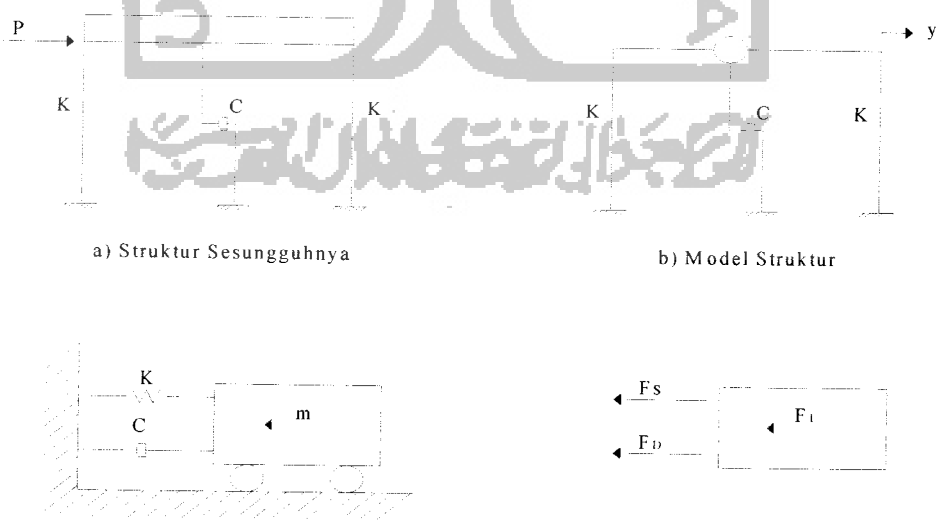
BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Struktur (SDOF) Akibat Gerakan Tanah

Indonesia merupakan wilayah yang sering terjadi gempa sehingga kita sebagai sipil engineer harus memperhitungkan pengaruh gempa dalam mendisain suatu bangunan. Gempa bumi menyebabkan permukaan tanah ikut bergetar dan getaran tersebut akan diteruskan ke semua benda yang dilaluinya termasuk struktur bangunan. Untuk menyatakan persaman gerakan massa akibat gerakan tanah khususnya pada struktur derajat kebebasan tunggal maka diambil notasi m, c, k dan y berturut-turut adalah masssa, koefisien redaman, kekakuan kolom, dan simpangan. Sedangkan notasi F_I, F_D, F_S berturut-turut adalah gaya momen inersia, gaya redaman dan gaya pegas, maka struktur SDOF akibat gerakan tanah dapat dimodelkan sebagai berikut :



a) Struktur Sesungguhnya b) Model Struktur

c) Model Matematika d) Free Body Diagram

Gambar 3.1 Pemodelan Struktur SDOF

Berdasarkan *free body diagram* seperti gambar diatas maka persamaan differensial gerakan tanah adalah :

$$m.\ddot{y}_1 + c.\dot{y}_1 + k.y_1 \tag{3.1}$$

Yang mana $\ddot{y}$, $\dot{y}$ dan y adalah simpangan , kecepatan dan percepatan

Untuk mengkombinasikan persamaan differensial gerakan massa akibat gerakan tanah ada dua alternatif, salah satunya dengan hubungan antara kecepatan dan simpangan absolut dengan kecepatan dan simpangan relatif :

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_b + \ddot{y}_1 \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_b + \dot{y} \qquad y_1 = y_b + y \tag{3.2}$$

dimana y_b, $\dot{y}_b$, $\ddot{y}_b$ adalah simpangan, kecepatan, percepatan tanah.

Dengan mendistribusikan persamaan di atas maka akan diperoleh :

$$m.(\ddot{y}_b + \ddot{y}) + c.(\dot{y}_b + \dot{y}) + k.(y_b + y) \tag{3.3}$$

$$m.\ddot{y}_1 + c.\dot{y} + k.y = -m.\ddot{y}_b - c.\dot{y}_b - k.y_b$$

Pada kondisi antara tanah dan lantai belum terjadi perbedaan simpangan maka peristiwa tersebut dinamakan *rigid body motion* dan persamaannya dapat ditulis sebagai berikut :

$$m.\ddot{y} + c.\dot{y} + k.y = -m.\ddot{y}_b \tag{3.4}$$

Dari rumus-rumus di atas maka diperoleh hubungan rumus-rumus sebagai berikut:

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \frac{c}{m} = 2\xi\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{(rad/dt)} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}\ \text{(dt)} \tag{3.5}$$

dimana : ξ = damping ratio (rasio redaman)

ω = angular frekuensi (kecepatan sudut)

T = Periode getar struktur

3.2 Massa Struktur

Struktur bangunan yang tinggi dapat saja terdiri atas struktur bangunan gedung bertingkat banyak. Masing-masing struktur tersebut mempunyai distribusi massa yang berbeda-beda. Pada struktur bangunan gedung, beban struktur lebih banyak terkonsentrasi pada masing-masing tingkat dan hanya relative sedikit/kecil beban yang secara langsung membebani kolom pada antar tingkat. Apabila terdapat beberapa derajat kebebasan pada setiap massa, maka secara teoritis struktur seperti itu akan mempunyai derajat kebebasan yang tak terhingga banyaknya atau disebut massa yang kontinyu sehingga pada struktur dengan derajat kebebasan banyak memerlukan penyederhanaan.

Terdapat dua pendekatan pokok yang umumnya dilakukan untuk mendeskripsikan massa struktur. Pendekatan pertama adalah system diskretisasi massa yaitu massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat tertentu. Apabila prinsip bangunan geser *(shear building)* dipakai maka setiap massa hanya akan bergerak secara horizontal. Karena percepatan hanya terjadi pada struktur yang mempunyai massa maka matriks massa merupakan matriks diagonal.

