BAB III

LANDASAN TEORI

Landasan teori memuat dasar-dasar teori yang akan dipergunakan secara garis besar dan merupakan tuntunan yang akan dipergunakan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Bagian ini juga akan memuat teori-teori dinamika stuktur, model-model matematik dan penjabarannya.

3.1 Prinsip Bangunan Geser

Anggapan-anggapan dalam dinamika struktur sangatlah diperlukan untuk mempermudah penyelesaian masalah tetapi masih proporsional. Anggapan-anggapan dan penyederhanaan yang digunakan adalah sesuai dengan prinsip bangunan geser adalah:

1. massa lantai dari struktur termasuk beban yang harus didukung dianggap terkonsentrasi pada satu titik (*lumped mass*) ditengah bentang dan kolom dianggap tidak bermassa,
2. balok dan pelat lantai dianggap relatif sangat kaku dibanding kolom, *beam coloumn joint* mampu menahan rotasi (*joint* tidak berotasi dan simpangan hanya kearah horisotal tanpa adanya puntir),

3. simpangan massa dianggap tidak dipengaruhi oleh beban aksial kolom, sehingga dianggap balok harus tetap horisontal sebelum dan setelah terjadi penggoyangan.

Dengan anggapan-anggapan tersebut, portal seolah-olah menjadi bangunan kantilever yang bergoyang akibat gaya lintang saja.

3.2 Persamaan Gerak Derajat Kebebasan Tunggal (SDOF)

Bagian terpenting dari suatu struktur linear elastis yang dikenai beban luar adalah massa, kekakuan dan redaman. Sistem dengan derajat kebebasan tunggal mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu.

Didalam masalah dimamik, lebih baik jika digunakan metode yang menghasilkan suatu analisa yang tersusun dan sistematik yaitu dengan penyederhanaan-penyederhanaan dan anggapan sehingga struktur dapat dimodel sedemikian, sehingga dapat ditelaah secara matematik tanpa adanya kehilangan ketelitian yang berarti. Gambar 3.1a memperlihatkan contoh struktur yang dianggap sebagai sistem dengan koordinat perpindahan tunggal. Model analisis sistem berderajat kebebasan tunggal, dijelaskan dengan model matematik seperti yang dikemukakan oleh Chopra (1995). Pada Gambar 3.1c , elemen massa m menyatakan massa dan sifat inersia struktur, elemen pegas k menyatakan gaya balik elastis dan kapasitas energi potensial struktur, elemen redaman c menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi dari struktur dan gaya persatuan waktu, sedangkan $p(t)$ menyatakan gaya luar yang bekerja dalam suatu sistem struktur.

Hubungan analisis antara perpindahan y dan waktu t diberikan Hukum Newton II untuk gerak yaitu bahwa gaya adalah produk dari massa dan percepatan yang dapat ditulis seperti persamaan sebagai berikut.

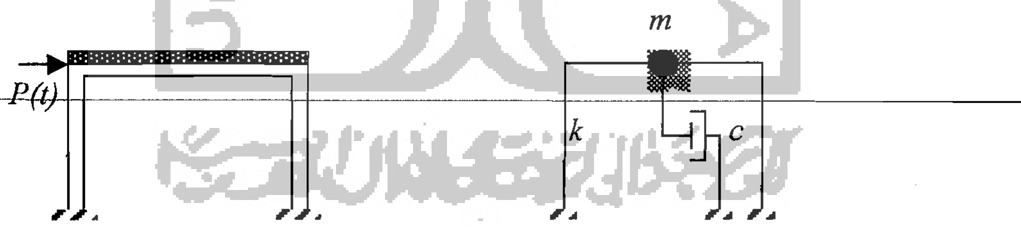
$$F = m\,a \tag{3.1}$$

Dimana F adalah resultan gaya yang bekerja pada partikel massa m dan a adalah resultan percepatan.

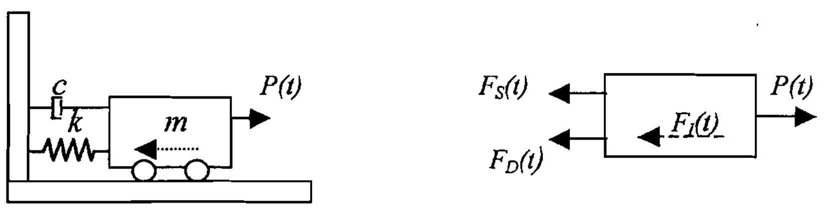
Salah satu pendekatan untuk menyusun persamaan gerak suatu massa *(differential equations of motion)* adalah dengan memakai prinsip *d'Alembert* yang berdasar pada Hukum Newton II. Prinsip d'Alembert mengatakan bahwa :

> suatu sistem dalam keadaan keseimbangan dinamik dapat diperoleh dengan menjumlahkan gaya luar dengan *fictitious force* yang biasanya disebut gaya inersia (Widodo,1997)

Penggunaan prinsip d'Alembert memungkinkan pemakai persamaan kesetimbangan untuk mendapatkan persamaan gerak seperti pada struktur SDOF yang terlihat seperti pada Gambar 3.1.



