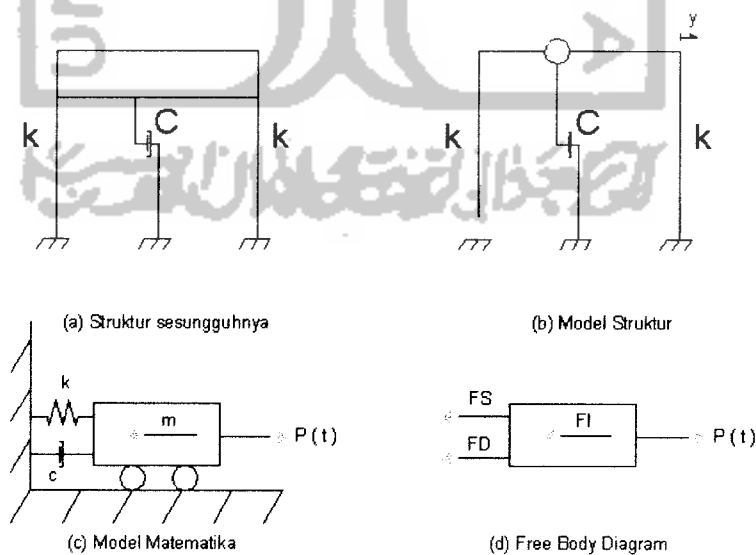


BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Persamaan Differensial Struktur (SDOF) Akibat Gerakan Tanah

Dalam perhitungan analisis struktur salah satu hal yang tidak boleh kita lupakan dalam perhitungan adalah beban gempa disamping beban mati dan beban hidup. Oleh karena itu perlu ditetapkan cara untuk menentukan model analisis untuk memperhitungkan pengaruh gempa bumi terhadap keamanan struktur bangunan. Gempa bumi akan menyebabkan permukaan tanah menjadi bergetar dan getaran tersebut akan diteruskan ke semua benda yang dilaluinya termasuk struktur bangunan. Maka struktur SDOF akibat gerakan tanah dapat dimodelkan sebagai berikut :



Gambar 3.1 Pemodelan Struktur SDOF

Untuk menyatakan persamaan gerakan massa akibat gerakan tanah khususnya pada struktur derajat kebebasan tunggal maka diambil notasi m , c , k dan y yang berturut-turut adalah massa, koefisien redaman, kekakuan kolom, dan simpangan.

Pada gambar tersebut bekerja sebuah gaya dinamik $P(t)$. Apabila beban dinamik tersebut bekerja kearah kanan, maka akan terdapat perlawanan pegas, damper dan gaya inersia. Gambar 3.1.d adalah gambar keseimbangan dinamik yang bekerja pada massa m . Gambar tersebut umumnya disebut *free body diagram*. Berdasarkan pada prinsip keseimbangan dinamik pada *free body diagram* tersebut, maka diperoleh hubungan,

$$F_I + F_D + F_S = P(t) \quad (3.1)$$

yang mana

$$F_I = m \cdot \ddot{y} = \text{Gaya}$$

$$F_D = c \cdot \dot{y} = \text{Gaya}$$

$$F_S = k \cdot y = \text{Gaya}$$

yang mana F_I , F_D , F_S berturut-turut adalah gaya inersia, gaya redaman dan gaya pegas. Berdasarkan *free body diagram* seperti gambar diatas maka persamaan differensial gerakan adalah :

$$m \cdot \ddot{y}_1 + c \cdot \dot{y}_1 + k \cdot y_1 = 0 \quad (3.2)$$

Yang mana \ddot{y} , \dot{y} dan y adalah percepatan, kecepatan dan simpangan.

Terdapat dua alternatif untuk mengkombinasikan persamaan diferensial gerakan massa akibat gerakan tanah. Salah satu alternatifnya adalah dengan

memakai hubungan kecepatan dan simpangan absolut dengan kecepatan dan simpangan relatif :

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_b + \ddot{y}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_b + \dot{y}, \quad y_1 = y_b + y \quad (3.3)$$

dimana y_b , \dot{y}_b , \ddot{y}_b adalah simpangan, kecepatan dan percepatan akibat beban gempa.

Dengan mendistribusikan persamaan (3.3) kedalam persamaan (3.2) maka persamaan (3.2) dapat ditulis menjadi :

$$m(\ddot{y}_b + \ddot{y}) + c(\dot{y}_b + \dot{y}) + k(y_b + y) = 0 \quad (3.4)$$

$$m.\ddot{y}_1 + c.\dot{y}_1 + k.y = -c.\dot{y}_b - k.y_b \quad (3.5)$$

Karena antara tanah dan lantai tingkat belum terjadi perbedaan simpangan yang mana peristiwa tersebut disebut sebagai *rigid body motion*. Dengan demikian persamaan (3.3) menjadi :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_b \quad (3.6)$$

Menurut teori dinamika struktur maka diperoleh hubungan :

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \frac{c}{m} = 2\xi \quad \xi = \text{damping ratio} \quad (3.7)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad/det)} \quad \omega = \text{angular frekuensi} \quad (3.8)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (det)} \quad T = \text{Periode} \quad (3.9)$$

$$f = \frac{1}{T} \text{ (hertz)} \quad f = \text{Natural frekuensi} \quad (3.10)$$

Dengan demikian persamaan (3.5) menjadi

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_b(t) \quad (3.11)$$

3.2 Massa Struktur

Suatu struktur bangunan bertingkat banyak pada umumnya mempunyai banyak derajat kebebasan yang umumnya berasosiasi dengan jumlah massa. Hal ini akan menyulitkan analisis struktur karena banyaknya persamaan differensial yang perlu diselesaikan. Oleh karena itu diperlukan beberapa asumsi atau penyederhanaan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Terdapat dua pendekatan pokok yang umumnya dilakukan untuk mendeskripsikan massa struktur. Pendekatan pertama adalah sistem diskretisasi massa yaitu massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat tertentu. Apabila prinsip bangunan geser (*shear building*) dipakai maka setiap massa hanya akan bergerak secara horisontal. Karena percepatan hanya terjadi pada struktur yang mempunyai massa maka matriks massa merupakan matriks diagonal.