Pendekatan yang kedua adalah menurut prinsip *consistent mass matrix* yang mana elemen struktur akan berdeformasi menurut bentuk fungsi *(shape function)* tertentu. Apabila tiga derajat kebebasan (horizontal, vertical, dan rotasi) diperhitungkanpada setiap node maka standar *consistent mass matrix* dapat diperoleh dengan *off-diagonal* matriks tidak sama dengan nol sebagaimana terjadi pada prinsip *lumped mass.*

Untuk menghitung massa baik yang *single lumped mass* maupun *multiple lumped mass* maka dapat dipakai formulasi sederhana (Respon Dinamik Struktur Elastis, Widodo, 2001) yaitu :

$$m = \frac{W}{g} \tag{3.6}$$

yang mana W adalah berat dan g adalah percepatan gravitasi.

3.3 Kekakuan Struktur

Kekakuan adalah salah satu dinamik karakteristik struktur bangunan yang sangat penting disamping massa bangunan. Antara massa dan kekakuan struktur akan mempunyai hubungan yang unik yang umumnya disebut karakteristik diri atau *Eigenproblem* . Hubungan tersebut akan menentukan nilai frekuensi sudut ω_i dan periode getar struktur T_i. Kedua nilai ini merupakan parameter yang sangat penting dan sangat mempengaruhirespon dinamik struktur. Oleh karena itu pemodelan struktur dalam menghitung kekakuan tingkat sangat diperlukan.

Pada prinsip bangunan geser *(shear building)* balok lantai tingkat dianggap tetap horizontal baik sebelum maupun setelah terjadi penggoyangan. Adanya plat lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok sehingga anggapan tersebut tidak terlalu kasar. Plat dan balok lantai yang kaku dan tetap horizontal sebelum dan sesudah penggoyangan juga berarti bahwa balok mempunyai kekakuan tak terhingga . Pada prinsip desain bangunan tahan gempa dikehendaki agar kolom lebih kuat dibanding dengan balok *(strong column weak beam)*, namun demikian rasio tersebut tidak selalu linier dengan kekakuannya . Dengan prinsip shear building maka dimungkinkan pemakaian *lumped mass model*. Pada prinsip ini, kekakuan setiap kolom dapat dihitung dengan rumus standar (Respon Dinamik Struktur Elastis, Widodo, 2001) sebagai berikut :

$$K = \frac{12EI}{H^3} \tag{3.7}$$

Dimana, K = kekakuan kolom (kg/cm)

E = Modulus Elastis (2.10^5 kg/cm^2)

I = Momen Inersia (cm^4)

H = tinggi tingkat (cm)

Dengan melihat data struktur maka kekakuan dihitung secara paralel yaitu kekakuan tiap tingkat (K_t) merupakan jumlah total dari kekakuan kolom tiap tingkat (K_c), secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$K_t = \sum K_c \tag{3.8}$$

Pada prinsipnya semakin kaku balok maka semakin besar kemampuannya dalam mengekang rotasi ujung kolom, sehingga akan menambah kekakuan kolom. Pada prinsip Muto (1975), kekakuan joint juga dapat diperhitungkan sehingga hitungan kekakuan baik kekakuan balok maupun kekakuan kolom akan menjadi lebih teliti.

3.4 Redaman Struktur

Redaman merupakan peristiwa pelepasan energi *(energy dissipation)* oleh suatu struktur akibat adanya berbagai macam sebab. Beberapa penyebab itu diantaranya adalah pelepasan energi oleh adanya gerakan antara molekul di dalam material, pelepasan energi oleh gesekan alat penyambung maupun sistem dukungan, pelepasan energi akibat gesekan dengan udara dan pada respon inelastik pelepasan energi juga terjadi karena adanya rotasi sendi plastis. Karena redaman berfungsi melepaskan energi, maka hal tersebut akan mengurangi respon struktur.

Untuk memodel kemampuan struktur melepaskan energi, maka besaran yang dipakai umumnya adalah rasio redaman *(damping ratio)* ξ. Nilai rasio redaman untuk berbagai macam material dan tingkat respon struktur seperti pada *Respon Dinamik Struktur* (Widodo,2001, sumber : Newmark N.M, Hall W. J 1982). Untuk memperoleh redaman ada tiga cara yang dapat digunakan, yaitu :

1. Redaman proporsional dengan massa *(mass proportional damping)*
2. Redaman proporsional dengan kekakuan *(stiffness proportional damping)*
3. Redaman proporsional dengan massa dan kekakuan *(mass and stiffness proportional damping).*

Tetapi dalam penelitian ini, kami mengabaikan besarnya nilai redaman (c) namun tetap memperhitungkan nilai rasio redaman *(damping ratio)* ξ.