(a) Struktur SDOF (b) Struktur SDOF yang disederhanakan



(c) Model Matematik (d) Free Body Diagram

Gambar 3.1 Beban Dinamik Pada Struktur SDOF

Berdasarkan keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1(d) adalah

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = P(t) \tag{3.2}$$

dengan

$$F_I(t) = m\ddot{y}(t),\ F_D(t) = c\dot{y}(t) \ \text{ dan } \ F_S(t) = ky(t) \tag{3.3}$$

F_I adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekakuan kolom, *P(t)* adalah beban dinamik dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan, dan m, c, k masimg-masing adalah massa, redaman, dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.3) ke dalam persamaan (3.2), sehingga persamaan diatas dapat ditulis menjadi,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = P(t) \tag{3.4}$$

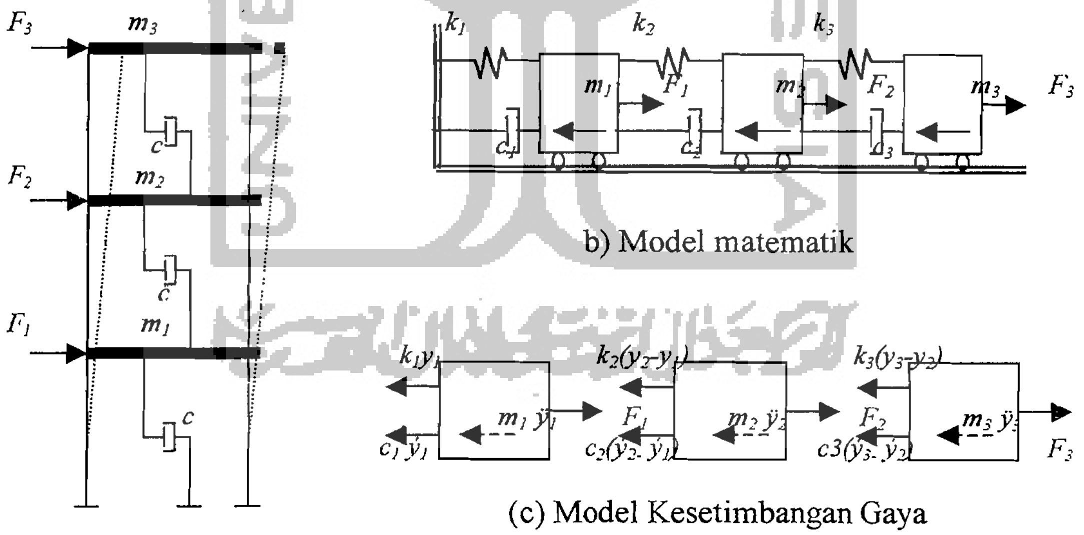
persamaan diatas disebut juga persamaan differensial gerakan *(differential equation of motion)* pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, *P(t)* masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan, dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P, sehingga persamaan (3.4) dapat ditulis dengan

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \tag{3.5}$$

3.3 Persamaan Gerak Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Secara umum struktur bangunan gedung tidaklah selalu dapat dinyatakan dalam suatu system yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Struktur bangunan gedung justru banyak yang mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF).

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan (*lumped mass*) pada tiap-tiap tingkatnya, dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan dipandang sebagai struktur kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan defferensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, maka dapat digunakan anggapan *shear building*, selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $F(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan, dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, F sebagaimana penulisan pada struktur SDOF di muka.



b) Model matematik

(c) Model Kesetimbangan Gaya

a) Struktur MDOF

Gambar 3.2 Struktur MDOF

Pada struktur bangunan gedung bertingkat 3 seperti pada Gambar 3.2, maka struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai *n* tingkat akan mempunyai *n* derajat kebebasan dan mempunyai *n* modes.

Untuk memperoleh persamaan differential gerakan pada struktur MDOF umumnya dipakai goyangan senada dengan mode pertama yaitu goyangan yang $y_3 > y_2 > y_1$. Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada gambar 3.2c, maka akan diperoleh persamaan seperti di bawah ini.

