balok tersebut (untuk balok yang relatif besar).
2. Tegangan-tegangan yang terjadi pada balok menyebabkan balok berada dalam keadaan tidak stabil (untuk balok langsing).

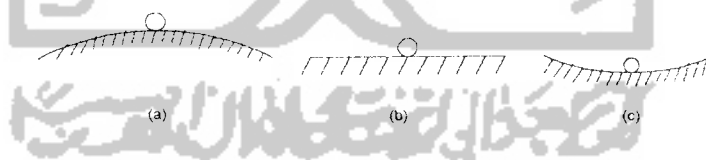
Ketidakstabilan pada balok biasanya dikenal sebagai masalah tekuk pada balok. Perilaku balok yang mengalami tekuk dapat diuraikan sebagai berikut : Sebuah balok yang dikenai beban yang bertambah secara perlahan-lahan, akan mengalami lendutan pada arah beban yang diberikan sampai akhirnya balok tertekuk keluar bidang pembebanan. Tekuk yang terjadi pada balok ini dikenal sebagai tekuk lateral. Keruntuhan dari balok langsing lurus dimulai saat penambahan tegangan pada keadaan tekuk lateral elastis menyebabkan leleh. Sebuah balok lurus dengan ketebalan menengah dapat leleh sebelum beban tekuk tercapai, hal ini terjadi akibat pengaruh kombinasi tegangan momen dan tegangan sisa, dan leleh juga dapat terjadi setelah tekuk plastis dicapai. Seperti ditunjukkan dalam gambar 3.1



Gambar 3.1 Kapasitas Momen Maksimum dari Balok
(Theory of Beam-Columns, Chen, W. F. & Atsuta, T, 1977)

Beban yang menyebabkan balok dalam keadaan transisi antara tekuk atau tetap lurus inilah yang disebut beban kritis. Beban kritis pada balok ini tergantung pada dimensi balok, jenis perletakan balok dan karakteristik dari material balok. Untuk balok yang sangat pendek, beban tekuk plastis dapat lebih besar dari beban yang mengakibatkan keruntuhan plastis.

Tekuk pada balok merupakan masalah kestabilan. Konsep kestabilan sendiri dapat dijelaskan dengan keseimbangan bola dalam berbagai posisi, seperti terlihat pada gambar 3.2 berikut :



Gambar 3.2 Kestabilan
(Theory of Elastic Stability, Timoshenko & Gere, 1961)

Walaupun bola di atas berada dalam keadaan seimbang untuk setiap posisi, akan tetapi jika diperhatikan lebih teliti akan terdapat perbedaan yang mendasar. Jika bola yang terlihat pada gambar 3.2a diberi gangguan yang mengakibatkan bola bergeser, maka bola tersebut akan terus bergerak menjauhi posisi awalnya.

Keseimbangan seperti ini disebut dengan keseimbangan labil. Sedangkan bola yang terlihat pada gambar 3.2b, jika diberi gangguan yang mengakibatkan bola bergeser, maka bola tersebut akan tetap berada pada posisi setelah diganggu. Keseimbangan ini disebut dengan keseimbangan netral. Terakhir, bola pada gambar 3.2c, jika diberi gangguan yang menyebabkan bola bergeser sedikit dari posisi awalnya, maka bola tersebut kembali pada posisi awalnya setelah gangguan dihilangkan. Keseimbangan seperti ini disebut dengan keseimbangan stabil. Pada gambar 3.3 diperlihatkan bahwa bola berada dalam posisi seimbang jika terletak sepanjang garis ABC. Jika terletak antara A dan B, maka bola berada dalam keseimbangan stabil. Jika bola tepat berada pada titik B, bola berada dalam keseimbangan netral. Sedangkan jika bola terletak antara B dan C, maka bola berada dalam keadaan keseimbangan labil.