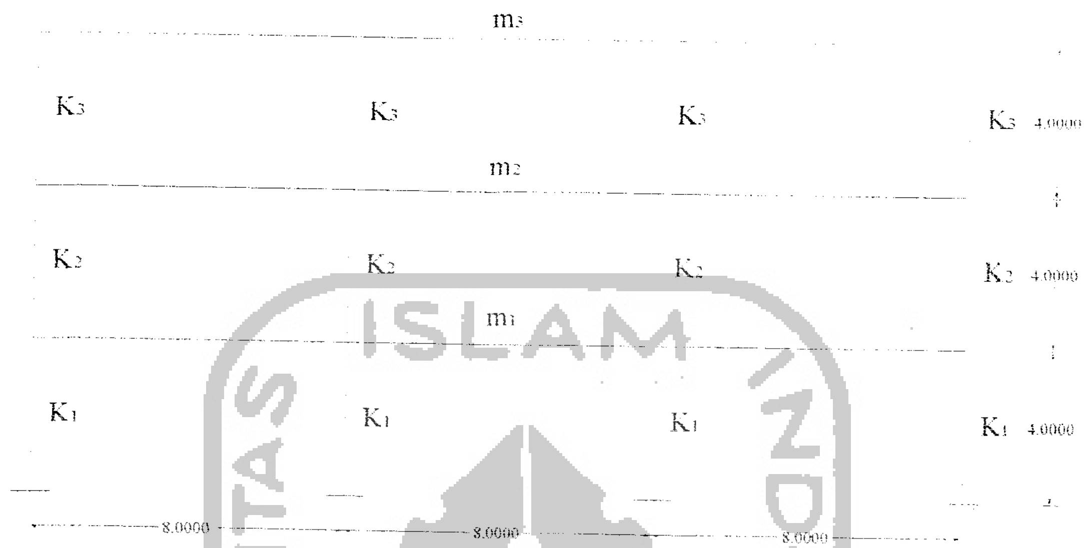
3.5 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Pada kenyataan di lapangan tidak semua struktur dapat dinyatakan dalam system derajat kebebasan tunggal atau *Single Degree of Freedom* (SDOF). Banyak bangunan justru mempunyai derajat kebebasan banyak atau *Multi Degree of Freedom* (MDOF).

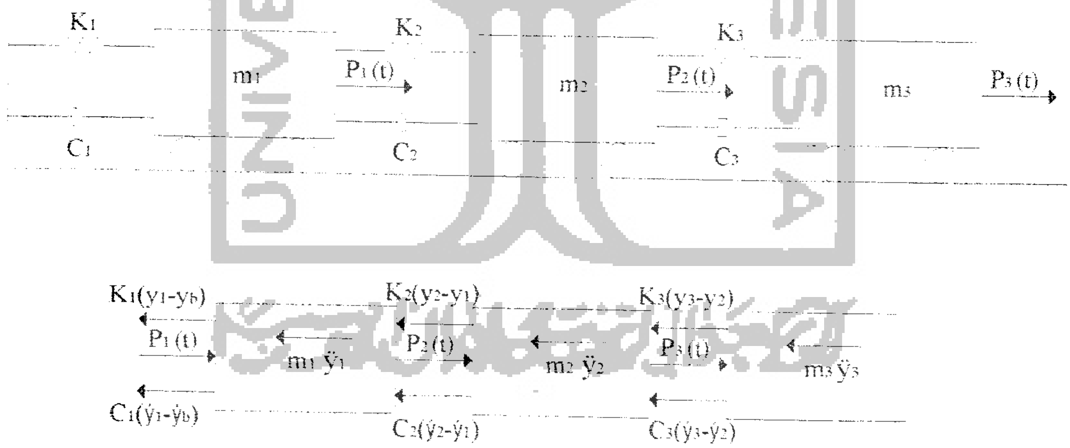
Dengan peningkatan jumlah derajat kebebasan dan peningkatan jumlah variable yang diakibatkan oleh koefisien dan suku-suku yang bersangkutan, sehingga hubungan persamaan-persamaan menjadi semakain tidak praktis. Untuk menyatakan persamaan differensial gerakan pada struktur dengan derajat kebebasan banyak maka dipakai anggapan dan pendekatan seperti pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF). Anggapan seperti prinsip *shear building* masih berlaku pada struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF). Untuk memperoleh persamaan defferensial tersebut maka tetap dipakai prinsip keseimbangan dinamik *(dynamic equilibrium)* pada suatu massa yang ditinjau serta menggunakan pendekatan massa struktur yang digumpalkan pada setiap lantai *(lumped mass)*.

Untuk mendapatkan persamaan yang diinginkan tersebut maka diambil model struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF). Model ini ada dua tipe yaitu struktur tipikal dan struktur dengan menggunakan setback.

Sebagai contoh kami ambil model struktur MDOF seperti gambar di bawah ini:



Gambar. 3.2 Struktur dengan 3 DOF



Gambar. 3.3 Free Body Diagram

Bangunan di atas mempunyai derajat kebebasan 3 karena sering kali derajat kebebasan dihubungkan secara langsung dengan jumlahnya tingkat. Persamaan differensial gerakan tersebut umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut first mode atau mode pertama. Berdasarkan pada keseimbangan dinamik pada *free body diagram* gambar 3.3 maka akan diperoleh :

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + c_1\dot{y}_1 - k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - P_1(t) = 0\\
&m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_3(y_3 - y_2) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - P_2(t) = 0\\
&m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - P_1(t) = 0
\end{aligned}
\qquad (3.9)
$$

Pada persamaan-persamaan diatas tampak bahwa keseimbangan dinamik suatu massa yang ditunjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman, dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat seperti itu disebut *coupled equation* Karena persamaan-persamaan tersebut akan bergantung satu sama lain. Penyelesaian dari persaman *coupled* harus dilakukan secara simultan yaitu dengan melibatkan semua persamaan yang ada. Pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan differensial gerakannya merupakan persamaan *dependent* atau *coupled* antara satu dengan yang lain.