Pendekatan yang kedua adalah menurut prinsip *consistent mass matrix* yang mana elemen struktur akan berdeformasi menurut bentuk fungsi (*shape function*) tertentu. Apabila tiga derajat kebebasan (horisontal, vertikal dan rotasi) diperhitungkan pada setiap *node* maka standar *consistent mass matrix* dapat diperoleh dengan *off-diagonal matrix* tidak sama dengan nol sebagaimana terjadi pada prinsip *lumped mass*. Pada struktur yang massanya terdistribusi secara merata misalnya analisis getaran balok atau cerobong maka pemakaian prinsip *consistent mass matrix* menjadi lebih tepat. Namun demikian, pada struktur bangunan bertingkat banyak yang mana struktur umumnya terkonsentrasi pada masing-masing tingkat, maka prinsip *lumped mass* banyak dipakai dan cukup akurat (Carr 1993, dalam Widodo 2001).

Untuk menghitung massa baik yang *single lumped mass* maupun *multiple lumped mass* maka dapat dipakai formulasi sederhana yaitu :

$$m = \frac{W}{g} \quad (3.12)$$

yang mana W adalah berat dan g adalah percepatan gravitasi.

3.3 Kekakuan Struktur

Kekakuan adalah salah satu dinamik karakteristik struktur bangunan yang sangat penting disamping massa bangunan. Antara massa dan kekakuan struktur akan mempunyai hubungan yang unik yang umumnya disebut karakteristik diri atau *Eigen Problem*. Hubungan tersebut akan menentukan nilai frekuensi sudut dan periode getar struktur T. Kedua nilai ini merupakan parameter yang sangat penting dan akan sangat mempengaruhi respon dinamika struktur.

Pada prinsip bangunan geser (*shear building*) balok pada lantai tingkat dianggap tetap horisontal baik sebelum maupun sesudah terjadi penggoyangan. Adanya pelat lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok sehingga anggapan tersebut tidak terlalu kasar. Pada prinsip desain bangunan tahan gempa dikehendaki agar kolom lebih kuat daripada balok, namun demikian rasio tersebut tidak selalu linier dengan kekakuannya. Dengan prinsip *shear building* maka dimungkinkan pemakaian *lumped mass model*. Pada prinsip ini kekakuan setiap kolom dapat dihitung berdasarkan rumus standar sebagai berikut :

$$K_c = \frac{12EI}{H^3} \quad (3.13)$$

Dimana K = Kekakuan (kg/cm), E = Modulus Elastisitas (2.10^5 kg/cm²), I = Momen Inersia (cm⁴), H = Tinggi Tingkat (cm).

Dengan melihat data struktur maka kekakuan dihitung secara paralel yaitu kekakuan tiap tingkat (K_i) merupakan jumlah total dari kekakuan kolom tiap tingkat (K_c), secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$K_i = \sum k_c \quad (3.14)$$

Pada prinsipnya semakin kaku balok maka semakin besar kemampuannya dalam mengekang rotasi ujung kolom, sehingga akan menambah kekakuan kolom. Pada prinsip Muto (1975), kekakuan joint juga dapat diperhitungkan sehingga hitungan kekakuan baik kekakuan kolom maupun kekakuan balok akan menjadi lebih teliti.

3.4 Redaman Struktur

Redaman merupakan peristiwa pelepasan energi (*energy dissipation*) oleh struktur akibat adanya berbagai macam sebab. Beberapa penyebab itu diantaranya adalah pelepasan energi oleh adanya gerakan antar molekul didalam material, pelepasan energi oleh gerakan alat penyambung maupun sistem dukungan, pelepasan energi akibat gesekan dengan udara dan pada respon inelastik pelepasan energi juga terjadi akibat adanya rotasi sendi plastik. Karena redaman berfungsi melepaskan energi maka hal tersebut akan mengurangi respon struktur.

Untuk memodel kemampuan struktur menyerap energi maka besaran yang dipakai umumnya adalah rasio redaman (*damping ratio*) ξ . Nilai rasio redaman untuk berbagai macam material dan tingkat respon struktur seperti pada *Respon*

Dinamik Struktur (Widodo, 2001, sumber : Newmark N.M, Hall W. J 1982).

Untuk memperoleh redaman ada tiga cara yang dapat digunakan yaitu :

1. Redaman proporsional dengan massa (*Mass Proportional Damping*)
2. Redaman proporsional dengan kekakuan (*Stiffnes Proportional Damping*)
3. Redaman proporsional terhadap massa dan kekakuan/kombinasi (*Mass and Stiffness proportional Damping*)

Dalam penelitian ini akan digunakan nilai redaman yang konstan.

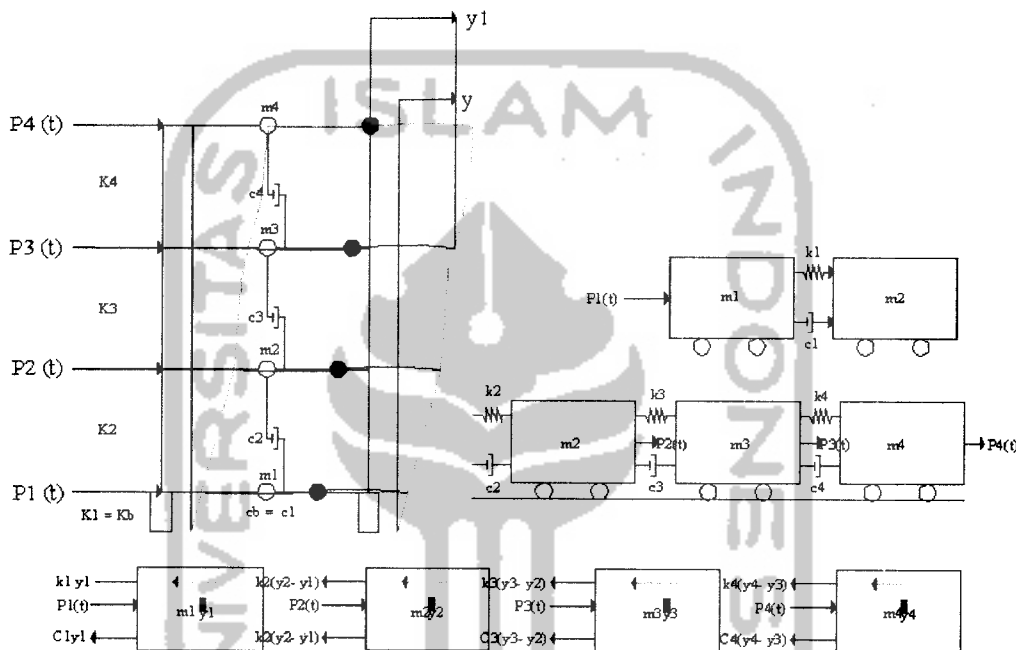
3.5 Persamaan Differensial Struktur Dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Tidak semua struktur bangunan gedung dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal atau *Single Degree of Freedom* (SDOF). Pada kenyataannya dilapangan justru banyak struktur bangunan gedung yang mempunyai derajat kebebasan banyak atau *Multi Degree of Freedom* (MDOF).