Gambar 3.3 Permukaan Stabilitas

Perilaku tekuk lateral pada balok hampir sama dengan perilaku bola diatas. Balok lurus akan tetap stabil jika beban yang diterimanya relatif kecil. Tetapi jika beban yang diterimanya terus membesar maka akan terjadi ketidakstabilan. Jika keseimbangan netral dianggap sebagai suatu keadaan transisi antara stabil dan labil, maka beban yang menyebabkan terjadinya keseimbangan netral ini disebut

dengan beban kritis. Sehingga dalam menentukan beban kritis yang dapat diterima oleh balok dapat digunakan konsep keseimbangan ini.

Jika sebuah balok dibengkokkan pada bidang pengaku utamanya, maka defleksi biasanya hanya terjadi dalam bidang tersebut. Bagaimanapun juga, jika balok tidak mempunyai kekakuan lateral yang cukup atau tidak mempunyai penyokong, maka balok dapat tertekuk keluar bidang pembebanannya, seperti ditunjukkan pada gambar 3.4.



Gambar 3.4 Tekuk Lateral dari Balok Kantilever
(Theory of Beam-Columns, Chen, W. F. & Atsuta, T, 1977)

Beban yang menyebabkan terjadinya tekuk ini umumnya lebih kecil daripada kapasitas beban yang dapat diterima oleh balok, seperti ditunjukkan dalam gambar 3.1, yang menunjukkan variasi dari momen kapasitas terhadap kelangsingan.

3.2 Persamaan Kestimbangan Energi

Untuk menganalisa tekuk lateral pada balok dapat dilakukan dengan metode energi. Dalam analisis ini digunakan metode energi untuk menghitung besarnya

beban kritis yang dapat diterima oleh balok. Terlebih dahulu akan ditinjau konsep dasar dari metode energi ini.

Jika sebuah struktur diberi gaya luar, maka struktur tersebut akan mengalami deformasi. Selama deformasi ini, gaya luar melakukan sejumlah kerja. Kerja yang dilakukan oleh sejumlah gaya luar didefinisikan sebagai hasil perkalian skalar dari vektor gaya P dengan vektor perpindahan s yang sehubungan dengan gaya tersebut. Besar skalar ini adalah positif jika arah dari kedua vektor tersebut sama. Jika gaya tetap konstan, kerja menjadi $W = P \cdot s$, sebaliknya jika gaya berubah selama perpindahan, maka kerja dihitung dari integral tertentu :

$$W = \int_{s_1}^{s_2} P \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

Selama deformasi dari sebuah badan elastis, kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya luar, W_e , dilawan oleh kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya dalam, W_i . Jika didefinisikan energi sebagai kemampuan melakukan kerja, maka hukum konservasi energi mensyaratkan kerja dalam total adalah sama dan berlawanan dengan kerja luar total; sehingga dapat dituliskan :

$$W_e + W_i = 0 \quad (3.1)$$

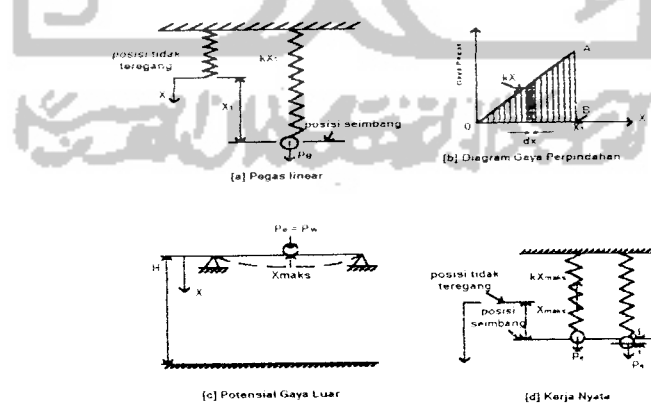
Ada beberapa tipe dari energi, yang disebut sebagai energi potensial, energi regangan, energi kinetik, dan sebagainya. Energi potensial didefinisikan sebagai kemampuan dari gaya untuk melakukan kerja karena dari posisi dari gaya tersebut. Energi potensial dari gaya-gaya dalam disebut energi regangan, U , yang besarnya sama dengan kerja negatif dari gaya-gaya dalam ($U = - W_i$). Energi potensial dari gaya-gaya luar, V , didefinisikan sebagai kerja negatif yang

dilakukan oleh gaya-gaya luar, dimana besarnya adalah tetap, antara posisi awal dan posisi akhir dari gaya-gaya luar. Potensial total Π dari sebuah sistem struktur terdiri dari energi regangan ditambah dengan energi potensial dari beban.