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = P_1(t)\\
&m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3\dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = P_2(t)\\
&m_3\ddot{y}_3 - c_3\dot{y}_2 + c_3\dot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = P_3(t)
\end{aligned}
\qquad (3.10)
$$

Persaman tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0\\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3\\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t) \end{Bmatrix}
\qquad (3.11)
$$

3.6 Getaran Bebas pada Struktur Derajat Kebebasan Banyak

Secara umum gerakan massa suatu struktur dapat disebabkan oleh adanya gangguan beban dari luar, seperti angin, putaran mesin ataupun gempa. Peristiwa gerakan massa akibat adanya simpangan awal y_o (dapat juga kecepatan awal) seperti itu biasa disebut dengan getaran bebas *(free vibration system)*.

Membahas getaran bebas pada struktur derajat kebebasan banyak akan diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat. Karakter-karakter itu adalah frekuensi sudut (ω), periode getar (T), frekuensi (f) *dan normal modes*. Pembahasan getaran bebas ini masih diikuti dengan penyederhanaan permasalahan yaitu menganggap struktur tidak mempunyai redaman *(undamped system)*. Dengan anggapan tersebut penyelesaian masalah menjadi lebih sederhana.

3.7 Nilai Karakteristik (*Eigen problem*)

Getaran bebas *(free vibration system)* pada kenyataannya jarang terjadi pada struktur MDOF, tetapi membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran/karakteristik dari struktur yang bersangkutan yang selanjutnya akan sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya. Besaran-besaran tersebut terutama adalah frekuensi sudut ω, periode getar T, frekuensi alam f dan normal medes.

Pada getaran bebas di struktur yang mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF), maka matriks persamaann diferensial gerakannya adalah sebagai berikut :

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \qquad (3.12)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman *(damped ferkuensy)* ω_d nilanya hamper sama dengan frekuensi sudut pada sturktur yang dinggap redaman ω. Hal ini akan diperoleh apabila nilai damping ratio ξ relatif kecil. Apabila hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat banyak , maka untuk nilai c=0 sehingga persamaan menjadi :

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{3.13}$$

Karena persamaan di atas adalah persamaan diferensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman, maka sebagaimana penyelesaian persamaan diferensial yang sejenis persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonic menurut bentuk:

$$\begin{aligned} y &= \{\phi\}_i \sin(\omega t) \\ \dot{y} &= \omega\{\phi\}_i \cos(\omega t) \\ \ddot{y} &= -\omega^2\{\phi\}_i \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Yang mana $\{\phi\}_i$ adalah suatu ordinat massa pada mode yang ke-i. Dengan mensubtitusi persamaan di atas maka diperoleh.

$$\begin{aligned} -\omega^2[M]\{\phi\}_i \sin(\omega t)+[K]\{\phi\}_i \sin(\omega t) &= 0 \\ \{[K]-\omega^2[M]\}\{\phi\}_i &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Hasil di atas disebut *Eigenproblem* atau karakteristik problem atau ada juga yang menyebut eigenproblem / persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya. Salah satu cara yang dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan simultan tersebut adalah dengan memakai dalil *Cramer*. Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor $\{\phi\}_i$ adalah nol sehingga:

$$|[K]-\omega^2[M]| = 0 \tag{3.16}$$

Jumlah mode pada struktur dengan derajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. Mode itu senidiri adalah jenis/pola/ragam getaran/goyangan suatu struktur bangunan. Mode ini hanya merupakan fungsi dari property dinamik dari struktur yang bersangkutan (dalam hal ini adalah hanya massa dan kekakuan tingkat) dan bebas dari pengaruh waktu dan frekuensi getaran.

3.8 Normal Modes

Setiap struktur yang dibebani dengan beban dinamik akan mengalami goyangan. *Normal modes* adalah ragam/pola goyangan

Untuk struktur bangunan gedung yang hanya mempunyai 2 tingkat atau struktur yang memiliki 2 derajat kebebasan maka dalam menghitung ordinat-ordinat normal modes masih dapat dicari dengan menggunakan determinan (*metode Crammer*),karena matriks 2x2 masih dapat dihitung dengan mudah. Namun untuk bangunan yang lebih tinggi akan mengalami kesulitan dalam menghitung nilai determinan tersebut (secara manual).

Untuk mencari nilai-nilai ordinat di dalam normal modes ini menggunakan metode Polinomial.

3.8.1 Metode Polinomial

Metode ini pada dasarnya masih menggunakan persamaan eigenproblem. Untuk mencari /menghitung eigenvalues(nilai-nilai frekuensi sudut)tidak lagi dipakai cara determinan. Cara yang dipakai adalah dengan menstransfer persamaan simultan Eigen problem menjadi suatu persamaan polynomial berpangkat banyak. Akar-akar persamaan polynomial tersebut yang akan yang akan dicari yang seterusnya akan menghasilkan nilai-nilai Eigenvector.

Seperti sebelumnya maka persamaan diferensial gerakan dapat diperoleh dengan memperhatikan freebody diagram.

Berdasarkan keseimbangan gaya-gaya pada *free body diagram* maka dapat disusun persamaan diferensial simultan gerakan massa, yaitu :

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) &= 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) &= 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 &= 0 \\ m_2\ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 &= 0 \\ m_3\ddot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3-\omega^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\dfrac{\omega^2}{k\ m_1} & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\dfrac{\omega^2}{k\ m_2} & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3-\dfrac{\omega^2}{k\ m_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.21)$$

Diambil suatu notasi bahwa,

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\frac{k}{m}}$$

Maka persamaan (3.21) akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\lambda_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\lambda_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.22)$$

Persamaan (3.22) tersebut dapat disederhanakan menjadi 3 persemaan baru, yaitu:

$$((k_1+k_2)-m_1\lambda)\phi_1 - k_2\phi_2 = 0$$

$$-k_2\phi_2 + ((k_2+k_3)-\lambda_1)\phi_2 - k_3\phi_3 = 0 \qquad (3.23)$$

$$-k_3\phi_2 + (k_3-\lambda_3)\phi_3 = 0$$

Dengan mengambil nilai ϕ_1=0 kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.23) maka akan mendapatkan 3 bentuk persamaan polinomial pangkat 3 atau pangkat n (n= jumlah tingkat). Dari akar-akar persamaan tersebut akan didapatkan nilai ω, ϕ dengan menggunakan rumus seperti di atas.