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2(y_2 - y_1) - F_1 = 0 \quad (3.6a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3(y_3 - y_2) - F_2 = 0 \quad (3.6b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3(y_3 - y_2) - F_3 = 0 \quad (3.6c)$$

Pada persamaan-persamaan tersebut diatas tampak bahwa untuk memperoleh kesetimbangan dinamik suatu massa yang ditinjau ternyata dipengaruhi oleh kekakuan, redaman dan simpangan massa sebelum dan sesudahnya. Persamaan dengan sifat-sifat seperti itu umumnya disebut *coupled equation* karena persamaan-persamaan tersebut akan tergantung satu sama lain. Penyelesaian persamaan *coupled* harus dilakukan secara simultan artinya dengan melibatkan semua persamaan yang ada. Pada struktur dengan derajat kebebasan banyak, persamaan differensial gerakannya merupakan persamaan yang *dependent* atau *coupled* antara satu dengan yang lain.

Selanjutnya dengan menyusun persamaan - persamaan diatas menurut parameter yang sama (percepatan, kecepatan dan simpangan) akan diperoleh,

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = F_1 \tag{3.7a}$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3 y_3 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = F_2 \tag{3.7b}$$

$$m_3\ddot{y}_3 - c_3 y_2 + c_3 y_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = F_3 \tag{3.7c}$$

Persamaan (3.7) dapat ditulis dalam matriks yang lebih kompak,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = (F) \tag{3.8}$$

$[M]$, $[C]$, $[K]$ berturut-turut adalah matrik massa yang merupakan matrik diagonal sedangkan matrik redaman dan kekakuan merupakan matrik yang simetris.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.9a}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{3.9b}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.9c}$$

sedangkan vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban adalah sebagai berikut :

$$\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}, \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}, \{y\} = \begin{Bmatrix} y \\ y \\ y \end{Bmatrix} dan \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{3.9d}$$

3.3.1 Nilai Karakteristik *(Eigen Problem)*

Suatu struktur umumnya akan bergoyang akibat adanya pembebanan dari luar, misalnya gerakan akibat beban angin, gerakan akibat putaran mesin, ataupun akibat gerakan tanah. Gerakan tersebut dikelompokkan sebagai getaran yang dipaksa *(forced vibration system).*

Getaran atau goyangan suatu struktur yang disebabkan oleh adanya kondisi awal *(initial values)* baik berupa simpangan awal maupun kecepatan awal disebut getaran bebas *(free vibration system).* Pada kenyataannya getaran bebas jarang terjadi pada struktur MDOF, tetapi membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran atau karakteristik dari struktur yang selanjutnya akan sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya. Besaran-besaran tersebut adalah frekuensi sudut dan *normal modes.*

Pada getaran bebas untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak, maka persamaan differensial geraknya adalah seperti pada persamaan (3.8) dengan nilai $\{F\}$ sama dengan vektor nol.

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \tag{3.10}$$

frekuensi sudut pada struktur dengan redaman *(damped frequency)* nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, bila nilai rasio redaman cukup kecil dan diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak. Untuk nilai $[C] = 0$ persamaan (3.10) menjadi :

$$[M]\{\ddot{y}\} + +[K]\{y\} = 0 \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) adalah persamaan differensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman, maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik, menurut bentuk :

$$Y = \omega(\phi)_i \sin(\omega t) \tag{3.12a}$$

$$\dot{Y} = \omega(\phi)_i \cos(\omega t) \tag{3.12b}$$

$$\ddot{Y} = -\omega^2(\phi)_i \sin(\omega t) \tag{3.12c}$$

$\{\varnothing\}_i$ adalah ordinat massa pada mode ke-*i*. Persamaan (3.12) disubstitusikan kedalam persamaan (3.11), sehingga akan diperoleh :

$$-\omega^2[M]\{\varnothing\}_i \sin(\omega t) + [K]\{\varnothing\}_i \sin(\omega t) - 0 \tag{3.13}$$

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\varnothing\}_i = 0 \tag{3.14}$$

persamaan (3.14) adalah persamaan *eigen problem.*

Persamaan simultan, baik persamaan yang homogen maupun yang tidak homogen dapat diselesaikan dengan memakai dalil atau hukum Cramer (1704-1752). Dalil tersebut menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matrik yang merupakan koefisien dari vector $\{\varnothing\}i$ adalah nol, sehingga :

$$\{[K] - \omega^2[M]\} = 0 \tag{3.15}$$

Jumlah mode pada struktur dengan derajat kebebasan banyak biasanya dapat dihubungkan dengan jumlah massa. Mode ini sendiri adalah ragam goyangan suatu struktur bangunan. Apabila jumlah derajat kebebasan adalah n, maka persamaan (3.15) akan menghasilkan ω^2 untuk i = 1,2,3,...,n. Selanjutnya substitusi masing-masing frekuensi sudut (ω_i) kedalam persamaan (3.14) akan diperoleh nilai-nilai $\varnothing_i$, $\varnothing_2$, $\varnothing_3$, ... $\varnothing_n$.