$$\Pi = U + V \quad (3.2)$$

Dalam analisa struktur dengan metode energi, mesti dibedakan antara kerja nyata dan kerja maya. Untuk menggambarkan perbedaan yang mendasar antara dua konsep ini, dapat dilihat sebuah pegas elastis dengan derajat kebebasan satu dalam gambar 3.5a. Untuk mempertahankan keseimbangan statis dari sistem, beban mesti diberikan dengan kecepatan rendah (perlahan-lahan), jika sebaliknya akan dihasilkan getaran. Selama proses pembebanan akan dihasilkan penambahan gaya pegas (gambar 3.5b). Kerja dilakukan oleh uluran pegas digambarkan sebagai luas dari segitiga OAB: maka :

$$W_i = - \int_0^{x_1} (k \cdot x) dx = - \frac{k \cdot x_1^2}{2} = - \frac{1}{2} P_{i \text{ maks}} \cdot x_{\text{maks}} \quad (3.3)$$



Gambar 3.5 Berbagai konsep energi
(Teori dan Analisis Pelat Metode Klasik dan Numerik, Szilard, R., 1974)

Sehingga dapat dinyatakan bahwa kerja dalam nyata pada sebuah sistem elastis adalah sama dengan setengah kali nilai akhir dari gaya-gaya dalam dengan deformasi yang sehubungan.

Dengan cara yang sama, kerja nyata yang dilakukan oleh gaya luar dapat dituliskan sebagai :

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot P_e \cdot X_{maks} \quad (3.4)$$

Jadi, kerja nyata dari gaya-gaya luar yang bekerja pada sebuah sistem elastis adalah setengah kali gaya-gaya tersebut dengan perpindahan akhir yang sehubungan dengannya.

Untuk menggambarkan konsep dari potensial, V , dari sebuah gaya luar, perhatikan berat dari sebuah badan, P_w , dalam medan gravitasi bumi, seperti terlihat pada gambar 3.5c. Jika badan tersebut ditempatkan pada sebuah tinggi datum H di atas permukaan bumi, maka beratnya dapat melakukan kerja total $P_w \cdot H$, asalkan penyokong struktur dilepas. Jika deformasi akhir dari struktur yang sehubungan dengan beban ini adalah X_{maks} , maka potensial dari gaya luar menjadi:

$$V = - P_e \cdot X_{maks} \quad (3.5)$$

Dimana tanda negatif menunjukkan kehilangan dari energi potensial ketika gaya bergerak dari posisi awal ke posisi akhirnya.

Pada kasus kerja maya, badan elastis selalu berada dalam keadaan seimbang. Sehingga sebuah badan yang diberikan nilai maksimum dari gaya luar statis, selalu telah mencapai keadaan akhir dari deformasinya, jika kondisi keseimbangan ini diganggu dengan menambahkan perpindahan kecil, berubah-

ubah, tetapi sesuai dengan syarat batasnya. Selama perpindahan maya ini semua gaya tetap dipegang konstan.