3.9 Hubungan Orthogonal

Mode shape seperti yang telah dibahas diperoleh dengan suatu anggapan bahwa struktur tidak mempunyai redaman atau *undamped free vibration system*. Padahal struktur yang sesungguhnya selalu mempunyai redaman walaupun nilainya relative kecil. Dengan demikian *mode shape* yang diperoleh merupakan suatu pendekatan. Namun demikian *mode shape* hasil pendekatan ini akan sangat bermanfaat terhadap penyelesaian problem analisis dinamik struktur selanjutnya.

Sebagaimana salah satu contoh ,manfaat yang diperoleh dengan diketahuinya *mode shape* adalah hubungan *orthogonal* ,yaitu hubungan unik yang sangat bermanfaat untuk menyelesaikan problema mendatang. Hubungan *orthogonal* tersebut dapat diketahui dengan menggunakan persamaan *eigenproblem* sebagai berikut :

$$\{[K]-\omega^2[M]\}\{\phi\}=0 \qquad (3.24)$$

Orthogonalitas untuk redaman tidak banyak diketahui karena persoalan redaman memang masih relative rumit jika dibandingkan dengan massa struktur dan kekakuan tingkat. Karena keterbatasan tersebut maka diambil suatu asumsi bahwa redaman juga mempunyai sifat orthogonal sebagaimana massa dan kekakuan, sehingga:

$$\{\phi\}_i^T[C]\{\phi\}_j=0 \qquad (3.25)$$

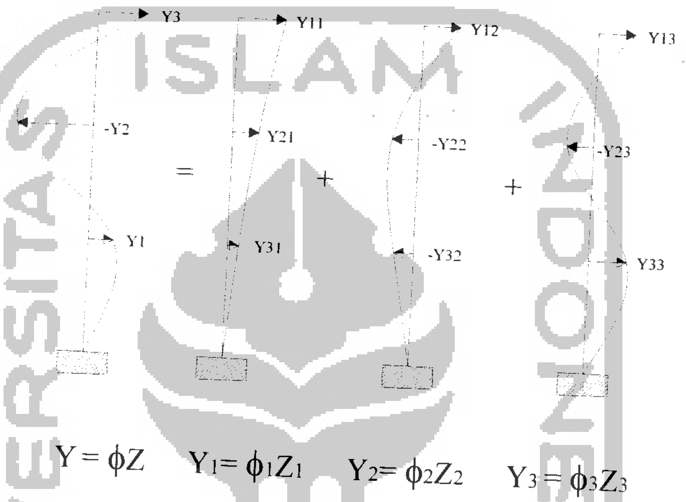
3.10 Modal Analisis (Mode Superposition Methods)

Modal analisis merupakan salah satu metode yang dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan diferensial gerakan pada struktur bangunan derajat kebebasan (MDOF). Metode ini digunakan khusus untuk menyelesaikan problem dinamik dengan beberapa syarat tertentu. Syarat-syarat tersebut diantaranya adalah bahwa respon struktur masih elastic dan struktur mempunyai standar *mode shape*. Respon elastikberarti bahwa tegangan bahan belum mencapai tegangan leleh dan implikasinya kekakuan struktur tidak mengalami perubahanselama pembebanan. Selain itu juga tidak mengalami perubahan massa dan koefisien redaman. Struktur yang mempunyai standar *mode shape* adalah struktur elastic dan struktur yang tidak memperhitungkan interaksi antara tanah dengan pondasi struktur. Ini berarti bahwa bangunan dianggap dijepit pada dasarnya

Penyelesaian persamaan diferensial gerakan struktur MDOF dengan cara ini, pertama-tama mencari nilai-nilai koordinat mode shape ϕ_{ij}. Dengan memakai prinsip-prinsip hubungan orthogonal maka persamaan diferensial *coupling* (*dependent*) dapat ditransfer menjadi persamaan diferensial yang *uncoupling* (*independent*). Maka penyelesaian persamaan akan lebih mudah karena setiap persamaan untuk massa dan mode tertentu akan saling independent terhadap persamaan yang lainnya.

Simpangan struktur total merupakan kontribusi dari respon setiap mode (*modal displacement*) yang dapat dihitung dengan integrasi numerikatas persamaan independent seperti yang telah disampaikan di atas. Apabila simpangan untuk setiap

$$[Y]=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1n}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2n}\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \cdots & \phi_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ \cdots\\ Z_n\end{Bmatrix} \tag{3.27}$$



Gambar 3.4 Prinsip Metode Superposisi

Suku pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai suku ke-n pada ruas kanan pers. (3.26) di atas adalah kontribusi mode pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai kontribusi mode ke-n. Sebagai perjanjian, massa struktur MDOF diberi indeks m_i dengan i = 1, 2, 3, … m, sedangkan *mode* diberi indeks ϕ_j dengan j = 1, 2, 3, … n. Dengan demikian notasi umum mode shape ϕ_{ij} adalah ordinat mode ke-j untuk massa ke-i.