Dengan demikian struktur yang mempunyai banyak derajat kebebasan akan mempunyai banyak persamaan diferensial gerakan yang harus dipenuhi oleh karena itu diperlukan asumsi atau penyederhanaan agar jumlah derajat kebebasan dapat dikurangi. Untuk menyatakan persamaan differensial gerakan pada struktur dengan derajat kebebasan banyak maka dipakai anggapan dan pendekatan seperti pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF).

Pada struktur bangunan bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan pada tempat-tempat tertentu (*lumped mass*) yang umumnya pada

tiap-tiap lantai. Prinsip *shear building* masih berlaku pada struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF). Untuk memperoleh persamaan yang diinginkan maka digunakan model struktur MDOF. Model struktur ini berupa bangunan bertingkat 3 dengan ditambah *base isolator* dilantai dasarnya, sehingga struktur mempunyai empat derajat kebebasan dan satu massa *base isolaton*.



GAMBAR 3.2 Pemodelan Struktur MDOF

Struktur bangunan yang peneliti gunakan adalah gedung bertingkat tiga dengan memakai *base isolation* dilantai dasarnya. Sehingga struktur bangunan diatas mempunyai empat derajat kebebasan. Persamaan diferensial gerakan tersebut umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut *first mode* atau mode pertama. Berdasarkan pada keseimbangan dinamik pada *free body diagram* maka akan diperoleh :

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) - P_{1(t)} = 0 \quad (3.15)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) - P_{2(t)} = 0 \quad (3.16)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 (y_3 - y_2) - c_4 (\dot{y}_4 - \dot{y}_3) - k_4 (y_4 - y_3) - P_{3(t)} = 0 \quad (3.17)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 + c_4 (\dot{y}_4 - \dot{y}_3) + k_4 (y_4 - y_3) - P_{4(t)} = 0 \quad (3.18)$$

Dari persamaan-persamaan diatas tampak bahwa keseimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat tersebut umumnya disebut *coupled equation*, karena persamaan-persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain.

Penyelesaian dari persamaan *coupled* tersebut harus diselesaikan secara simultan artinya dengan melibatkan semua persamaan yang ada. Pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan differensial gerakannya merupakan persamaan yang *independent* atau *coupled* antara satu dengan yang lain. Selanjutnya dengan menyusun persamaan-persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) akan diperoleh :

$$m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2) \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = P_{1(t)} \quad (3.19)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + (c_2 + c_3) \dot{y}_2 - c_3 \dot{y}_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 = P_{2(t)} \quad (3.20)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - c_3 \dot{y}_2 + (c_3 + c_4) \dot{y}_3 - c_4 \dot{y}_4 - k_3 y_2 + (k_3 + k_4) y_3 - k_4 y_4 = P_{3(t)} \quad (3.21)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 - c_4 \dot{y}_3 + c_4 \dot{y}_4 + k_4 y_4 = P_{4(t)} \quad (3.22)$$

Persamaan-persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{P_{(t)}\} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1(t)} \\ P_{2(t)} \\ P_{3(t)} \\ P_{4(t)} \end{Bmatrix}$$

yang mana $[M]$, $[C]$ dan $[K]$ berturut-turut adalah matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan yang dapat ditulis menjadi,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sedangkan $\{\ddot{Y}\}$, $\{\dot{Y}\}$, $\{Y\}$ dan $\{F(t)\}$ masing-masing adalah *vector* percepatan, *vector* kecepatan, *vector* simpangan dan *vector* beban, atau,

$$\{\ddot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_{1(t)} \\ P_{2(t)} \\ P_{3(t)} \\ P_{4(t)} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

3.6 Getaran Bebas pada Struktur Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar misalnya akibat beban angin, getaran akibat putaran mesin (beban harmonik) ataupun akibat beban gerakan tanah atau gempa. Getaran-getaran seperti itu dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *Forced Vibration System*.

Membahas getaran bebas dalam struktur derajat kebebasan banyak akan diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat. Karakter-karakter itu adalah frekuensi sudut ω , periode getar T dan frekuensi alam f . Pembahasan getaran bebas ini masih diikuti dengan penyederhanaan permasalahan yaitu dengan menganggap struktur tidak mempunyai redaman (*undamped system*). Dengan anggapan tersebut maka penyelesaian masalah menjadi lebih sederhana.

3.6.1 Nilai Karakteristik (*Eigen Problem*)

Getaran bebas (*free vibration system*) pada kenyataannya jarang terjadi pada struktur MDOF, tetapi dengan membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran atau karakteristik dari struktur yang bersangkutan yang selanjutnya akan sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya. Besaran-besaran tersebut terutam adalah frekuensi sudut ω , periode getar T , frekuensi alam f dan *normal modes*.

Pada getaran bebas di struktur MDOF, maka matriks persamaan differensial gerakannya adalah seperti dibawah ini dengan nilai ruas kanan sama dengan nol.