Sistem gaya pegas dengan derajat kebebasan gerak satu (gambar 3.5d) untuk menggambarkan sebuah struktur elastis, ke dalam sistem ini dimasukkan perpindahan maya dalam bentuk pertambahan deformasi δx ; maka pertambahan kerja dari pegas menjadi :

$$\delta W_i = -(k \cdot x_{\text{maks}}) \cdot \delta x = -P_{i, \text{maks}} \cdot \delta x \quad (3.6)$$

Dengan cara yang sama, pertambahan kerja yang dilakukan oleh gaya luar adalah:

$$\delta W_e = P_e \cdot \delta x \quad (3.7)$$

3.3 Metode Energi Pada Tekuk Lateral

Energi regangan yang tersimpan pada saat terjadi tekuk terdiri dari dua komponen, yaitu komponen lentur pada arah sumbu x dan y dan komponen puntir yang terdiri dari "torsi St. Venant" dan "torsi warping". Pada masalah tekuk balok ini, variasi energi dihitung setelah terjadi tekuk, dan energi akibat lentur y diabaikan (akibat M_x) :

$$U = \frac{1}{2} EI_y \int_0^l \left[\frac{d^2 x}{dz^2} \right]^2 dz + \frac{1}{2} GJ \int_0^l \left[\frac{d\phi}{dz} \right]^2 dz + \frac{1}{2} EI_w \int_0^l \left[\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right]^2 dz \quad (3.8)$$

3.3.1 Persamaan Differensial untuk Tekuk Lateral

Dengan mengacu Gambar 3.6, yang memperlihatkan balok dalam suatu posisi tertekuk, terlihat bahwa momen yang bekerja M_0 pada bidang yz akan meningkatkan komponen M_x' , M_y' , dan M_z' , masing-masing menurut sumbu x' , y' , dan z' . Ini berarti akan terdapat kurvatur lentur baik pada bidang $x'z'$ maupun

$y'z'$ serta kurvatur puntir menurut sumbu z' . Dengan asumsi deformasi kecil, lentur pada bidang $y'z'$ (dengan memperhitungkan kosinus arahnya adalah 1 antara sumbu-sumbu y' dan y , dan z' dan z) dapat ditulis :

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = M_{x'} = M_0$$

dimana v adalah perpindahan pada arah y (lihat Gambar 3.6b).

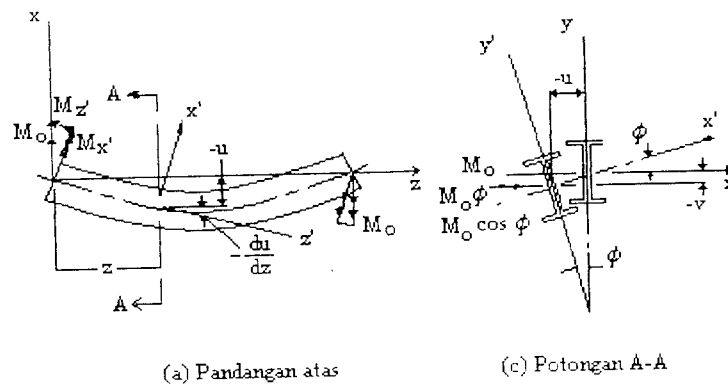
Demikian pula, kurvatur pada bidang $x'z'$ adalah :

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = M_{y'} = M_0 \cdot \phi$$

seperti terlihat dari Gambar 3.6c, dimana u merupakan pergeseran pada arah x .

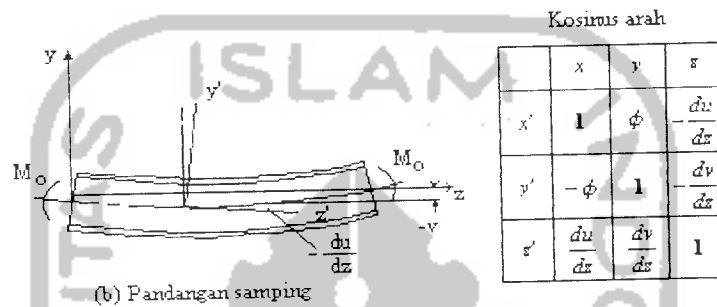
Dari Gambar 3.6 dan kosinus arahnya, komponen puntir dari M_0 ketika balok tersebut sedikit tertekuk adalah sebanding dengan putaran sudut balok dalam bidang xz :