Pers. (3.27) tersebut dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana,

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\} \tag{3.28}$$

Derivatif pertama dan kedua pers. (3.28) tersebut adalah,

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\}$$
$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\} \qquad (3.29)$$

Substitusi pers. (3.28) dan (3.29) kedalam pers. (3.26), maka akan diperoleh,

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\phi]\{\dot{Z}\} + [K][\phi]\{Z\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_t \qquad (3.30)$$

Pers (3.30) sebetulnya adalah 1 set persamaan simultan dependen non-homogen. Untuk dapat mentransfer persamaan dependen menjadi persamaan independent, maka pers. (3.30) di-premultiply dengan transpose suatu mode $\{\phi\}^T$ sehingga diperoleh,

$$\{\phi\}^T[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + \{\phi\}^T[C][\phi]\{\dot{Z}\} + \{\phi\}^T[K][\phi]\{Z\} = -\{\phi\}^T[M]\{1\}\ddot{y}_t \qquad (3.31)$$

Untuk pembahasan awal akan ditinjau pengaruh mode ke-1 saja. Misalnya diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka perkalian suku pertama pers. (3.31) sebenarnya adalah berbentuk,

$$\{\phi_{11}\phi_{21}\phi_{31}\}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.32)$$

Menurut contoh sebelumnya telah terbukti bahwa hubungan orthogonal akan terbukti apabila i tidak sama dengan j. Dengan demikian untuk mode ke-1 pers. (3.32) akan menjadi,

$$\{\phi_{11}\phi_{21}\phi_{31}\}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix}\ddot{Z}_1 \qquad (3.33)$$

Untuk mode ke-j maka secara umum persamaan (3.33) juga dapat ditulis sebagai berikut,

$$\{\phi\}_j^T [M]\{\phi\}_j \ddot{Z}_j \qquad (3.34)$$

Cara seperti di atas juga berlaku untuk suku ke-2 dan ke-3 pada persamaan (3.29). Dengan demikian setelah diperhatikan hubungan orthogonal pers. (3.31) akan menjadi,

$$\{\phi\}_j^T [M]\{\phi\}_j \ddot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [C]\{\phi\}_j \dot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [K]\{\phi\}_j Z_j = -\{\phi\}_j^T [M]\{1\} \ddot{y}_t \qquad (3.35)$$

Persamaan (3.35) adalah persamaan deferensial yang bebas/*independent* antara satu dengan yang lainnya. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkannya hubungan *orthogonal*, baik orthogonal untuk matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan. Sekali lagi bahwa apabila i tidak sama dengan j maka perkalian suku-suku pada pers. (3.31) akan sama dengan nol, kecuali untuk i = j. Dengan demikian untuk n-derajat kebebasan dengan n-persamaan diferensial yang dahulunya bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent uncoupling*. Dengan sifat-sifat seperti itu maka penyelesaian persamaan diferensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh mode.

Berdasarkan pers. (3.35) maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass*), redaman dan kekakuan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} M_j^* &= \{\phi\}_j^T [M]\{\phi\}_j \\ C_j^* &= \{\phi\}_j [C]\{\phi\}_j \\ KC_j^* &= \{\phi\}_j^T [K]\{\phi\}_j \end{aligned} \qquad (3.36)$$

mode pada massa tertentu sudah diperoleh maka simpangan total massa yang bersangkutan merupakan superposisi atau penjumlahan dari simpangan tiap-tiap mode tersebut. Simpangan massa yang lain dapat dicari dengan cara yang sama.

3.10.1 Persamaan Diferensial Independen (*Uncoupling*)

Pada kondisi standar *shear building*, struktur yang mempunyai n-derajat kebebasan akan mempunyai n-*modes* atau n-pola/ragam goyangan. Pada prinsip ini, masing-masing *modes* akan memberikan kontribusi pada simpangan horizontal tiap-tiap massa seperti ditunjukkan secara visual pada gambar 3.4 Disamping itu, simpangan massa ke-i atau Y_i dapat diperoleh denagan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap *modes*. Kontribusi massa ke-j terhadap simpangan horizontal massa ke-i tersebut dinyatakan dalam produk antara ϕ_{ij} dengan suatu modal amplitude Z_j atau seluruh kontribusi tersebut kemudian dinyatakan dalam,

$$Y_1 = \phi_{11}Z_1 + \phi_{12}Z_2 + \phi_{13}Z_3 + \ldots + \phi_{1n}Z_n$$

$$Y_2 = \phi_{21}Z_1 + \phi_{22}Z_2 + \phi_{23}Z_3 + \ldots + \phi_{2n}Z_n$$

$$Y_3 = \phi_{31}Z_1 + \phi_{32}Z_2 + \phi_{33}Z_3 + \ldots + \phi_{3n}Z_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.26)$$

$$Y_n = \phi_{n1}Z_1 + \phi_{n2}Z_2 + \phi_{n3}Z_3 + \ldots + \phi_{nn}Z_n$$

dapat juga ditulis menjadi bentuk matrik sebagai berikut, Misalnya bangunan bertingkat tiga (3), maka orde perkalian matriks pada pers. (3.36) adalah 1x3 x 3x3 x 3x1 = 1x1. Arti pers. (3.36) adalah satu persamaan independent untuk mode ke-j. Dengan demikian dengan memakai pers. (3.36) maka pers. (3.35) akan menjadi,

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \ddot{y}_t \qquad (3.37)$$

dengan,

$$P_j^* = \{\phi\}_j^T [M]\{1\} \qquad (3.38)$$

Pada pembahasan sebelumnya diperoleh suatu hubungan bahwa,

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}} = \frac{C_j^*}{2M_j^*\omega_j}, \text{ maka } \frac{C_j^*}{M_j^*} = 2\xi_j\omega_j$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \text{ dan } \Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} \qquad (3.39)$$

