BAB III

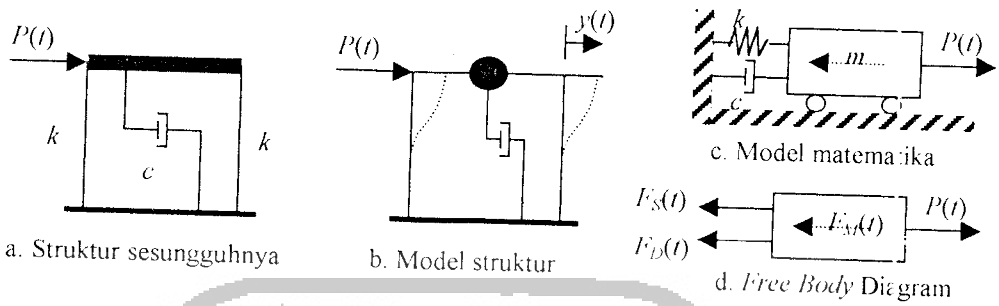
LANDASAN TEORI

Landasan Teori memuat dasar-dasar teori yang akan dipergunakan secara garis besar dan merupakan tuntunan yang digunakan untuk merumuskan hipotesis. Landasan teori ini meliputi sistem berderajat kebebasan tunggal, sistem berderajat kebebasan banyak, mode shape dan frekuensi, persamaan gerak akibat gempa, jenis simpangan dan efeknya terhadap kerusakan, persamaan diferensial independen, dan respon terhadap gempa.

3.1 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal

Sistem dengan derajat kebebasan tunggal mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jumlah derajat kebebasan biasanya dapat dikaitkan dengan jumlah massa, artinya suatu struktur 5 tingkat akan mempunyai 5 massa dan 5 derajat kekebasan dengan anggapan struktur berperilaku *shear building*. Struktur dengan derajat kebebasan tunggal atau *single degree of freedom* (SDOF) berarti hanya akan mempunyai satu massa.

Dalam menyelesaikan masalah dinamik, sebaiknya memakai metoda yang menghasilkan suatu analisa yang tersusun dan sistematik. Yang terutama dan barangkali paling penting dalam praktek analisa dinamis adalah menggambar sebuah diagram *free body* dari sistem yang memungkinkan penulisan besaran matematikdari sistem tersebut. Diagram *free body* (DFB) adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas. Sistem berderajat kebebasan tunggal dapat ditunjukkan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Model sistem SDOF akibat beban dinamik

Berdasarkan keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1.d diperoleh persamaan

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = P(t) \tag{3.1}$$

$$F_M(t) = m \cdot \ddot{y}(t), \qquad F_D(t) = c \cdot \dot{y}(t), \quad \text{dan} \quad F_S(t) = k \cdot y(t) \tag{3.2}$$

Yang mana F_M adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekakuan kolom, $P(t)$ adalah beban dinamik, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan massa, dan m, c, k masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1), menjadi

$$m\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = P(t) \tag{3.3}$$

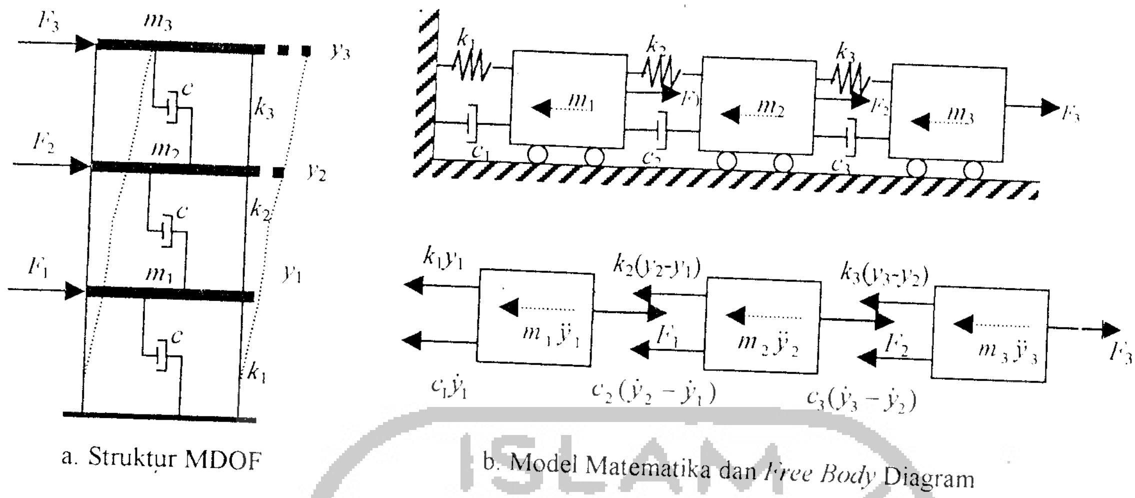
Persamaan 3.3, disebut persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*) pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \tag{3.4}$$