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\} \quad (3.26)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) ω_d nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur yang dianggap tanpa redaman ω . Hal ini diperoleh apabila nilai damping ratio ξ relatif kecil. Jika hal ini diadopsi untuk struktur dengan MDOF, maka untuk nilai $C = 0$, persamaan (3.24) menjadi :

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\} \quad (3.27)$$

Karena persamaan (3.25) adalah persamaan differensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman, maka sebagaimana penyelesaian persamaan differensial yang sejenis, maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik menurut bentuk,

$$\begin{aligned} Y &= \{\phi\}_i \sin(\omega t) \\ \dot{Y} &= -\omega \{\phi\}_i \cos(\omega t) \\ \ddot{Y} &= -\omega^2 \{\phi\}_i \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Yang mana $\{\phi\}_i$ adalah suatu ordinat massa pada mode ke- i . Kemudian substitusikan persamaan (3.26) ke dalam persamaan (3.25) maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} -\omega^2 [M]\{\phi\}_i \sin(\omega t) + [K]\{\phi\}_i \sin(\omega t) &= 0 \\ \{[K] - \omega^2 [M]\}\{\phi\}_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Persamaan (3.29) adalah suatu persamaan yang sangat penting dan biasa disebut persamaan *eigen problem* atau karakteristik problem atau ada juga yang menyebut *eigenvalue problem*. Persamaan (3.29) adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya. Salah satu cara yang dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan simultan tersebut adalah dengan memakai dalil Cramer (1704-1725). Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor $\{\phi\}_i$ adalah nol, sehingga,

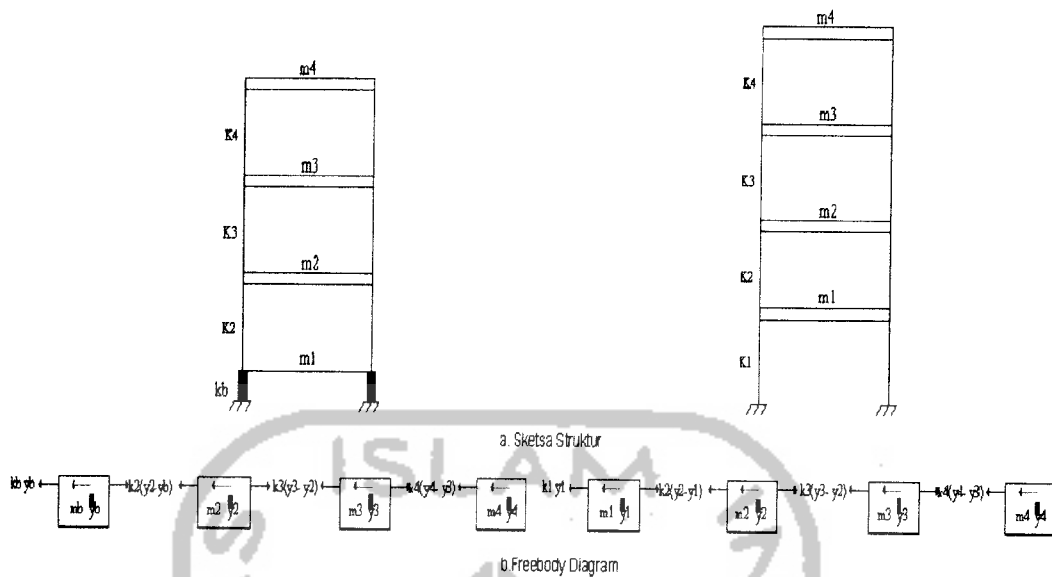
$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (3.30)$$

Jumlah *mode* pada struktur berderajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. *Mode* itu sendiri adalah jenis /pola/ragam getaran/goyangan suatu struktur bangunan. Dengan adanya hubungan antara jumlah *mode* dengan jumlah massa struktur, maka bangunan yang mempunyai n-tingkat akan mempunyai n-derajat kebebasan dan akan mempunyai n-“*mode*” gerakan dan akan mempunyai n-nilai frekuensi sudut yang berhubungan langsung dengan jenis/nomor *mode* nya. Maka persamaan (3.30) akan menghasilkan suatu polinomial pangkat n yang selanjutnya akan menghasilkan ω_1^2 untuk $I = 1, 2, 3 \dots n$. Selanjutnya substitusi masing-masing frekuensi ω_1 kedalam persamaan (3.29) maka akan diperoleh nilai-nilai *mode shape*, sedangkan *mode shape* pada suatu *eigen problem* diambil dari model struktur yang berada pada tanah dengan letak *base isolation* diatas pondasi.

3.6.2 Metode Polinomial

Metode polinomial ini pada dasarnya masih menggunakan persamaan *eigenproblem*. Untuk mencari atau menghitung *eigenvalues* (nilai-nilai frekuensi sudut) tidak lagi dipakai cara determinan. Cara yang dipakai adalah dengan mentransfer persamaan simultan *eigenproblem* menjadi suatu persamaan polinomial pangkat banyak. Akar-akar persamaan polinomial tersebutlah yang akan dicari yang selanjutnya akan menghasilkan nilai-nilai *eigenvektor*. Untuk membahas cara ini maka ditinjau suatu struktur dengan tingkat seperti pada

Gambar 3.3



Gambar 3.3 Perbandingan Struktur dengan dan tanpa *Base Isolation* dengan 4 derajat kebebasan

Berdasarkan keseimbangan gaya-gaya *free body diagram* maka dapat disusun persamaan simultan gerakan dibawah ini,