3.3.2 Frekuensi Sudut dan Normal Mode

Normal mode adalah suatu istilah yang sering dipakai pada problem dinamika struktur, kata tersebut diterjemahkan sebagai ragam goyangan. Suatu persamaan differensial gerakan dapat diperoleh dengan memperhatikan diagram gaya *(free body diagram).* Untuk menghitung sekaligus menggambarkan normal mode, maka diambil sebuah model struktur 3 DOF dengan mengabaikan nilai redaman (C), sehingga persamaannya menjadi :

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) - 0 \qquad (3.16a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2)_2 = 0 \qquad (3.16b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2)_3 = 0 \qquad (3.16c)$$

Persamaan (3.16) dapat ditulis dalam bentuk sederhana sebagai berikut :

$$m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = 0 \qquad (3.17a)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = 0 \qquad (3.17b)$$

$$m_3\ddot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 = 0 \qquad (3.17c)$$

Persamaan (3.17) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

Selanjutnya persamaan *eigen problem* adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

ϕ_i adalah nilai atau ordinat yang berhubungan dengan massa ke-*i* pada ragam atau pola goyangan ke-*i*., persamaan (3.19) akan ada penyelesaiannya apabila dipenuhi nilai determinan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.20}$$

Apabila persamaan (3.20) tersebut diteruskan maka nilai diterminannya adalah :

$$\begin{aligned} &(k_3(k_2 + k_3))\{(k_1 + k_2) - \omega^2\} - (k_1 + k_2)\{(k_3 m_2 \omega^2) - (m_2 m_3 \omega^4) + k_3^2\} \\ &- \omega^4 \{(k_3 m_1 m_2) - ((k_2 + k_3) m_1 m_3) + (m_1 m_2 m_3 \omega^2)\} \\ &+ k_2^2(k_3 - \omega^2 m_3) + m_1 \omega^2 k_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Substitusi nilai ω_i yang diperoleh dari persamaan (3.21) kedalam persamaan (3.19) maka akan diperoleh nilai koordinat yang berhubungan dengan suatu massa pada setiap pola goyangan umumnya dapat dituliskan dalam bentuk baku yaitu ϕ_{ij}.

Dengan indeks-*i* menunjukkan massa dan indeks-*j* menunjukkan nomor ragam goyangan, dengan demikian ϕ_{ij} adalah ordinat yang berhubungan dengan massa ke-*i* pada pola goyangan ke-*j*. Substitusi ω_1 kedalam persamaan (3.19) akan diperoleh nilai-nilai koordinat untuk ragam atau pola goyangan ke-1, substitusi ω_2 akan diperoleh nilai-nilai koordinat untuk ragam atau pola goyangan ke-2, dan substitusi ω_3 akan diperoleh pola goyangan ke-3. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks yang umum disebut dengan modal matriks.

$$\phi_{ij} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

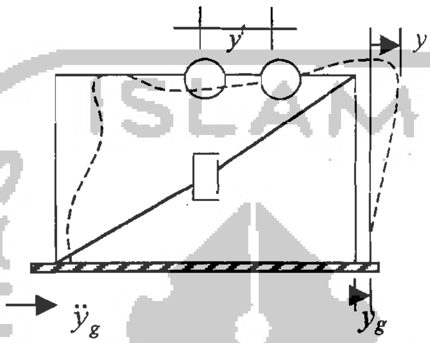
Nilai-nilai *mode shapes* $\varnothing_{ij}$ tidak tergantung pada beban luar, melainkan tergantung dari property fisik struktur, misalnya massa m_i dan kekakuan k_i. Selain itu nilai *mode shapes* tidak dipengaruhi waktu, artinya nilai itu akan tetap jika nilai massa dan kekakuan tidak berubah, nilai *mode shapes* juga tidak dipengaruhi oleh frekuensi beban. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa nilai *mode shapes* adalah bebas dari pengaruh redaman, waktu, dan frekuensi beban serta hanya untuk struktur yang elastik.