3.2 Sistem Berderajat Kebebasan Banyak

Secara umum struktur bangunan gedung tidak selalu dapat dinyatakan dengan suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Umumnya struktur bangunan gedung justru mempunyai derajat kebebasan banyak (*Multi Degree of Freedom*).

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan di satu titik pada lantai (*lumped mass*), dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan dapat dipandang sebagai struktur kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, dapat digunakan anggapan *shear building*, selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P, sebagaimana penulisan pada struktur SDOF di muka. Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti pada Gambar 3.2.a, struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai n-tingkat akan mempunyai n-derajat kebebasan dan mempunyai n-mode.



Gambar 3.2 Model sistem MDOF

Persamaan differensial gerakan pada struktur disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada Gambar 3.2.b, akan diperoleh persamaan

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1) - k_2(y_2-y_1) = F_1 \tag{3.5a}$$
$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + k_2(y_2-y_1) - c_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2) - k_3(y_3-y_2) = F_2 \tag{3.5b}$$
$$m_3\ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2) + k_3(y_3-y_2) = F_3 \tag{3.5c}$$

Selanjutnya persamaan (3.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks yang lebih ringkas, menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{F\} \tag{3.6}$$

$[M]$, $[C]$, $[K]$, berturut-turut adalah matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan yang dapat ditulis menjadi

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.7a}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{3.7b}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.7c}$$

$$\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \{F_{(t)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

dan $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{y\}$ masing-masing adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan, dan $\{F\}$ adalah vektor gaya atau beban.

3.3 *Mode Shape* dan Frekuensi

Suatu struktur umumnya akan bergerak akibat pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal (*initial condition*). Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar y_n dan apabila gaya tarik tersebut dilepas kembali maka massa akan bergerak. Peristiwa pergerakan massa tersebut disebut dengan getaran bebas (*free vibration system*). Gerakan suatu massa disebabkan pembebanan dari luar misalnya beban angin, beban gempa dan lainnya, maka gerakan massa dikelompokkan sebagai gerakan dipaksa (*forced vibration system*). Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas (*free vibration system*) akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamika struktur.

Persamaan differensial gerak getaran bebas pada struktur seperti pada persamaan (3.5) dalam kondisi khusus dapat dinyatakan menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{3.9}$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman jika nilai rasio redaman (*damping ratio*) kecil, sehingga persamaan (3.9) menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{3.10}$$

Persamaan (3.10) diasumsikan pada getaran bebas, sehingga vektor $\{y\}$ berbentuk

$$\{y\}=\{\phi\}z \tag{3.11a}$$
$$\{\ddot{y}\}=\{\phi\}\ddot{z} \tag{3.11b}$$

$\{\phi\}$ adalah vektor *mode shape* yaitu suatu vektor yang tidak berdimensi, yang memiliki paling sedikit sebuah elemen yang tidak sama dengan nol. Sedangkan z dan $\ddot{z}$ adalah vektor perpindahan dan vektor percepatan. Jika persamaan (3.11) disubtitusikan ke dalam persamaan (3.10), akan didapatkan

$$[M]\{\phi\}\ddot{z}+[K]\{\phi\}z=\{0\} \tag{3.12}$$

$[M]$ dan $[K]$ adalah matriks konstan dan pada sebuah hipotesis disebutkan bahwa $\{\phi\}$ juga merupakan matriks konstan, akan didapatkan

$$\ddot{z}+(\text{constan})\,z=0 \tag{3.13}$$

Jika konstanta di atas adalah ω_n^2 (*undamped natural frequency*), persamaan (3.13) menjadi