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
 M_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 M_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - k_4 (y_4 - y_3) &= 0 \\
 M_4 \ddot{y}_4 + k_4 (y_4 - y_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Persamaan (3.31) dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 &= 0 \\
 M_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 &= 0 \\
 M_3 \ddot{y}_3 - k_3 y_2 + (k_3 + k_4) y_3 - k_4 y_4 &= 0 \\
 M_4 \ddot{y}_4 - k_4 y_3 + k_4 y_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) juga dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Pers. (3.33) dapat disusun dalam bentuk persamaan *eigenproblem* sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) - \omega^2 m_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & (k_4) - \omega^2 m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \frac{\omega^2}{k/m_1} & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \frac{\omega^2}{k/m_2} & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) - \frac{\omega^2}{k/m_3} & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - \frac{\omega^2}{k/m_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa,

$$\lambda = \frac{\omega^2}{k/m} \quad (3.35)$$

Maka persamaan menjadi,

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \lambda & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \lambda & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) - \lambda & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Apabila persamaan (3.36) disederhanakan, maka diperoleh,

$$((k_1 + k_2) - m_1 \lambda) \phi_1 - k_2 \phi_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
-k_2\phi_2 + ((k_2 + k_3) - m_2\lambda)\phi_2 - k_3\phi_3 &= 0 \\
-k_3\phi_3 + ((k_3 + k_4) - m_3\lambda)\phi_3 - k_4\phi_4 &= 0 \\
-k_4\phi_4 + (k_4 - m_4\lambda)\phi_4 &= 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Dengan mengambil nilai $\phi_1 = 0$ maka disubstitusikan kedalam persamaan (3.37), maka akan mendapatkan persamaan polinomial pangkat 3 atau pangkat n (n = jumlah tingkat). Dari akar-akar persamaan tersebut bias didapat ω , T, Φ dengan rumus yang telah dicantumkan sebelumnya.

3.7 Metode β -Newmark.

Metode β -Newmark dapat dipakai untuk menyelesaikan integrasi persamaan differensial *coupled* struktur MDOF secara langsung. Metode β -Newmark yang dimaksud misalnya adalah metode yang berdasar pada *incremental method*, bahwa untuk struktur yang berperilaku linier inelastis maupun non-linier elastis maka perlu dikembangkan model integrasi yang dapat mensimulasikan perubahan kekakuan menurut fungsi waktu.

Persamaan differensial yang berlaku saat interval yang ditinjau pada metode β -Newmark adalah,

$$m\Delta\ddot{y}_i + c\Delta\dot{y}_i + k\Delta y = \Delta p_i \tag{3.38}$$

Apabila beban dinamik yang dipakai adalah beban gempa maka untuk struktur MDOF persamaan differensial tersebut adalah,

$$[M]\Delta\ddot{y}_i + [C]\Delta\dot{y}_i + [K]\Delta y = \{M\}\Delta\ddot{y}_{b,i} \tag{3.39}$$

Pada metode β -Newmark memakai perjanjian notasi untuk perubahan simpangan Δy , perubahan kecepatan $\Delta \dot{y}$, dan perubahan percepatan $\Delta \ddot{y}$ adalah,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta \dot{y}_i = \dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i, \quad \Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i \quad (3.40)$$

persamaan (3.42) dapat ditulis juga menjadi,

$$\Delta y_i = y(t_i + \Delta t) - y(t_i) \quad (3.41)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i) \quad (3.42)$$

$$\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}_i(t_i + \Delta t) - \ddot{y}_i(t_i) \quad (3.43)$$

sedangkan perubahan intensitas pembebanan pada interval yang ditinjau adalah,

$$\Delta p_i = \Delta p_{i+1} - p_i \quad (3.44)$$

untuk struktur MDOF akibat beban gempa bumi maka persamaan differensial yang digunakan adalah,

$$\Delta p_i = \{M\}(\ddot{y}_{b,i+1} - y_{b,i}) \quad (3.45)$$

untuk memulai integrasi numerik tersebut digunakan persamaan,

$$\Delta \ddot{y}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta y_i - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{y}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{y}_i \quad (3.46)$$

dimana $\Delta \ddot{y}_i$ adalah perubahan percepatan pada langkah ke-i, sedangkan perubahan kecepatan pada langkah yang sama $\Delta \dot{y}$ adalah,

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \Delta y_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{y}_i + (\Delta t) \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right\} \ddot{y}_i \quad (3.47)$$

kemudian untuk perubahan simpangan dapat dicari dengan persamaan,

$$\Delta y_i = \frac{\Delta p_i}{\hat{k}} \quad (3.48)$$

yang mana,

$$\hat{k} = \left\{ k + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} + \frac{m}{\beta (\Delta t)^2} \right\} \quad (3.49)$$

$$\Delta \hat{p}_i = (p_{i+1} - p_i) + a \dot{y}_i + b \ddot{y}_i \quad (3.50)$$

Sedangkan untuk struktur MDOF akibat beban gempa bumi maka persamaan (3.52) akan menjadi,

$$\Delta \hat{p} = \{M\}(\ddot{y}_{b,i+1} - \ddot{y}_{b,i}) + a \dot{y}_i + b \ddot{y}_i \quad (3.51)$$

dimana nilai a dan b pada persamaan diatas adalah,

$$a = \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right\}, \quad b = \left\{ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right\} \quad (3.52)$$

Pada metode β -Newmark terdapat perbedaan nilai koefesien berdasarkan metode yang digunakan, yaitu :

1. Metode percepatan rata-rata, dengan nilai koefesien $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$.
2. Metode percepatan linier, dengan nilai koefesien $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$.

Selanjutnya simpangan, kecepatan dan percepatan pada akhir interval adalah,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \dot{y}_{i+1} &= \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \\ \ddot{y}_{i+1} &= \ddot{y}_i + \Delta \ddot{y}_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.8. Analisis Respon struktur Akibat Gempa.

Analisis respon struktur akibat gempa meliputi simpangan relatif struktur, gaya horisontal tingkat, gaya geser tingkat dan momen guling pada struktur bangunan 4, 8, dan 10 tingkat dengan mengkombinasikan kekakuan horisontal *base isolation* (kb) dan kekakuan putar tanah (kr) diabaikan dengan menggunakan 3 variasi percepatan gempa yaitu Elcentro, Santacruz, dan Koyna. Adapun untuk nilai kb diambil $\frac{1}{10}$ s/d $\frac{1}{50}$ dari kekakuan struktur tingkat 1 dan disesuaikan juga dengan jumlah tingkat bangunan yang digunakan.