3.4 Persamaan Gerak akibat Beban Gempa

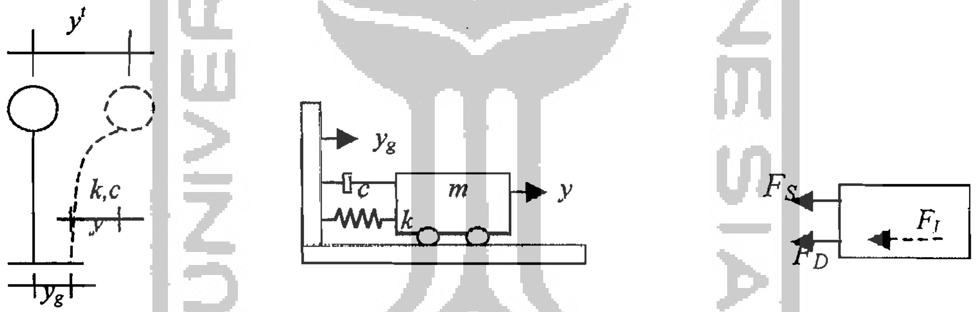
Beban gempa adalah beban yang merupakan fungsi dari waktu. Umumnya beban yang bekerja pada struktur menggunakan satuan gaya, tetapi beban gempa berupa percepatan tanah, beban lain biasanya statis, tidak berubah pada periode waktu yang pendek. Tetapi beban gempa merupakan beban dinamis yang berubah secara cepat dalam waktu yang pendek. Beban lain biasanya bekerja secara vertikal tetapi beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal maupun horisontal bahkan bisa berupa putaran, (Hu, Liu and Dong, 1996).

Pada daerah rawan gempa, masalah yang prinsip dan perlu diperhatikan adalah perilaku struktur bagian bawah yang terkena beban gempa. Perpindahan tanah dinotasikan dengan y_g, sedangkan antara massa dengan tanah dinotasikan dengan y, sehingga perpindahan total yang terjadi menurut Chopra, 1995 adalah:

$$y^t = y + y_g \tag{3.23}$$



Gambar 3.3 Struktur SDOF dengan beban gempa



(a) Idealisasi SDOF (b) Model Matematik (c) *Free Body* Diagram

Gambar 3.4 Sistem Derajat Kebebasan Tunggal dengan Beban Gempa

Dengan menggunkan konsep keseimbangan dinamis dari *free body diagram* pada Gambar 3.4c akan didapatkan persamaan

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = 0 \tag{3.24a}$$

$$F_I(t) = m\ddot{y}^t(t),\ F_D(t) = c\dot{y}(t) \quad \text{dan} \quad F_S(t) = ky(t) \tag{3.24b}$$

sedangkan $\ddot{y}^t(t)$, sebagaiman terlihat pada Gambar 3.3,

$$\ddot{y}^t(t) = \ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t) \tag{3.25}$$

F_I adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekakuan kolom, $\ddot{y}_g(t)$ adalah percepatan tanah akibat gempa dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan, dan m, c, k masing-masing adalah massa, redaman, dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.24b) dan (3.25) ke dalam persamaan (3.24a), maka persamaan (3.24a) dapat ditulis menjadi:

$$m\ddot{y}^t(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \tag{3.26a}$$

$$m\left(\ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t)\right) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \tag{3.26b}$$

$$m\ddot{y}(t) + m\ddot{y}_g(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \tag{3.26c}$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_g(t) \tag{3.26d}$$

Persamaan (3.26d) adalah persamaan differensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat *base motion*. Ruas kanan pada persamaan (3.26d) biasa disebut sebagai beban gempa. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, dan simpangan yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y sehingga persamaan (3.26d) dapat ditulis dengan:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \tag{3.27}$$

3.5 Persamaan Differensial Independen (*Uncoupling*)

Pada kondisi standar, struktur yang mempunyai n derajat kebebasan akan mempunyai *n modes*. Pada prinsip ini, masing-masing mode akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap massa. Simpangan massa ke-i tersebut dinyatakan dalam produk antara ϕ_{ij} dengan suatu modal amplitudo Z_j yang dinyatakan dalam bentuk :

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\} \tag{3.28a}$$

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\} \tag{3.28b}$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\} \tag{3.28c}$$

Substitusi persamaan (3.28) kedalam persamaan (3.27) akan diperoleh :

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\phi]\{\dot{Z}\} + [K][\phi]\{Z\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_g \tag{3.29}$$

Apabila persamaan (3.29) dikalikan dengan transponse suatu mode $\{\phi\}^T$, maka

$$\{\phi\}^T[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + \{\phi\}^T[C][\phi]\{\dot{Z}\} + \{\phi\}^T[K][\phi]\{Z\} = -\{\phi\}^T[M]\{1\}\ddot{y}_g \tag{3.30}$$

jika diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan (3.30) berbentuk :

$$\{\phi_{11}\ \phi_{21}\ \phi_{31}\}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