$$M_{z'} = -\frac{du}{dz} M_0$$



(a) Pandangan atas

(c) Potongan A-A

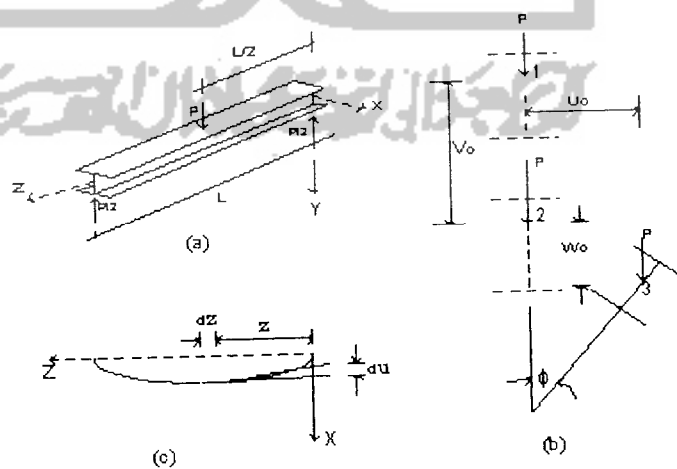


(b) Pandangan samping

Gambar 3.6 Balok Profil I Dalam Posisi yang Sedikit Tertekuk
(Struktur Baja Desain dan Perilaku 2, Salmon, C. G. & Johnson, J. E., 1996)

3.3.2 Persamaan Beban Terpusat Kritis

Energi potensial akibat beban luar P terpusat akan diturunkan sebagai berikut :



Gambar 3.7 Tekuk Lateral Balok I Akibat Beban Terpusat

M_x dan M_y adalah momen yang timbul akibat P. Energi tekuk dihitung untuk gerakan dari 2 ke 3 (gambar 3.7b), yaitu dengan komponen perpindahan u_0 dan w_0 (ditengah bentang). Dari gambar 3.7c terlihat untuk elemen sepanjang dz didapat persamaan :

$$\frac{du}{dz} = \frac{M_y'}{EI_y} \cdot z \quad \text{atau} \quad du = \frac{M_y'}{EI_y} \cdot z \cdot dz \quad (3.9)$$

Untuk kondisi deformasi kecil, pertambahan dari deformasi vertikal dw yang sehubungan dengan du adalah :

$$dw = \phi \cdot du = \frac{M_y'}{EI_y} \cdot \phi \cdot z \cdot dz \quad (3.10)$$

sehingga :

$$w_0 = \int_0^l dw = \int_0^l \frac{M_y'}{EI_y} \cdot \phi \cdot z \cdot dz$$

dengan M_y' adalah komponen vektor momen dari M_x .

$$M_y' = -\phi M_x = +\phi \frac{P \cdot z}{2}, \text{ sehingga } M_x = -\frac{P \cdot z}{2}$$

$$w_0 = \int_0^l \frac{\phi^2 \cdot P \cdot z^2}{2 \cdot EI_y} dz \quad (3.11)$$

dan didapat energi potensial akibat beban luar P terpusat :

$$V = -P \cdot w_0 = -\int_0^l \frac{P^2 \cdot \phi^2 \cdot z^2}{2 \cdot EI_y} dz \quad (3.12)$$

sehingga energi potensial total adalah :

$$\Pi = U + V = \int_0^l \frac{EI_y}{2} \left[\frac{d^2 u}{dz^2} \right]^2 dz + \int_0^l \frac{GJ}{2} \left[\frac{d\phi^2}{dz} \right]^2 dz + \int_0^l \frac{EI_\omega}{2} \left[\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right]^2 dz - \int_0^l \frac{P^2 \cdot z^2 \cdot \phi^2}{2EI_y} dz$$

$$\dots\dots\dots (3.13)$$

Hubungan antara u dan ϕ dicari dari persamaan differensial :

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_y' = \frac{P \cdot z \cdot \phi}{2}$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{P \cdot z \cdot \phi}{2 \cdot EI_y}$$