Dengan hubungan-hubungan seperti pada pers. (3.39) tersebut, maka pers. (3.37) akan menjadi,

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j \ddot{y}_t \qquad (3.40)$$

$$\Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\phi\}_j^T[M]\{1\}}{\{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\phi_j m_i}{\sum_{i=1}^{m}\phi_j^2 m_i} \qquad (3.41)$$

Pers. (3.41) sering disebut dengan partisipasi setiap mode atau *mode participation factor*. Selanjutnya pers. (3.40) juga dapat ditulis menjadi,

$$\frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j} + 2\xi_j\omega_j\frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} + \omega_j^2\frac{Z_j}{\Gamma_j} = -\ddot{y}_t \qquad (3.42)$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa,

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j}, \quad \dot{g}_j = \frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j}, \text{ dan } g_j = \frac{Z_j}{\Gamma_j}, \tag{3.43}$$

Maka pers. (3.42) akan menjadi,

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_t \tag{3.44}$$

Pada integrasi numerik persamaan diferensial yang dimaksud adalah:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_j y + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_t \tag{3.45}$$

Pers. (3.44) adalah persamaan diferensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode. Pers. (3.44) adalah mirip dengan persamaan diferensial SDOF seperti yang telah dibahas sebelumnya.

Nilai yang dicari adalah nilai g_j yangmana j merupakan suatu mode. Untuk menyelesaikan persamaan differensial tersebut dipakai metode Central Difference, maka proses integrasinya adalah sebagai berikut,

$$\dot{g}_j = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} \quad \text{dan} \quad \ddot{g}_j = \frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} \tag{3.46}$$

Substitusi persamaan (3.46) kedalam persamaan (3.45) akan diperoleh,

$$\frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi\omega_i \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta t} + \omega_i^2 g_i = -\ddot{y}_t \tag{3.47}$$

Persamaan (3.47) dapat ditulis menjadi,

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi\omega_j}{2\Delta t}\right] g_{i+1} = -\ddot{y}_t - \left[\omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2}\right] g_i - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi\omega_j}{2\Delta t}\right] g_{i-1} \tag{3.48}$$

Persamaan (3.48) dapat ditulis menjadi

$$g_{i+1} = \frac{-\ddot{y}_i - a.g_i - b.g_{i-1}}{\hat{k}} \tag{3.49}$$

Dimana,

$$\begin{aligned} a &= \left[\omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2}\right] \\ b &= \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi\omega_j}{2\Delta t}\right] \\ \hat{k} &= \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi\omega_j}{2\Delta t}\right] \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode ϕ_{ij} telah diperoleh. Nilai g_j, g_j dan g_j dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai Z_j dapat dihitung. Dengan demikian simpangan horizontal setiap tingkat akan dapat dihitung.

Untuk bangunan dengan struktur setback vertikal cara penyelesaiannya maupun rumus-rumus yang digunakan sama seperti di atas.

3.11 Pengertian Bangunan Setback

Bangunan dengan struktur setback adalah bangunan dengan bentuk tingkat atas dan tingkat di bawahnya tidak sama atau disebut juga loncatan bidang muka, misalnya bentuk tingkat bawah lebih besar daripada diatasnya. Pada bangunan setback berpengaruh pada kekakuan dan massanya, sehingga terdapat perbedaan antara bangunan setback dengan bangunan yang tipikal.

Perlakuan bangunan menggunakan setback memang jarang dibahas sehingga tidak ada peraturan yang mengaturnya.

3.12 Jenis-jenis Setback

Jenis-jenis bangunan setback ada dua macam yaitu : bangunan setback secara horizontal dan setback secara vertical. Pada dasarnya perbedaannya adalah loncatan muka lantainya, pada setback vertikal loncatan muka lantai juga secara vertikal sedangkan pada setback horizontal loncatan muka lantainya secara horizontal.

3.13 Prinsip Sistem Setback

Prinsip kerja pada bangunan setback memang sedikit dibahas. Pada bangunan setback terjadi loncatan muka lantai sehingga berpengaruh pada kekakuan bangunan. Karena kekakuan berubah tidak seperti bangunan tipikal maka ini juga akan berpengaruh pada respon struktur bangunan setback terhadap gempa.

Pada bangunan setback kekakuan antar tingkat berubah sehingga *mode-mode* yang terbentuk berbeda jika dibandingkan dengan bangunan tipikal.

3.14 Respons Struktur

Setiap struktur bangunan mempunyai respons struktur yang berbeda-beda dalam menerima getaran, baik itu getaran tanah akibat gempa maupun oleh benda-benda lainnya misalnya generator ataupun pemancangan suatu tiang-tiang pancang. Pada umumnya respons struktur tersebut digunakan sebagai tinjauan dalam menilai keefektifan suatu struktur bangunan. Respons-respons struktur bangunan tersebut dapat berupa simpangan struktur, simpangan antar tingat (*Interstorey Drift*), gaya horizontal tingkat, gaya horizontal tingkat kumulatif serta momen guling.