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = 0 \tag{3.14}$$

Persamaan (3.14) diselesaikan dengan

$$z = A \sin \omega t \tag{3.15}$$

sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$\{y\} = \{\phi\} A \sin \omega t \tag{3.16a}$$
$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{\phi\} A \sin \omega t \tag{3.16b}$$

Persamaan (3.16) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.10) didapatkan

$$(-\omega^2 [M]\{\phi\} A \sin \omega t + [K]\{\phi\} A \sin \omega t) = 0 \tag{3.17}$$

Persamaan (3.17) akan ada penyelesaiannya (*nontrivial solution*), jika A dan ω keduanya adalah tidak sama dengan nol, sehingga

$$\{[K] - \omega^2 [M]\}\{\phi\} = 0 \tag{3.18}$$

Suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas jika nilai determinan sama dengan nol, sehingga

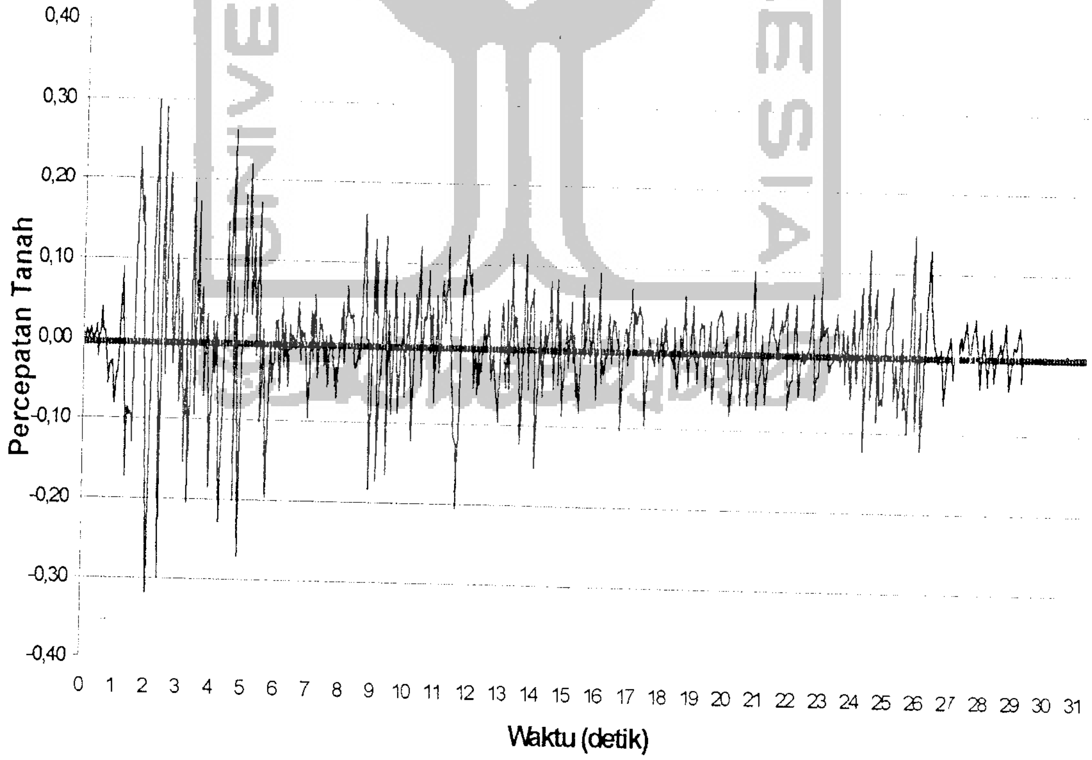
$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \tag{3.19}$$

Persamaan (3.19) disebut dengan *eigenproblem*. Nilai determinan dari persamaan (3.19) akan menghasilkan suatu persamaan polinomial dengan derajat ke-n yaitu $\lambda = \omega^2$, kemudian nilai λ yang diperoleh disubtitusikan ke persamaan (3.18), akan menghasilkan nilai *mode shape* $\{\phi\}_n$ dan simpangan $(y)_n$. Indeks n menunjukkan ragam/pola goyangan.