Dengan catatan, persamaan diatas dalam hubungan *orthogonal* apabila $i=j$. Sedangkan apabila i tidak sama dengan j maka perkalian matriks sama dengan nol.

$$\phi_i^T\ [M]\ \phi_j = 0 \tag{3.32a}$$

$$\phi_i^T\ [K]\ \phi_j = 0 \tag{3.32b}$$

$$\phi_i^T\ [C]\ \phi_j = 0 \tag{3.32c}$$

Untuk mode ke-j maka secara umum persamaan (3.32) dapat ditulis :

$$\phi_j^T[M]\{\phi\}_j\ddot{Z}_j \tag{3.33}$$

Analog persamaan (3.33) untuk suku ke-2 dan ke-3 persamaan (3.30) maka persamaan (3.30) akan menjadi :

$$\{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j\{\ddot{Z}\}_j + \{\phi\}_j^T[C]\{\phi\}_j\{\dot{Z}\}_j + \{\phi\}_j^T[K]\{\phi\}_j\{Z\}_j = -\{\phi\}_j^T[M]\{1\}\ddot{y}_g \qquad (3.34)$$

Persamaan (3.34) adalah persamaan deferensial yang bebas atau *independent* antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan *orthogonal*, baik *orthogonal* matrik massa, redaman dan kekakuan. Dengan demikian untuk *n*-derajat dengan *n*-persamaan deifferensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *uncoupling*. Dengan sifat-sifat tersebut maka persamaan differensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh mode.

Berdasarkan persamaan (3.34) maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa *(generalied mass)*, redaman dan kekakuan sebagai berikut :

$$M_j^* = \{\phi\}_j^T[M]\{\phi\}_j \qquad (3.35a)$$

$$C_j^* = \{\phi\}_j^T[C]\{\phi\}_j \qquad (3.35b)$$

$$K_j^* - \{\phi\}_j^T[K]\{\phi\}_j \qquad (3.35c)$$

Dengan definisi seperti persamaan (3.35) maka persamaan (3.34) akan menjadi :

$$M_j^*\ddot{Z}_j + C_j^*\dot{Z}_j + K_j^*Z_j = -P_j^*\ddot{y}_g \qquad (3.36)$$

Dengan,

$$P_j^* = \{\phi\}_j^*[M]\{1\} \qquad (3.37)$$

Terdapat suatu hubungan bahwa :

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_j^*}{2M_j^*\omega_j}\text{ , maka }\frac{C_j^*}{M_j^*} = 2\xi_J\omega_J \qquad (3.38)$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \text{ dan } \Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} \tag{3.39}$$

Dengan hubungan-hubungan seperti pada persamaan (3.36) akan menjadi :

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j\ddot{y}_g \tag{3.40}$$

Dan persamaan (3.40) sering disebut dengan partisipasi setiap mode *(mode participation factor).*

$$\Gamma = \frac{P_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\phi\}_j^T [M]\{1\}}{\{\phi\}_j^T [M]\{\phi\}_j} \tag{3.41}$$

Selanjutnya persamaan (3.41) juga dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma} + 2\xi_j\omega\frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j} + \omega_j^2\frac{Z_j}{\Gamma_j} = -\ddot{y}_g \tag{3.42}$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa:

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j} \tag{3.43}$$

Maka persamaan (3.38) menjadi :

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_g \tag{3.44}$$

Persamaan (3.44) adalah persamaan differensial yang independent karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode.

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode ϕ_{ij} telah diperoleh. Nilai g, $\dot{g}$ dan $\ddot{g}$ dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai Z_i dapat dihitung.

3.6 Respon Terhadap Beban Gempa

Dengan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.44). Nilai *g(t)* dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.44) dengan persamaan gerakan mode ke-*n* system dari SDOF. System SDOF mempunyai frekuensi natural *(natural frekuensi/ω_i)* dan rasio redaman (ξ) mode ke-*i* dari system MDOF, dengan $i = 1,2,3,\ldots,n$

Nilai yang akan dicari adalah $g_i(t)$. dengan memakai *Newmark's Acceleration Method* dengan proses integrasi. Pada *Newmark's Acceleration Method* diperoleh hubungan awal :

$$\dot{g}_{j+1} = \dot{g}_j + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{g}_j + (\gamma\,\Delta t)\ddot{g}_{j+1} \tag{3.45a}$$

$$g_{j+1} = g_j + (\Delta t)\dot{g}_j + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{g}_j + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{g}_{j+1} \tag{3.45b}$$