3.14.1 Simpangan Struktur

Simpangan struktur yang terjadi ada 3 macam yaitu simpangan absolute, simpangan relative dan simpangan antar tingkat (*interstorey drift*). Simpangan yamg digunakan dalam penelitian ini adalah simpangan relative dan simpangan antar tingkat (*interstorey Irift*) adalah sebagai berikut :

a) Simpangan

Simpangan relative yang biasa disebut dengan nama simpangan saja pada setiap lantai menurut persamaan differensial independent (uncoupling) adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh kontribusi tiap-tiap mode :

$$Y_j = \sum_{j=1}^{n} [\Phi_n Z_1] \tag{3.51}$$

b) Simpangan Antar Tingkat (*Interstorey Drift*)

Untuk menghitung simpangan antar tingat (*Interstorey Drift*) pada struktur dengan cara mengurangi simpangan relative lantai atas terhadap lantai dibawahnya.

$$\Delta y = \frac{y_j(t) - y_{j-1}(t)}{h} \times 100\% \tag{3.52}$$

3.14.2 Gaya Horizontal Tingkat (F) dan Gaya Horizontal Tingkat Kumulatif/Gaya Geser (V)

Gaya horizontal tingkat sering dipakai dalam analisis struktur, karena gaya horizontal tingkat akan meyebabkan rotasi pada penampang horizontal lantai yang nantinya akan berpengaruh pada besarnya gaya geser dasar dan momen guling struktur *(overturning moment)*. Gaya geser tingkat mode ke-j (Respon Dinamik Struktur Elastis, Widodo, 2001) adalah :

$$F_j = k_j . y_j \tag{3.53}$$

Dimana rumus gaya geser total (V) adalah :

$$V_j = \sum_{j=1}^{n} F_j \tag{3.54}$$

3.14.3 Momen Guling *(Overturning Moment)*

Momen guling didapat denagn mengalikan gaya lantai yang terjadi pada setiap tingkat (F_j) dengan jarak (h_j), maka :

$$M_j = \sum_{j=1}^{n} F_j H_j \tag{3.55}$$

3.15 Struktur dengan Menggunakan Setback

Bangunan menggunakan setback adalah bangunan dengan loncatan bidang muka. Bentuk Bangunan setback sangat bervariasi karena setback terdapat dua macam yaitu setback secara horizontal dan setback vertikal . Namun pada penelitian ini kami mengkhususkan pembahasan pada bangunan setback vertikal.

Oleh karena pada bangunan setback terdapat loncatan muka lantai sehingga bagian lantai yang mengalami loncatan muka akan terjadi perubahan nilai kekakuan (k) serta massa struktur (m). Perubahan nilai kekakuan dan massa struktur tersebut akan sangat berpengaruh terhadap nilai *mode shape, simpangan relative, interstoreydrift, gaya geser tingkat* serta *momen guling*. Selain itu berpengaruh pula terhadap besarnya perubahan simpangan (y) yang tersebut pada persamaan (3.51), simpangan antar tingkat (*interstorey drift*) yang tersebut pada persamaan (3.52), gaya horizontal tingkat (F_j) seperti yang tersebut dalam persamaan (3.53), gaya geser (V) yang tersebut pada persamaan (3.54) dan momen guling (M) seperti yang tersebut pada persamaan (3.55), dan juga Modal Effective Weight (E_w) seperti yang tersebut pada persamaan (3.56) serta Modal Effective Mass (E_m) seperti yang tersebut pada persamaan (3.57).

Modal Effective Weight untuk mode ke-j (Ew_j) menurut buku Respon Dinamik Struktur Elastis (Widodo, 2001) dapat dinyatakan dalam,

$$Ew_j = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{m} W_i \phi_{ij}\right\}^2}{\sum_{i=1}^{m} W_i \phi_{ij}^2} \qquad (3.56)$$

Modal Effective Mass mode ke-j (Em_j) dapat ditulis dengan persamaan sebagai berikut,

$$Em_j = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{m} m_i \phi_{ij}\right\}^2}{\sum_{i=1}^{m} m_i \phi_{ij}^2} \qquad (3.57)$$

Modal Effective Weight (Ew_i) serta Modal Effective Mass (Em_i) merupakan suatu parameter untuk menentukan hanya berapa mode yang boleh dipakai pada analisis respon struktur akibat adanya beban gempa. Menurut buku "Peraturan Perencanaan Tahan Gempa Indonesia Untuk Gedung" (PPTGIUG) 1983, menyatakan bahwa jumlah mode minimum yang harus dipakai untuk menghitung respon struktur adalah paling tidak telah memberikan 90% dari energi gempa. Sebagaimana diketahui bahwa mode-mode yang lebih tinggi relatif sulit dicari tapi kontribusinya terhadap respon struktur relatif rendah. Oleh karena itu kontribusi mode-mode yang lebih tinggi dapat diabaikan asalkan secara keseluruhan paling sedikit 90% energi gempa telah diakomodasi.

Masalah yang muncul adalah, seberapa besar pengaruhnya? Hal tersebutlah yang akan kami ambil sebagai pokok bahasan pada tugas akhir kami ini.

3.15 Statik Ekivalen

Dalam menganalisis respons gempa terdapat dua cara, yaitu secara dinamik dan secara statik ekivalen. Analisis secara dinamik sudah dijelaskan seperti di atas. Sedangkan analisis secara statik hanya memperhitungkan mode yang pertama dan mode tersebut diasumsikan mempunyai bentuk yang linear.

Analisis statik dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$F = \frac{W_i \times H_i}{\Sigma W_i \times H_i} \times V \tag{3.58}$$

Dimana $$V_i = \frac{C_i \times I}{R} \times W_t \tag{3.59}$$

Dengan, F = Gaya horisontal tingkat (kg)

W_i = Berat tiap tingkat (kg)

H_i = Tinggi tingkat (cm)

V = Gaya geser (kg)

C_i = Koefisien Respon Spektrum

I = Faktor Keutamaan Bangunan

R = Faktor Reduksi

W = Berat total struktur

Untuk menguatkan hasil dari perhitungan secara dinamik kami membandingkannya dengan cara statik ekivalen.