3.4 Persamaan Gerak Akibat Beban Gempa

Beban gempa adalah suatu beban yang unik. Umumnya beban yang bekerja pada struktur menggunakan satuan gaya, tetapi beban gempa berupa percepatan tanah. Beban lain biasanya statis, tidak berubah pada periode waktu yang pendek, tetapi beban gempa adalah beban yang dinamis yang berubah dengan sangat cepat dalam periode waktu yang pendek, dapat diartikan beban gempa berubah setiap detik. Beban lain biasanya bekerja pada arah vertikal, tetapi beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal maupun horisontal bahkan beban gempa dapat berupa putaran (Hu, Liu and Dong, 1996).

Analisis yang didasarkan pada riwayat waktu dapat digunakan sebagai beban gempa yang berpengaruh pada struktur. Pada tugas akhir ini dipakai riwayat waktu gempa El Centro, 1940, seperti pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Percepatan Tanah Gempa El Centro,1940 (Chopra,1995)

Persamaan gerakan struktur yang dikenai beban gempa, dapat diturunkan melalui suatu pendekatan yang sama seperti pada persamaan gerakan struktur berderajat kebebasan tunggal pada Gambar 3.4.a, sedangkan model matematisnya pada Gambar 3.4.b.

Dengan menggunakan konsep keseimbangan dinamis, dari *free body diagram* pada Gambar 3.4.c, akan didapatkan persamaan

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0 \tag{3.20}$$

$$F_M(t) = m \,.\, \ddot{y}(t)\,, \qquad F_D(t) = c \,.\, \dot{y}(t)\,, \quad \text{dan} \quad F_S(t) = k \,.\, y(t) \tag{3.21}$$

Sedangkan $\ddot{y}i(t)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.4a adalah

$$\ddot{y}i(t) = \ddot{y}g(t) + \ddot{y}(t) \tag{3.22}$$

F_M adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_s adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekuatan kolom, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan, dan m, c, k masing-masing adalah massa, redaman , dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.22) ke dalam (3.21), maka persamaan (3.21) dapat ditulis menjadi:

$$m\ddot{y}i(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0, \tag{3.23}$$

$$m(\ddot{y}g\,(t) + \ddot{y}(t)) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0, \tag{3.24}$$

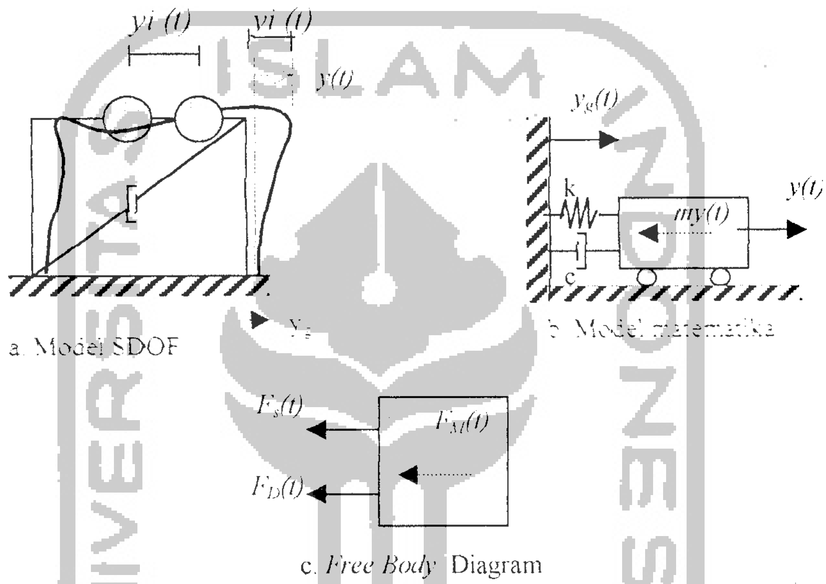
$$m\ddot{y}g\,(t) + m\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = 0, \tag{3.25}$$

$$m\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = -\,m\ddot{y}g\,(t) \tag{3.26}$$

Persamaan (3.26) adalah persamaan differensial gerakansuatu massa dengan derakebebasan tunggal akibat (*base motion*). Ruas kanan pada persamaan (3.26) biasa disebut sebagai beban gempa. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-

masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}, \dot{y}, dan\ y$ sehingga persamaan (3.26) dapat ditulis menjadi :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \qquad (3.27)$$