3.8.1 Simpangan Struktur

Simpangan struktur yang terjadi ada 3 macam yaitu simpangan absolut, simpangan relatif, dan simpangan antar tingkat (*interstorey drift*). Simpangan yang digunakan dalam penelitian ini adalah simpangan relatif dan simpangan antar tingkat.

3.8.1.1 Simpangan Relatif.

Simpangan relatif adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan mengurangi simpangan netto tiap tingkat dengan simpangan dibawahnya.

$$Y_j = y_{t_{i+1}} - y_i \quad (3.54)$$

3.8.1.2 Simpangan Antar Tingkat (*Interstorey Drift*)

Simpangan antar tingkat adalah simpangan relatif dibagi tinggi tingkat yang ditinjau, pada waktu yang bersamaan. Besarnya nilai simpangan antar tingkat dihitung dengan rumus,

$$yy_j(t) = \frac{y_j(t)}{h} * 100\% \quad (3.55)$$

dimana $yy(t)$ dan $y(t)$ adalah simpangan antar tingkat (*interstorey drift*) dan simpangan relatif yang terjadi pada tingkat ke- j yang merupakan fungsi dari waktu serta h adalah tinggi tingkat.

3.8.2 Gaya Geser Tingkat

Gaya geser tingkat sering dipakai dalam analisis struktur, karena gaya geser tingkat akan menyebabkan rotasi pada penampang horisontal lantai yang nantinya akan berpengaruh pada besarnya gaya geser dasar dan momen guling (*overturning moment*). Gaya horisontal tingkat mode ke- j adalah (Respon Dinamik Struktur Elastik, Widodo (2001) :

$$F_j = y_j(t) * k_j \quad (3.56)$$

dimana F , $y_j(t)$, dan k adalah gaya horisontal tingkat, simpangan total yang terjadi pada tingkat ke- j dan kekakuan tingkat yang merupakan fungsi dari waktu.

Sehingga gaya geser adalah :

$$V = \left(\sum_{j=1}^n F_j \right) \quad (3.57)$$

3.8.3 Momen Guling (*Overturning Moment*).

Momen guling diperoleh dengan mengalikan gaya horisontal tingkat dan tinggi tingkat yang bersangkutan (Respon Dinamik Struktur Elastik, Widodo (2001). Besarnya nilai momen guling dihitung dengan,

$$M_g = \sum_{j=1}^n F_j * H_j \quad (3.58)$$

Dimana M_g dan F adalah Momen guling dan Gaya Horizontal yang merupakan fungsi waktu sedangkan H adalah tinggi tingkat.

3.9 Struktur dengan *Base Isolation*

Struktur dengan menggunakan *base isolation* dapat mengurangi simpangan bangunan akibat gempa bumi, dimana simpangan tersebut diredam oleh *base isolation*, sehingga simpangan yang terjadi pada *base isolation* menjadi besar, sedangkan simpangan ditingkat atasnya menjadi kecil. Keadaan gedung yang dikenai beban gempa bumi akan mengalami getaran ketiga arah, yaitu getaran arah horisontal, getaran arah vertikal, dan getaran berputar, akan tetapi bila digunakan *base isolation* sebagai peredam maka tidak terjadi getaran putar. Pada *Lumped parameter model* diasumsikan struktur mengalami pergeseran kearah horisontal sedangkan arah vertikal diabaikan dan massa menggumpal (*lumped mass*). Jika gaya inersia, gaya redam, serta gaya kekakuan adalah F_i , F_c , F_k maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$F_i + F_c + F_k = 0 \quad (3.59)$$

Dimana,

$$F_i = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \ddot{y}_j \quad \ddot{y}_b \quad \ddot{y}_o \right\} = 0$$



$$F_c = \begin{bmatrix} c_b + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{ \dot{y}_j \quad \dot{y}_b \quad \dot{y}_o \} = 0 \quad (3.60)$$

$$F_k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{ y_j \quad y_b \quad y_o \} = 0$$

Sedangkan untuk keseimbangan arah horisontal diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$F_{i,H} = \sum_{j=1}^n m_j \{ \ddot{y}_j \quad \ddot{y}_b \quad \ddot{y}_o \} + m_o \{ \ddot{y}_b \quad \ddot{y}_o \} = 0$$

$$F_{c,H} = \begin{bmatrix} c_b + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{ \dot{y}_j \quad \dot{y}_b \quad \dot{y}_o \} + 0 \cdot \dot{y}_o = 0 \quad (3.61)$$

$$F_{k,H} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \{ y_j \quad y_b \quad y_o \} + 0 \cdot y_o = 0$$

Dari persamaan (3.60) dan (3.61) maka akan diperoleh,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -\{m_i \ddot{y}_g\} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

$$+ \begin{bmatrix} c_b + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_1 \ddot{y}_g \\ m_2 \ddot{y}_g \\ m_3 \ddot{y}_g \end{Bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \text{ dimana } m_b = m_1$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_b + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \text{ dimana } k_b = k_1$$

$$\ddot{y} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Untuk matriks redaman pada struktur di atas digunakan dengan nilai redaman konstan pada tiap tingkatnya dan digunakan jenis *Stiffness Proportional Damping (SPD)*. Sehingga matriks redaman berturut-turut menjadi,

$$[C] = \begin{bmatrix} c_b + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \left(\frac{2 \cdot \xi_b}{\omega_b} * k_b + \frac{2 \cdot \xi_2}{\omega_2} * k_2 \right) & -\frac{2 \cdot \xi_2}{\omega_2} * k_2 & 0 \\ -\frac{2 \cdot \xi_2}{\omega_2} * k_2 & \left(\frac{2 \cdot \xi_2}{\omega_2} * k_2 + \frac{2 \cdot \xi_3}{\omega_3} * k_3 \right) & -\frac{2 \cdot \xi_3}{\omega_3} * k_3 \\ 0 & -\frac{2 \cdot \xi_3}{\omega_3} * k_3 & \frac{2 \cdot \xi_3}{\omega_3} * k_3 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

dengan,

$$m_1 = m_b = \text{Massa Base Isolation}$$

$$K_1 = K_b = \text{Kekakuan Base Isolation}$$

$$C_1 = c_b = \text{Redaman Base Isolation}$$

3.10 Analisis Respon untuk *Base Isolation*.

Pada umumnya struktur selalu direncanakan dengan anggapan elastis linier dan tetap elastis linier bila dipengaruhi oleh pengaruh dinamis. Namun perencanaan struktur dengan anggapan diatas untuk kejadian ekstrim seperti gempa bumi kuat dan ledakan nuklir adalah tidak realistik. Walaupun struktur dapat direncanakan menahan gempa keras, namun tidak ekonomis untuk merencanakan bangunan dengan sifat elastis untuk menahan gempa keras. Oleh karena itu diperlukan perencanaan struktur yang siap berdefomasi melewati batas elastis.