Dimana parameter γ dan β untuk metode *Newmark's Acceleration* adalah $\gamma = ½$ dan $\beta = ¼$, persamaan 3.45 kemudian disubsitusikan ke persamaan berikut ini,

$$\Delta g_j = g_{j+1} - g_j \qquad \Delta\dot{g}_j = \dot{g}_{j+1} - \dot{g}_j \qquad \Delta\ddot{g}_j = \ddot{g}_{j+1} - \ddot{g}_j \tag{3.46a}$$

$$(\Delta\ddot{y}_g)_j = (\ddot{y}_g)_{j+1} - (\ddot{y}_g)_j \tag{3.46b}$$

Sehingga persamaan (3.45) dapat ditulis menjadi :

$$\Delta\dot{g}_j = (\Delta t)\ddot{g}_j + (\gamma\,\Delta t)\Delta\ddot{g}_j \tag{3.47a}$$

$$\Delta g_j = (\Delta t)\dot{g}_j + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{g}_j + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{g}_j \tag{3.47b}$$

Dari persamaan (3.47b) didapat,

$$\Delta\ddot{g}_j = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta g_j - \frac{1}{\beta\Delta t}\Delta\dot{g}_j - \frac{1}{2\beta}\ddot{g}_j \tag{3.48}$$

Subsitusi persamaan (3.48) dan persamaan (3.47a) didapat :

$$\Delta\dot{g}_j = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta g_j - \frac{\gamma}{\beta}\dot{g}_j + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{g}_j \tag{3.49}$$

Kemudian persamaan (3.48) dan persamaan (3.49) disubsitusikan ke persamaan (3.44)

$$\left(\omega^2 + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta\Delta t} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\right)\Delta g_j = \Delta\ddot{y}_g\left(\frac{1}{\beta\Delta t} + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta}\right)\dot{g}_j + \left(\frac{1}{2\beta} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)2\xi\omega\right)\ddot{g}_j \tag{3.50}$$

Persamaan (3.50) dapat ditulis menjadi ;

$$\Delta g_j = \frac{(\Delta\ddot{y}_g)_j + a\dot{g}_j + b\ddot{g}_j}{\hat{k}} \tag{3.51a}$$

dengan,

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{4}{\Delta t} + 4\xi\omega\right] \\ b &= [2] \\ \hat{k} &= \left[\omega^2 + \frac{4\xi\omega}{\Delta t} + \frac{4}{(\Delta t)^2}\right] \end{aligned} \tag{3.51b}$$

Pada umumnya,

$$\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ \dot{g}_0 &= 0 \\ (\ddot{y}_g)_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

maka,

$$g_{j+1} = g_j + \Delta g_j \tag{3.53a}$$

$$\dot{g}_{j+1} = \dot{g}_j + \Delta\dot{g}_j \tag{3.53b}$$

$$\ddot{g}_{j+1} = \ddot{g}_j + \Delta\ddot{g}_j \tag{3.53c}$$

Sehingga ,

$$\ddot{g}_0 = (\ddot{y}_g)_0 - \dot{g}_0 2\xi\omega - g_0\omega^2 = 0 \tag{3.54a}$$

$$\Delta\dot{g}_j = \frac{2\Delta g_j}{\Delta t} - 2\dot{g}_j \tag{3.54b}$$

$$\Delta\ddot{g}_j = \frac{4\left(\Delta g_j - \Delta\dot{g}_j \Delta t\right)}{\Delta t^2} \tag{3.54c}$$

Dengan persamaan-persamaan yang telah diketahui diatas, apabila percepatan tanah akibat gempa diketahui, maka nilai-nilai g_i dapat dicari. Setelah nilai tersebut diperoleh, dengan partisipasi setiap mode sudah dihitung sebelumnya, maka nilai faktor amplitudo Z_i dapat dihitung. Dengan diperolehnya nilai Z_i dan telah dihitungnya ϕ_{ij} maka nilai simpangan tiap mode $y_i(t)$ dapat diperoleh :

$$y_i(t) = \sum \phi_{ij}\, g_j(t) \tag{3.55}$$

Simpangan antar tingkat *(interstorey drift)* dari suatu titik pada suatu lantai harus ditentukan sebagai simpangan horisontal titik itu relatif terhadap titik yang sesuai pada lantai dibawahnya. Perbandingan antara simpangan antar tingkat *(interstorey drift)* dan tinggi tingkat yang bersangkutan tidak boleh melampaui 0.05%, dengan ketentuan bahwa dalam segala hal simpangan tersebut tidak boleh lebih dari 2 cm (PPKGRG,1987).

3.7 Jenis-jenis Simpangan

Jenis-jenis simpangan yang terjadi pada struktur umumnya ada 3 macam, yaitu simpangan relatif, simpangan antar tingkat dan simpangan absolut. Jenis-jenis simpangan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.5 dan dapat diuraikan sebagai berikut.