Jadi :

$$\Pi = U + V = - \int_0^L \frac{P^2 \cdot z^2 \cdot \phi^2}{4 \cdot EI_y} dz + \int_0^L \frac{GJ}{2} \left[\frac{d\phi}{dz} \right]^2 dz + \int_0^L \frac{EI_w}{2} \left[\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right]^2 dz$$

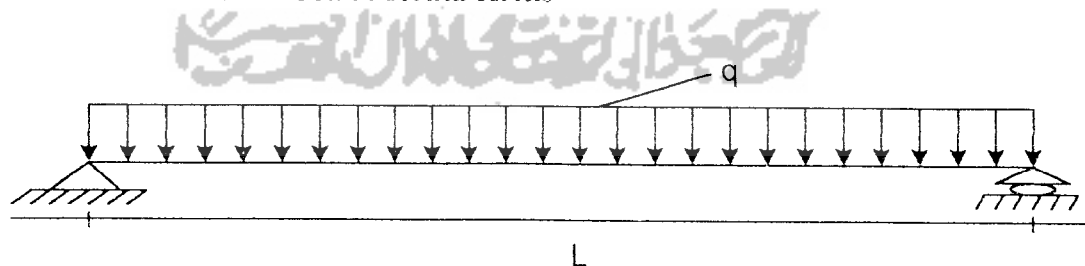
dengan ϕ adalah fungsi yang harus memenuhi kondisi batas, diambil

$$\phi = B \cdot \sin \frac{\pi z}{l}$$

Syarat agar struktur seimbang adalah $\frac{\partial \Pi}{\partial B} = 0$, dari sini didapatkan harga P kritis :

$$P_{cr} = \frac{4 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{3}{\pi^2 + 6} EI_y \left[GJ + EI_w \frac{\pi^2}{L^2} \right]} \quad (3.14)$$

3.3.3 Persamaan Beban Merata Kritis



$$M_x = \frac{q}{2} (z^2 - L \cdot z)$$

Misalkan : $u = A \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$

$$\phi = B \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

Energi regangan yang tersimpan dalam struktur adalah :

$$U = \frac{1}{2} EI_y \int_0^L \left[\frac{d^2 u}{dz^2} \right]^2 dz + \frac{1}{2} GJ \int_0^L \left[\frac{d\phi}{dz} \right]^2 dz + \frac{1}{2} EI_w \int_0^L \left[\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right]^2 dz$$

$$* \frac{1}{2} EI_y \int_0^L (u'')^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \cdot A \cdot \frac{\pi^4}{L^4} \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{EI_y \cdot \pi^4 \cdot A^2 \cdot L}{2 \cdot L^4} \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \frac{\pi z}{L} \right) dz$$

$$= \frac{EI_y \cdot \pi^4 \cdot A^2}{2 \cdot L^4} \left[\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2\pi} \sin 2 \frac{\pi z}{L} \right]_0^L$$

$$= \frac{EI_y \cdot \pi^4 \cdot A^2}{4 \cdot L^3}$$

$$* \frac{1}{2} EI_w \int_0^L (\phi'')^2 dz = \frac{1}{2} EI_w \int_0^L B^2 \cdot \frac{\pi^4}{L^4} \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{EI_w \cdot \pi^4 \cdot B^2}{4 \cdot L^3}$$

$$* \frac{1}{2} GJ \int_0^L (\phi')^2 dz = \frac{1}{2} GJ \int_0^L B^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{GJ \cdot B^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot L^2} \int_0^L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \frac{\pi z}{L} \right) dz$$

$$= \frac{GJ \cdot B^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot L} \left[\frac{1}{2} z + \frac{L}{4\pi} \sin 2 \frac{\pi z}{L} \right]_0^L$$

$$= \frac{GJ \cdot B^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot L}$$