Anggapan sederhana dan dapat diterima adalah menganggap struktur bersifat elastoplastik. Dengan sifat ini struktur tetap elastis hingga gaya pemulihan mencapai harga maksimum (tarik atau tekan) di mana akan tetap konstan dan bergerak kembali menjadi sifat elastik. Pada pembahasan kali ini khusus untuk *base isolation* dianggap berperilaku elastoplastik.

3.10.1 Integrasi Persamaan Gerak Non Linier

Diantara sekian banyak metode yang dapat dipakai untuk mencari solusi persamaan gerak non-linier, mungkin hanya satu cara yang paling efektif yaitu, metode integrasi langkah demi langkah/bertahap (*step-by-step integration method*). Pada cara ini, jawaban didapat dari evaluasi pada setiap penambahan waktu Δt , yang diambil sebesar waktu yang cukup untuk hitungan yang tepat. Mulanya pada setiap selang waktu, kondisi dinamis ditetapkan dan kemudian jawaban untuk selang waktu Δt di evaluasi dengan dasar bahwa koefesien $k(y)$ dan $c(\dot{y})$ tetap konstan selama selang waktu Δt . Karakteristik non linier dari

koefisien-koefisien ini akan dipertimbangkan dalam analisa dengan cara mengevaluasi kembali koefisien-koefisien ini pada permulaan setiap penambahan waktu. Respons didapat dengan menggunakan perpindahan dan kecepatan yang dihitung pada akhir selang waktu sebagai kondisi awal dari selang waktu berikutnya.

3.10.2 Metoda Percepatan Linier Langkah demi Langkah

Pada metode percepatan linier dianggap bahwa percepatan dapat dinyatakan oleh fungsi linier terhadap waktu selama selang waktu Δt . Ambil $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ bersama-sama menyatakan waktu pada permulaan dan akhir selang waktu Δt . Yang perlu ditekankan pada analisa ini adalah bahwa evaluasi dilaksanakan terhadap koefisien-koefisien pada waktu t_i dan menganggap tetap konstan selama penambahan waktu Δt . Bila percepatan merupakan fungsi linier terhadap waktu selang waktu t_i dan $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, maka percepatan dapat dinyatakan sebagai,

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_i + \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t}(t - t_i) \quad (3.65)$$

Di mana $\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}(t_i + \Delta t) - \ddot{y}(t_i)$. Integrasi persamaan (3.65) sebanyak dua kali terhadap waktu antara batas t_i dan t menghasilkan,

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_i + \ddot{y}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t}(t - t_i)^2 \quad (3.66)$$

dan

$$y(t) = y_i + \dot{y}_i(t - t_i) + \frac{1}{2} \ddot{y}_i(t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\Delta t}(t - t_i)^3 \quad (3.67)$$

Evaluasi persamaan (3.66) dan (3.67) pada waktu $t = t_i + \Delta t$ memberikan

$$\Delta \dot{y}_i = \ddot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{y}_i \Delta t \quad (3.68)$$

dan

$$\Delta y_i = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{y}_i \Delta t^3 \quad (3.69)$$

Pertambahan perpindahan Δy sebagai variabel dasar dalam analisa, substitusikan persamaan (3.69) kedalam persamaan (3.68) untuk mendapatkan nilai percepatan $\Delta \ddot{y}_i$.

$$\Delta \ddot{y}_i = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta y_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \quad (3.70)$$

dan

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{3}{\Delta t} \Delta y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \quad (3.71)$$

kemudian substitusi persamaan (3.70) dan (3.71) kedalam persamaan $m\Delta \ddot{y}_i + c_i \Delta \dot{y}_i + k_i \Delta y_i = \Delta F_i$, yang mana persamaan ini adalah persamaan differensial gerakan tanah untuk pertambahan waktu sehingga didapat persamaan gerak dalam bentuk

$$m \left\{ \frac{6}{\Delta t^2} \Delta y_i - \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i - 3\ddot{y}_i \right\} + c_i \left\{ \frac{3}{\Delta t} \Delta y_i - 3\dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \right\} + k_i \Delta y_i = \Delta F_i \quad (3.72)$$

dengan memindahkan semua besaran pertambahan dari perpindahan Δy_i yang tidak diketahui dari persamaan (3.72) ke bagian sebelah kiri, maka didapat,

$$\bar{k}_i \Delta y_i = \Delta \bar{F}_i \quad (3.73)$$

dimana

$$\bar{k}_i = k_i + \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c_i}{\Delta t} \quad (3.74)$$

dan

$$\Delta \bar{F}_i = \Delta F_i + m \left\{ \frac{6}{\Delta t} \dot{y}_i + 3\ddot{y}_i \right\} + c_i \left\{ 3\dot{y}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \right\} \quad (3.75)$$

3.10.3 Sifat Elastoplastis (*Elastoplastic Behavior*)

Jika struktur dengan model sistem berderajat kebebasan tunggal (sistem massa pegas) dapat mencapai keadaan plastis, maka penggunaan gaya pemulihan (*restoring force*) mempunyai bentuk seperti pada gambar (3.5.a). Ada satu bagian dari lengkungan di mana dicapai sifat elastis, di mana untuk deformasi selanjutnya merupakan daerah terjadinya leleh plastis (*plastic yielding*). Jika beban dihilangkan dari struktur maka sifatnya menjadi elastis kembali hingga mencapai leleh plastis tertekan (*compressive plastic yielding*) pada beban yang berlawanan tandanya dengan beban sebelumnya. Energi yang hilang pada setiap siklus selaras dengan luas dalam lengkungan. Sifat ini sering disederhanakan dengan menganggap suatu titik leleh (*yield point*) tertentu di mana setelah melampaui titik ini, perpindahan menjadi konstan tanpa ada penambahan beban. Sifat ini dikenal juga sebagai sifat elastoplastis.

Jika perpindahan y bertambah besar menjadi y_t sistem mulai bersifat plastis pada kondisi tarik sepanjang lengkungan T seperti pada gambar (3.5.b) dan akan tetap pada lengkung T selama kecepatan $\dot{y} > 0$. Bila $\dot{y} < 0$, maka sistem akan kembali bersifat elastis pada lengkungan seperti E_t dengan titik leleh (*yielding point*) yang baru, yang diberikan oleh,

$$\begin{aligned} y_t &= y_{\max}, \\ y_c &= y_{\max} - (R_t - R_c)/k \end{aligned} \quad (3.78)$$

di mana y_{\max} adalah perpindahan maksimum sepanjang lengkungan T yang dicapai bila $\dot{y} = 0$.

Berlawanan dengan diatas, jika y berkurang sampai y_c sistem mulai bersifat plastis dalam kondisi tekan sepanjang lengkungan C dan akan tetap pada lengkungan ini selama $\dot{y} < 0$. Sistem akan kembali bersifat elastis bila kecepatan berganti arah dan $\dot{y} > 0$. Pada kondisi ini titik leleh baru diberikan oleh

$$\begin{aligned} y_c &= y_{\min}, \\ y_t &= y_{\min} + (R_t - R_c)/k \end{aligned} \quad (3.79)$$

di mana y_{\min} adalah perpindahan minimum sepanjang lengkungan C , yang tercapai bila $\dot{y} = 0$. Gaya pemulihan (*restoring force*) pada fase elastis dari siklus (E_o, E_1, E_2, \dots) dapat dihitung sebagai

$$R = R_t - (y_t - y)k \quad (3.80)$$

pada fase kondisi tarik sebagai

$$R = R_t \quad (3.81)$$

dan pada fase kondisi tekan sebagai

$$R = R_c \quad (3.82)$$

3.10.4 Algoritma untuk solusi langkah demi langkah untuk sistem-sistem berderajat kebebasan tunggal elastoplastis.

Penamaan dan data masukan :

1. Baca harga masukan untuk k , m , c , R_t , R_c dan daftar yang memberikan waktu t_i serta besar gaya pengaruh F_i .
2. Atur $y_0 = 0$ dan $\dot{y}_0 = 0$.
3. Hitung percepatan awal :

$$\ddot{y}_0 = \frac{F(t=0)}{m} \quad (3.83)$$

4. Pilih tahapan waktu Δt dan hitung konstanta :

$$a_1 = \frac{3}{\Delta t}, \quad a_2 = \frac{6}{\Delta t}, \quad a_3 = \frac{\Delta t}{2}, \quad a_4 = \frac{6}{\Delta t^2}, \quad (3.84)$$

5. Hitung titik leleh awal

$$y_t = \frac{R_t}{k} \quad y_c = \frac{R_c}{k} \quad (3.85)$$

Untuk tiap tahapan waktu :

1. Kontrol apakah sistem tetap pada kondisi elastis sebelumnya atau bersifat plastis dengan menggunakan tanda sebagai berikut :

KEY = 0 (sifat elastis);

KEY = -1 (sifat plastis tekan);

KEY = 1 (sifat plastis tarik). (3.86)

2. Hitung perpindahan y dan kecepatan \dot{y} pada akhir tahapan waktu dan atur harga KEY sesuai kondisi berikut:

a. Bila sistem bersifat elastis pada permulaan tahap waktu, dan

$$y_c < y < y_t \quad \text{KEY} = 0$$

$$y > y_t \quad \text{KEY} = 1$$

$$y < y_c \quad \text{KEY} = -1$$

b. Bila sistem bersifat plastis kondisi tertarik pada permulaan tahap waktu dan

$$\dot{y} > 0 \quad \text{KEY} = 1$$

$$\dot{y} < 0 \quad \text{KEY} = 0$$

c. Bila sistem bersifat plastis kondisi tertekan pada permulaan tahap waktu dan

$$\dot{y} < 0 \quad \text{KEY} = -1$$

$$\dot{y} > 0 \quad \text{KEY} = 0$$

3. Hitung keakuan efektif :

$$\bar{k} = k_p + a_4 m + a_1 c_1 \quad (3.87)$$

di mana

$$k_p = k \text{ untuk sifat elastis (KEY} = 0)$$

$$k_p = 0 \text{ untuk sifat plastis (KEY} = 1 \text{ atau } -1) \quad (3.88)$$

4. Hitung pertambahan gaya efektif :

$$\overline{\Delta F}_i = \Delta F_i + (a_2 m + 3c_i)\dot{y}_i + (3m + a_3 c_i)\ddot{y}_i \quad (3.89)$$

5. Selesaikan untuk pertambahan perpindahan :

$$\Delta y_i = \frac{\overline{\Delta F_i}}{k_i} \quad (3.90)$$

6. Hitung pertambahan kecepatan :

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{3}{\Delta t} \Delta y_i - 3 \dot{y}_i - \frac{\Delta t}{2} \ddot{y}_i \quad (3.91)$$

7. Hitung perpindahan dan kecepatan pada akhir selang waktu :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (3.92)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \quad (3.93)$$

8. Hitung percepatan \ddot{y}_{i+1} pada akhir selang waktu dengan menggunakan persamaan keseimbangan dinamis :

$$\ddot{y}_{i+1} \frac{1}{m} [F(t_{i+1}) - (c_{i+1} \dot{y}_{i+1} - R)] \quad (3.94)$$

di mana

$$\begin{aligned} R &= R_t - (y_t - y_{i+1})k && \text{jika KEY} = 0 \\ R &= R_t && \text{jika KEY} = 1 \end{aligned} \quad (3.95)$$

atau

$$R = R_c \quad \text{jika KEY} = -1.$$