3.7.1 Simpangan Relatif

Simpangan relatif tiap lantai menurut persamaan differensial independent (*uncoupling*) adalah simpangan suatu massa yang diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau konstribusi tiap-tiap mode.

$$y_i = \sum \phi_{ij} Z_j \tag{3.56}$$

dimana: y_i = simpangan relatif lantai ke-i

ϕ_{ij} = *mode shapes*, dan

Z_j = modal amplitudo.

3.7.2 Simpangan Antar Tingkat (*Inter-storey Drift*)

Simpangan antar tingkat adalah simpangan yang terjadi pada tiap tingkat, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan relatif lantai atas dikurangi simpangan relatif lantai dibawahnya. *Inter-storey drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada tingkat yang lemah. Terjadinya distribusi kekakuan struktur secara vertikal yang tidak merata akan menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah tersebut. *Inter-storey drift* dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut :

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \tag{3.57}$$

dimana: Δy_i = simpangan antar tingkat,

y_i = simpangan relatif lantai ke-i, dan

y_{i-1} = simpangan relatif lantai ke-(i-1)

3.7.3 Simpangan Absolut

Simpangan absolut merupakan penjumlahan antara simpangan relatif tiap lantai dengan simpangan akibat tanah. Simpangan absolut dihitung dengan rumus:

$$y_t = y_i + y_g \tag{3.58}$$

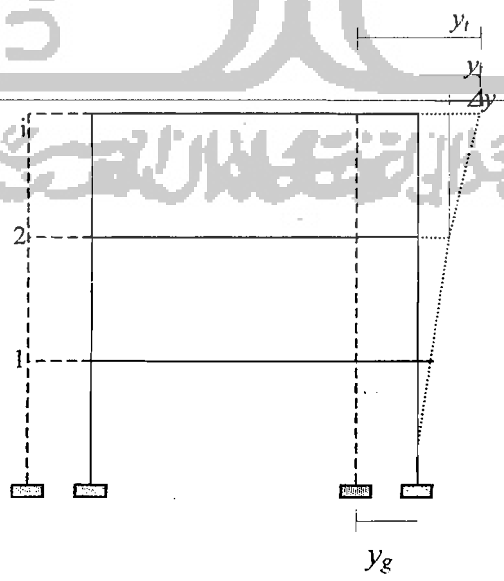
dimana: y_t = simpangan absolut

y_i = simpangan relatif lantai ke-i, dan

y_g = simpangan akibat tanah

Simpangan absolut mempunyai pengaruh terhadap kemungkinan terjadinya benturan antar bangunan yang berdekatan (*structural pounding*). Masalah *stuctural pounding* ini biasa terjadi pada bangunan yang berdekatan karena keterbatasan lahan. Hal ini dapat menyebabkan kerusakan total pada bangunan. *Structural pounding* dapat dicegah dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang berdekatan dengan menghitung simpangan absolut pada setiap lantai.

Simpangan tanah y_g pada keadaan *rigid body motion* umumnya dianggap tidak akan menyebabkan perbedaan simpangan dan kecepatan antara tanah dengan massa struktur. Oleh karena itu, simpangan tanah dianggap sama dengan nol.



Gambar 3.5 Model struktur dengan jenis-jenis simpangannya

3.8 Gaya Horisontal Tingkat

Gaya horisontal tingkat dapat diperoleh setelah simpangan horisontal tingkat diperoleh. Hal ini sesuai dengan prinsip elastik analisis untuk problema dinamika struktur bahwa simpangan horisontal tingkat, gaya horisontal tingkat, dan momen tingkat adalah elastik respon yang penting dicari.

Gaya horisontal tingkat atau gaya horisontal maksimum yang bekerja pada suatu massa sebagai kontribusi dari mode ke-j dapat dicari dari prinsip hubungan antara gaya, simpangan dan kekakuan yaitu :

$$F_j = K\,Y_j \qquad (3.59)$$

dimana : F_j = gaya horisontal tingkat

K = kekakuan tingkat

Y_j = simpangan relatif

Sedangkan gaya geser dasar merupakan penjumlahan dari gaya horisontal tingkat.

$$V = -\left(\sum_{j=1}^{n} F_j\right) \qquad (3.60)$$

3.9 Momen Guling

Momen guling pada gedung bertingkat banyak adalah merupakan perkalian antara gaya horisontal tingkat dengan tinggi bangunan.

$$M_b = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j \qquad (3.61)$$

dimana : M_b = Momen Guling

F_j = Gaya Horisontal Tingkat

h_j = Tinggi Bangunan