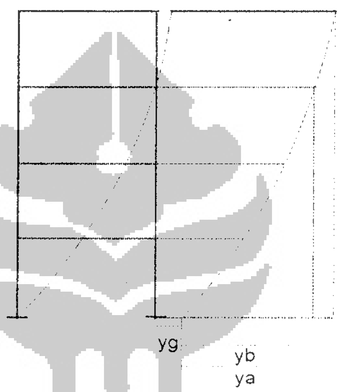
Gambar 3.4. Model Sistem SDOF dengan Beban Gempa

3.5 Jenis-jenis Simpangan dan Efeknya Terhadap Kerusakan

Jenis simpangan ada tiga, yaitu simpangan relatif, simpangan antar tingkat, dan simpangan absolut.

1. Simpangan Relatif

Simpangan ini adalah simpangan yang dihitung relatif terhadap lantai 1. Simpangan relatif ini mempunyai efek yang berpengaruh terhadap *structural pounding*. Masalah *structural pounding* ini biasa terjadi pada bangunan yang berdekatan untuk memaksimalkan penggunaan lahan, hal ini dapat menyebabkan kerusakan yang fatal pada bangunan bahkan dapat menyebabkan kerusakan total. Hal ini dapat dicegah dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang saling berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan horisontal plastik pada setiap tingkat. Pada simpangan ini dihitung relatif lantai 4 terhadap pondasi yaitu *ya* dan simpangan relatif lantai 3 terhadap pondasi yaitu *yb* yang ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Model Simpangan

2. Simpangan Antar Tingkat (*Inter Story Drift*)

Simpangan ini adalah simpangan yang terjadi pada tiap tingkat, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan lantai atas dikurangi simpangan lantai bawah. *Inter story drift* terjadi karena kecacatan/kekurangan perencanaan konfigurasi bangunan yang berhubungan dengan kekakuan struktur. Distribusi kekakuan struktur terjadi secara vertikal tidak merata yang menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah. *Inter story drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada daerah tingkat lemah, oleh karena itu kerusakan struktur akibat ini sangat sering terjadi. Besar simpangan antar tingkat dihitung dengan $(y_a - y_b)$ yang ditunjukkan pada Gambar 3.5.

3. Simpangan absolut

Simpangan absolut merupakan penjumlahan antar simpangan relatif tiap lantai dengan simpangan akibat tanah yaitu y_g dapat dihitung dengan $(y_a + y_g)$, yang ditunjukkan pada Gambar 3.5. Simpangan absolut mempunyai pengaruh terhadap kemungkinan terjadinya benturan antar bangunan yang berdekatan (*struktural pounding*). Simpangan tanah pada keadaan *rigid motion* umumnya dianggap tidak menyebabkan perbedaan simpangan dan kecepatan antara tanah dengan massa struktur, sehingga simpangan tanah dianggap sama dengan nol.

3.6 Persamaan Differensial Independen (*Uncoupling*)

Pada kondisi standar, struktur yang mempunyai n-derajat kebebasan akan mempunyai n-mode. Pada kondisi ini, masing-masing mode akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap-tiap massa. Simpangan massa ke-m atau y_m dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap mode. Kontribusi mode ke-n terhadap simpangan horisontal massa ke-m tersebut dinyatakan dalam produk antara ϕ_{mn} dengan suatu modal amplitudo Z_n yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\} \qquad (28.a)$$
$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\} \qquad (28.b)$$
$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\} \qquad (28.c)$$

Subtitusi persamaan (3.28) ke dalam persamaan (3.27) akan diperoleh

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\}+[C][\phi]\{\dot{Z}\}+[K][\phi]\{Z\}=-[M]\{1\}\ddot{y} \tag{3.29}$$

Apabila persamaan (3.29) dikalikan dengan *transpose* suatu mode $\{\phi\}^T$, diperoleh

$$\{\phi\}^T[M][\phi]\{\ddot{Z}\}+\{\phi\}^T[C][\phi]\{\dot{Z}\}+\{\phi\}^T[K][\phi]\{Z\}=-\{\phi\}^T[M]\{1\}\ddot{y} \tag{3.30}$$

Misal, diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan (3.30) berbentuk

$$\lfloor \phi_{11} \quad \phi_{221} \quad \phi_{31} \rfloor \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

Berdasarkan hubungan orthogonal, maka untuk mode ke-1 persamaan (3.31) akan menjadi

$$\lfloor \phi_{111} \quad \phi_{221} \quad \phi_{331} \rfloor \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \tag{3.32}$$

Dengan catatan, persamaan di atas dalam hubungan orthogonal, $m = n$. Pada kondisi orthogonal apabila m tidak sama dengan n, perkalian matriks sama dengan nol.

$$\{\phi\}_m^T[M]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.33a}$$

$$\{\phi\}_m^T[K]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.33b}$$

$$\{\phi\}_m^T[C]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.33c}$$

Untuk mode ke-n, secara umum persamaan (3.32) dapat ditulis dengan

$$\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n \ddot{Z}_n \tag{3.34}$$

Cara diatas juga berlaku untuk suku ke-2 dan ke-3 pada persamaan (3.29). Berdasarkan hubungan orthogonal persamaan (3.30) akan menjadi

$$\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n\ddot{Z}_n + \{\phi\}_n^T[C]\{\phi\}_n\dot{Z}_n + \{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_n Z_n = -\{\phi\}_n^T[M]\{1\}\ddot{y} \tag{3.35}$$

Persamaan (3.35) adalah persamaan differensial yang bebas/*independent* antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan orthogonal, baik orthogonal matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan. Dengan demikian untuk *n*-derajat dengan *n*-persamaan diferensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent uncoupling*. Berdasarkan sifat-sifat tersebut maka persamaan differensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh mode.

Berdasarkan persamaan (3.35), dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass*), redaman dan kekakuan sebagai berikut

$$M_n^* = \{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n \tag{3.36a}$$

$$C_n^* = \{\phi\}_n^T[C]\{\phi\}_n \tag{3.36b}$$

$$K_n^* = \{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_n \tag{3.36c}$$

Dengan definisi seperti pada persamaan (3.36) maka persamaan (3.35) menjadi

$$M_n^*\ddot{Z}_n + C_n^*\dot{Z}_n + K_n^*Z_n = -P_n^*\ddot{y}, \tag{3.37}$$

dengan,

$$P_n^* = \{\phi\}_n^T[M]\{I\} \tag{3.38}$$

Terdapat suatu hubungan bahwa

$$\xi_n = \frac{C_n^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_n^*}{2M_n^*\omega_n}\ ,\ \text{maka}\ \frac{C_n^*}{M_n^*} = 2\xi_n\omega_n \tag{3.39a}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_n^*}{M_n^*}\ \text{dan}\ \Gamma_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} \tag{3.39b}$$

Dengan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.39), maka persamaan (3.38) akan menjadi

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = -\Gamma_n\ddot{y} \tag{3.40}$$

dan

$$\Gamma_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} = \frac{\{\phi\}_n^T[M]\{1\}}{\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n} \tag{3.41}$$

Persamaan (3.41) sering disebut dengan partisipasi setiap mode atau *mode participation factor*. Selanjutnya persamaan (3.40) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n} + 2\xi_n\omega_n\frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n} + \omega_n^2\frac{Z_n}{\Gamma_n} = -\ddot{y} \tag{3.42}$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa

$$\ddot{q}_n = \frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n}\ ,\ \dot{q}_n = \frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n}\ \ dan\ \ q_n = \frac{Z_n}{\Gamma_n} \tag{3.43}$$

Maka persamaan (3.42) menjadi

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\ddot{y} \tag{3.44}$$

Persamaan (3.44) adalah persamaan diferensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode.

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode ϕ_{mn} telah diperoleh. Nilai $q, \dot{q}$ dan $\ddot{q}$ dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai Z_n dapat dihitung. Dengan demikian simpangan horisontal setiap tingkat akan dapat dihitung.

3.7 Respon Struktur Terhadap Beban Gempa

Persamaan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.27). Nilai $q(t)$ dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.27) dengan persamaan gerakan mode ke-n sistem dari SDOF. Sistem SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency*) (ω_n) dan rasio redaman (ξ_n) mode ke-n dari sistem MDOF, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots, i$.

Nilai yang akan dicari adalah $q_n(t)$, misalnya dipergunakan *Newmark's Acceleration Method* untuk *unconditionally stable procedures*, proses integrasi adalah sebagai berikut.

Pada *Newmark's Acceleration Method* diperoleh hubungan awal bahwa

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{q}_n + (\gamma \cdot \Delta t)\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} &= q_n + (\Delta t)\dot{q}_n + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{q}_n + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{q}_{n+1} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Parameter γ dan β untuk *Newmark's Average Acceleration Method* adalah $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$, persamaan (3.45) disubstitusikan ke persamaan berikut

$$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n \qquad \Delta\dot{q}_n = \dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n \qquad \Delta\ddot{q}_n = \ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n \tag{3.46a}$$

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \tag{3.46b}$$

Dari substitusi persamaan (3.45) ke persamaan (3.46) diperoleh

$$\Delta\dot{q}_n = (\Delta t)\ddot{q}_n + (\gamma \cdot \Delta t)\Delta\ddot{q}_n \tag{3.47a}$$

$$\Delta q_n = (\Delta t)\dot{q}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{q}_n + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{q}_n \tag{3.47b}$$

Dari persamaan (3.47b) diperoleh

$$\Delta\ddot{q}_n = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta q_n - \frac{1}{\beta\cdot\Delta t}\dot{q}_n - \frac{1}{2\beta}\ddot{q}_n \tag{3.48}$$

Substitusi persamaan (3.48) ke dalam persamaan (3.47a), diperoleh persamaan

$$\Delta\dot{q}_n = \frac{\gamma}{\beta\cdot\Delta t}\Delta q_n - \frac{\gamma}{\beta}\dot{q}_n + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{q}_n \tag{3.49}$$

Substitusikan persamaan (3.48) dan persamaan (3.49) ke dalam persamaan (3.44), akan diperoleh

$$\left(\omega^2 + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta\cdot\Delta t} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\right)\Delta q_n = \Delta y + \left(\frac{1}{\beta\cdot\Delta t} + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta}\right)\dot{q}_n + \left[\frac{1}{2\beta} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)2\xi\omega\right]\ddot{q}_n \tag{3.50}$$

Persamaan (3.50) dapat ditulis menjadi

$$\Delta q_n = \frac{\Delta\ddot{y}_n + a\cdot\dot{q}_n + b\cdot\ddot{q}_n}{\hat{k}} \tag{3.51}$$

$$a = \left[\frac{4}{\Delta t} + 4\xi\omega\right] \tag{3.52a}$$

$$b = 2 \tag{3.52b}$$

$$\hat{k} = \left[\omega^2 + \frac{4\xi\omega}{\Delta t} + \frac{4}{\Delta t^2}\right] \tag{3.52c}$$

Untuk memulai iterasi diperlukan anggapan bahwa

$$q_0 = 0 \tag{3.53a}$$

$$\dot{q}_0 = 0 \tag{3.53b}$$

$$\ddot{q}_0 = 0 \tag{3.53c}$$

maka

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n \tag{3.54a}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta\dot{q}_n \tag{3.54b}$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_n + \Delta\ddot{q}_n \tag{3.54c}$$

sehingga

$$\ddot{q}_0 = \ddot{y}_0 - \dot{q}_0 2\xi\omega - \ddot{q}\omega^2 = 0 \tag{3.55a}$$

$$\Delta\dot{q}_n = \frac{2}{\Delta t}\Delta q_n - 2\dot{q}_n \tag{3.55b}$$

$$\Delta\ddot{q}_n = \frac{4}{(\Delta t)^2}\left(\Delta q_n - \Delta t\dot{q}_n\right) - 2\ddot{q}_n \tag{3.55c}$$

Setelah diperoleh nilai q_n untuk tiap-tiap mode, selanjutnya nilai simpangan tiap mode dapat diperoleh $y_n(t)$,

$$y_n(t) = \Gamma_n\ \phi_n\ q_n(t) \tag{3.56}$$

Simpangan antar tingkat (*inter storey drift*) dari suatu titik pada suatu lantai harus ditentukan sebagai simpangan horisontal titik itu, relatif terhadap titik yang sesuai pada lantai dibawahnya. Perbandingan antara simpangan antar tingkat (*inter storey drift*) dan tinggi tingkat yang bersangkutan tidak boleh melampaui 0,005 , dengan ketentuan bahwa dalam segala hal simpangan tersebut tidak boleh melebihi dari 2 cm (PPKGTG,1987).