Energi potensial akibat beban luar q merata,

$$U = \int_0^L M_v \cdot \phi \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} dz$$

$$= \int_0^L \frac{q}{2} [z^2 - L \cdot z] \cdot B \cdot \sin \frac{\pi z}{L} \cdot \left[-A \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sin \frac{\pi z}{L} \right] dz$$

$$= -\frac{q \cdot \pi^2}{2 \cdot L^2} \cdot A \cdot B \int_0^L [z^2 - L \cdot z] \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= -\frac{\pi^2 \cdot q}{2 \cdot L^2} \cdot A \cdot B \int_0^L z^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz + \frac{\pi^2 \cdot q}{2 \cdot L} \cdot A \cdot B \int_0^L z \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$* \int_0^L z^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = \int_0^L z^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2 \frac{\pi z}{L} \right] dz$$

$$= \frac{1}{6} \cdot L^3 - \frac{1}{2} \int_0^L z^2 \cdot \cos 2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2\pi} \cdot z^2 \cdot \sin 2 \frac{\pi z}{L} \Big|_0^L + \frac{L}{4\pi} \int_0^L 2 \cdot z \cdot \sin 2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{L^3}{6} - L^2 \cdot \frac{z}{4\pi^2} \cdot \cos 2 \frac{\pi z}{L} \Big|_0^L + \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L \cos 2 \frac{\pi z}{L} dz$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4\pi^2} + \frac{L^3}{8\pi^3} \cdot \sin 2 \frac{\pi z}{L} \Big|_0^L$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4\pi^2}$$

$$* \int_0^L z \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = \int_0^L z \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2 \frac{\pi z}{L} \right] dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{4} - \frac{1}{2} \int_0^L \cos 2 \frac{\pi z}{L} dz \\
&= \frac{L^2}{4} - \frac{L}{4\pi} \left[\sin 2 \frac{\pi z}{L} \right]_0^L + \frac{L}{4\pi} \int_0^L \sin 2 \frac{\pi z}{L} dz \\
&= \frac{L^2}{4\pi} - \frac{L}{8\pi^2} \left[\cos 2 \frac{\pi z}{L} \right]_0^L \\
&= \frac{L}{4} - \frac{L}{8\pi^2} (1-1) \\
&= \frac{L^2}{4}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh energi potensial :

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L^3}{2 \cdot L^2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right] + \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L^2}{2 \cdot L} \cdot \frac{L^2}{4} \\
&= \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right] + \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L}{8} \\
&= \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right]
\end{aligned}$$

Dan energi potensial total adalah :

$$\Pi = \frac{EI_y \cdot \pi^4 \cdot A^2}{4 \cdot L^3} + \frac{GJ \cdot \pi^2 \cdot B}{4 \cdot L} + \frac{EI_w \cdot \pi^4 \cdot B^2}{4 \cdot L^3} + \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot B \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right]$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{EI_y \cdot \pi^4 \cdot A}{2 \cdot L^3} + \frac{\pi^2 \cdot q \cdot B \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right]$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B} = \frac{\pi^2 \cdot q \cdot A \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] + \frac{GJ \cdot \pi^2 \cdot B}{2 \cdot L} + \frac{EI_w \cdot \pi^4 \cdot B}{2 \cdot L^3}$$

Determinan dari kedua persamaan ini harus sama dengan nol.

$$\begin{bmatrix} \frac{EI_y \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} & \frac{\pi^2 \cdot q \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] \\ \frac{\pi^2 \cdot q \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] & \frac{GJ \cdot \pi^2}{2 \cdot L} + \frac{EI_w \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI_y \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} \cdot \frac{\pi^2}{L} \left[GJ + EI_w \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \right] - \left\{ \frac{\pi^2 \cdot L}{8} \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] \right\}^2 = 0$$

$$\frac{\pi^2 \cdot q \cdot L}{8} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] = \frac{\pi^3}{2 \cdot L^2} \sqrt{EI_y \left[GJ + EI_w \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \right]}$$

$$q_{cr} = \frac{4 \cdot \pi}{\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \right] L^2} \sqrt{EI_y \left[GJ + EI_w \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \right]} \quad (3.15)$$

UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA