

BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Kategori Bangunan

Kategori bangunan tahan gempa adalah sebagai berikut.

3.1.1 Bangunan Beraturan

Berny Andreas (2013) Bangunan beraturan merupakan bangunan yang pada umumnya berbentuk simetris dalam denah dengan sistem struktur yang terbentuk oleh subsistem penahan beban lateral yang arahnya saling tegak lurus dan sejajar dengan sumbu-sumbu utama pembebanan gempa adalah yang searah dengan sumbu-sumbu utama tersebut. Bangunan beraturan lebih diminati untuk perencanaan dibandingkan dengan bangunan tidak beraturan, hal ini disebabkan bangunan beraturan cenderung memiliki pusat massa dan pusat kekakuan yang berhimpit. Pada saat gempa terjadi, titik tangkap gaya gempa terhadap bangunan berada pada pusat massanya, sedangkan perlawanan yang dilakukan oleh bangunan berpusat pada pusat kekakuannya.

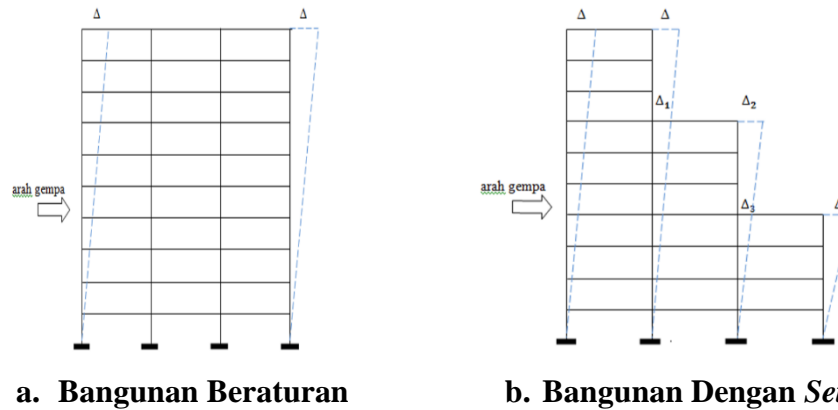
3.1.2 Bangunan *Set-Back*

Bangunan *set-back* lebih diketahui sebagai bangunan dengan tonjolan atau loncatan bidang muka. Bangunan dengan *set-back* pusat massa dan pusat kekakuan tidak terhimpit, sehingga akan terjadi torsi pada bangunan dan juga dapat terjadi perbedaan konsentrasi tegangan pada titik-titik tertentu yang dapat menimbulkan kelelahan dini. Jenis-jenis bangunan *set-back* ada 2 macam, yaitu:

1. Bangunan *set-back* vertikal, merupakan bangunan yang memiliki perubahan elevasi yang ekstrim secara vertikal,
2. Bangunan *set-back* horizontal, merupakan bangunan yang memiliki perbedaan ekstrim secara horizontal.

Bangunan *set-back* mempunyai beberapa kelebihan yaitu memiliki massa yang relatif lebih kecil dibandingkan dengan lantai dibawahnya, sehingga letak titik beratnya berada dibagian bawah bangunan yang menyebabkan bangunan menjadi lebih stabil. Bangunan *set-back* juga memiliki kekurangan yaitu perubahan yang

mendadak pada elevasi bangunan dapat menimbulkan konsentrasi aksi struktural pada lantai tempat terjadinya perubahan ukuran denah.



a. **Bangunan Beraturan**

b. **Bangunan Dengan Set-Back**

Gambar 3.1 Kategori Bangunan

Sumber: Berny Andreas Engelbert Rumimper, dkk (2013)

3.2 Beban Dinamik

Beban dinamik adalah beban yang bekerja secara tiba-tiba pada struktur. Pada umumnya, beban ini tidak bersifat tetap (*unsteady-state*) serta mempunyai karakteristik besaran dan arah yang berubah dengan cepat. Deformasi pada struktur akibat beban dinamik ini juga akan berubah-ubah secara cepat, maka jika suatu beban mempunyai perubahan intensitas yang bervariasi secara cepat terhadap waktu, maka beban tersebut disebut sebagai beban dinamik (*dynamic load*). Beban dinamik dapat menyebabkan terjadinya osilasi sehingga deformasi puncak dari struktur tidak terjadi bersamaan dengan terjadinya beban yang maksimum.

3.2.1 Kandungan Frekuensi Beban Gempa

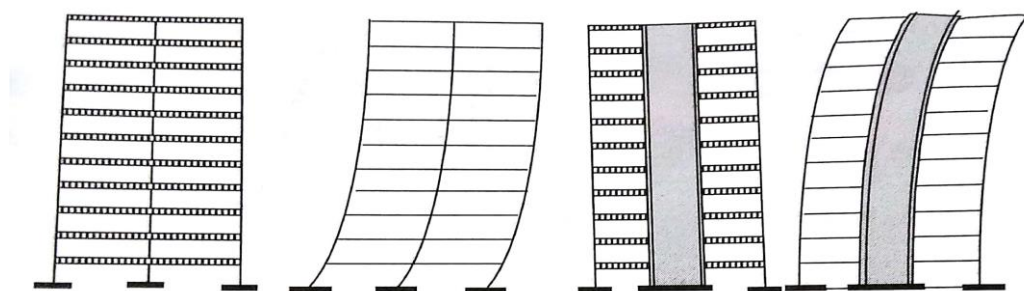
Gempa bumi biasanya direkam pada permukaan tanah bebas (*free field record*) sedangkan pondasi bangunan berada terpendam di dalam tanah. Hasil beberapa penelitian menemukan bahwa masa bangunan akan berpengaruh terhadap percepatan tanah dibawah bangunan yang bersangkutan, sehingga penyederhanaan yang dipakai adalah rekaman dari *free field* dianggap sebagai rekaman dibawah pondasi bangunan.

Beban gempa adalah beban dari adanya percepatan tanah yang berupa suatu rekaman percepatan tanah untuk suatu gempa tertentu, sehingga untuk setiap waktu

tertentu akan mempunyai harga percepatan tanah tertentu, yang merupakan fungsi dari waktu, sehingga respons yang terjadi pada suatu struktur juga tergantung dari riwayat waktu (*time history*) pembebanan tersebut. Getaran tanah yang diakibatkan oleh gempa bumi ditunjukkan dengan adanya simpangan tanah, kecepatan tanah dan percepatan tanah. Menurut Pawirodikromo (2001) bahwa bangunan yang memiliki massa dan percepatan akan menghasilkan gaya gempa efektif, karena menurut hukum Newton produk dari suatu massa dengan percepatan akan menghasilkan gaya (*force*). Percepatan tanah yang terjadi dipengaruhi oleh kondisi tanah (*site effect*) di lokasi suatu bangunan berdiri, maka disarankan ada beberapa nilai amplifikasi yang bergantung pada jenis tanah sehingga percepatan tanah akibat gempa dapat ditentukan.

3.3 Prinsip *Shear Building*

Pawirodikromo (2016) apabila suatu struktur bangunan bertingkat banyak bergoyang ke arah horisontal, maka biasanya terdapat dua pola goyangan yang akan terjadi. Pola pertama yaitu bangunan bergoyang pada dominasi geser (*shear mode*), pola goyangan seperti ini akan terjadi pada struktur portal terbuka bertingkat banyak (bangunan fleksibel) dengan balok dan pelat lantai yang relatif kaku pada arah horisontal. Kedua adalah pola goyangan yang didominasi oleh lentur (*flexural mode*).



Gambar 3.2 Pola Goyangan Struktur Bertingkat Banyak

(Sumber: Pawirodikromo, 2016)

Anggapan shear mode didasarkan pada beberapa hal sebagai berikut.

1. Balok dianggap rigid.
2. Balok dianggap tidak mengalami perpanjangan ataupun memendek.

3. Tidak terjadi simpangan vertikal.
4. Join-join tidak mengalami rotasi.
5. Hanya terjadi deformasi horisontal saja.

3.3.1 Massa Struktur

Pendekatan pokok untuk mendeskripsikan massa struktur ada dua, yaitu sebagai berikut.

1. Sistem diskretisasi massa, yaitu massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat tertentu (*lumped mass*).
2. Massa suatu bangunan konsisten dari atas ke bawah (*consistent mass matrix*).

Menghitung massa suatu bangunan menggunakan rumus sederhana sebagai berikut.

$$m = \frac{W}{g} \quad (3.1)$$

Dengan : m = massa struktur (kg dt²/cm),

W = berat beban gravitasi (kg),

g = percepatan gravitasi (cm/dt²).

3.3.2 Kekakuan Struktur

Kekakuan merupakan suatu gaya yang diperlukan suatu bahan untuk deformasi (memanjang atau memendek). Smith dan Coull (1991) mengatakan bahwa suatu struktur harus memiliki kekakuan yang cukup sehingga pergerakannya dapat dibatasi. Kekakuan struktur dapat diukur dari besarnya simpangan antar lantai (*drift*) bangunan, semakin kecil simpangan struktur maka bangunan tersebut akan semakin kaku.

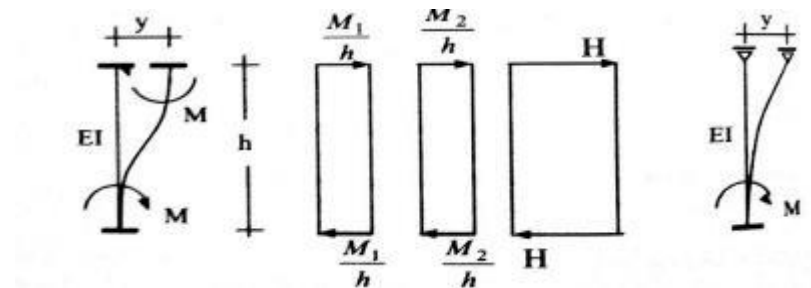
Metode untuk analisis kekakuan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut,

1. Kekakuan Dengan Prinsip Shear Building

Pelat lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok. Prinsip desain struktur bangunan tahan gempa kolom harus lebih kuat dibandingkan balok (*strong column weak beam*), namun rasio tersebut

tidak selalu linear dengan kekakuannya. Prinsip shear building ini dapat digunakan *lumped mass* model, kekakuan masing-masing kolom dihitung berdasarkan rumus standar yang ada. Prinsipnya semakin kaku balok maka semakin besar kemampuannya dalam mengekang rotasi ujung kolom, sehingga akan menambah kekakuan kolom.

Prinsip bangunan geser (shear building) balok lantai tingkat dianggap tetap horisontal saat sebelum ataupun setelah terjadi penggoyangan. Anggapan ini sebenarnya tidak benar karena pada faktanya join-join pada struktur bangunan dapat berotasi secara bebas. Anggapan bahwa join tidak berotasi akan menimbulkan suatu kekakuan kolom yang sifatnya *upperbound*. Jika asumsi tersebut digunakan maka kondisi kolom dengan dukungan jepit-jepit akan diperoleh. Kondisi ini membuat kolom menjadi sangat kaku. Untuk dapat menghitung kekakuan kolom maka diambil model kolom jepit-jepit yang bagian atasnya mengalami deformasi horisontal seperti pada Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.3 Kekakuan Kolom Jepit-Jepit

(Sumber: Pawirodikromo, 2016)

Menurut prinsip mekanika, suatu kolom jepit-jepit dengan tinggi h dengan kekakuan lentu EI yang dimana salah satu ujungnya mengalami perpindahan tempat sebesar y , maka ujung-ujung elemen tersebut akan timbul momen besar,

$$M_1 = \frac{6EI}{h^2} y \quad \text{dan} \quad M_2 = \frac{6EI}{h^2} y \quad (3.2)$$

Elemen tersebut memiliki potongan yang prismaatik maka M_1 akan sama dengan M_2 . Adanya momen akan menimbulkan gaya geser yang bekerja pada masing-masing join sebesar:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h} \\
 &= \left(\frac{6EI}{h^3} + \frac{6EI}{h^3} \right) y \\
 &= \frac{12EI}{h^3} y
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pada hakikatnya gaya horisontal yang bekerja pada join atas $P = H_1 = H_2$, maka kekakuan dapat dihitung dengan:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{P}{y} = \frac{12EI}{h^2 h} \times \frac{y}{y} \\
 &= \frac{12EI}{h^3}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

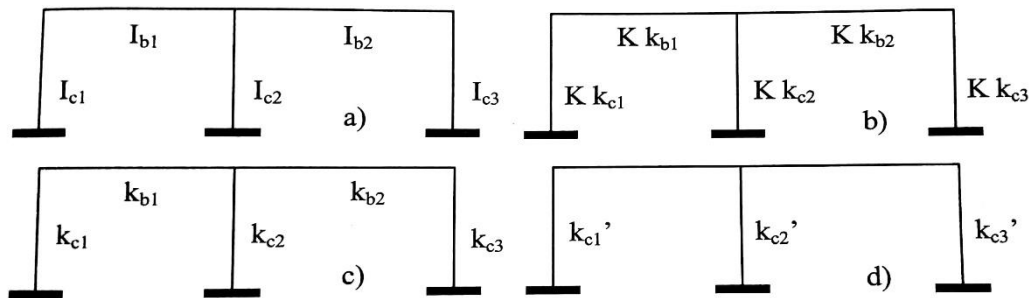
2. Kekakuan Menurut Muto (1975)

Muto (1975) memberikan cara lain untuk menghitung kekakuan kolom dengan memperhitungkan kekakuan balok, dalam hal ini dapat dilihat bahwa join-join dimungkinkan untuk berotasi. Kekakuan relatif balok dan kolom dinyatakan dalam rumus berikut ini.

$$Kk_c = \frac{I_c}{h_c} \quad \text{dan} \quad Kk_b = \frac{I_b}{h_b} \tag{3.5}$$

Dengan :

- K = Koefisien
- K_c = Kekakuan kolom
- K_b = Kekakuan balok
- I_c = Inersia kolom
- I_b = Inersia balok



Gambar 3.4 Kekakuan dan Inersia Balok dan Kolom

(Sumber: Pawirodikromo, 2016)

Penurunan kekakuan kolom dengan cara muto ini terdapat beberapa asumsi adalah sebagai berikut.

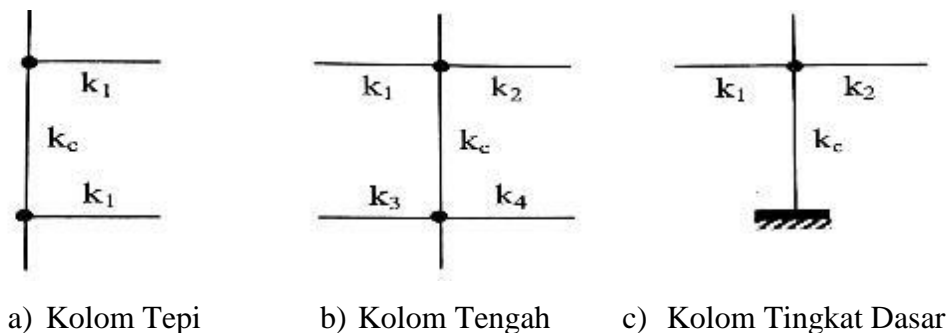
- Bangunan cukup besar, banyak kolom, simetri, gaya geser kolom dianggap sama,
- Join-join mengalami rotasi yang sama,
- Pengaruh P-delta (beban gravitasi diabaikan),
- Bending momen berbangun anti-simetrik,
- Titik balik pada kolom dan balok dianggap ditengah-tengah.

Rumus yang digunakan untuk menghitung kekakuan dengan cara Muto ini adalah sebagai berikut.

$$K_m = C_m \times K_f \quad (3.6)$$

$$K_f = \frac{12EI}{h^3} \quad (3.7)$$

Rumus untuk mencari nilai C_m berbeda-beda tergantung letak kolom (kolom tengah, kolom tepi, dan kolom tingkat dasar).



a) Kolom Tepi

b) Kolom Tengah

c) Kolom Tingkat Dasar

Gambar 3.5 Kondisi Pengekangan Kolom Oleh Balok

(Sumber: Pawirodikromo, 2016)

a. Kolom Tepi adalah kolom yang dipegang oleh 2 balok seperti Gambar 3.6.

$$K' = \frac{K_1 + K_2}{2 \times K_c} = \frac{\sum K_b}{2 \times K_c} \quad (3.8)$$

$$C_m = \frac{K'}{K'+2} \text{ atau } C_m = \frac{\sum K_{ba} + \sum K_{bb}}{(\sum K_{ba} + \sum K_{bb}) + 4K_c} \quad (3.9)$$

Dengan : K_b = Kekakuan balok

K_c = Kekakuan kolom

C_m = Koefisien Muto

b. Kolom tengah adalah kolom yang dipegang oleh 4 balok seperti Gambar 3.6.

$$K' = \frac{K_1 + K_2 + K_3 + K_4}{2 \times K_c} = \frac{\sum K_b}{2 \times K_c} \quad (3.10)$$

$$C_m = \frac{K'}{K'+2} \text{ atau } C_m = \frac{\sum K_{ba} + \sum K_{bb}}{(\sum K_{ba} + \sum K_{bb}) + 4K_c} \quad (3.11)$$

Dengan : K_b = Kekakuan balok

K_c = Kekakuan kolom

C_m = Koefisien Muto

c. Kolom dasar adalah untuk kolom tingkat lantai dasar seperti pada Gambar 3.5

$$K' = \frac{K_1 + K_2}{K_c} = \frac{\sum K_b}{K_c} \quad (3.12)$$

$$C_m = \frac{K'+0,5}{K'+2} \text{ atau } C_m = \frac{\sum K_{ba} + 0,5 K_c}{\sum K_{ba} + 2K_c} \quad (3.13)$$

Dengan : K_b = Kekakuan balok

K_c = Kekakuan kolom

C_m = Koefisien Muto

3.3.3 Redaman

Redaman adalah proses dimana terjadinya pengurangan amplitudo dari suatu getaran akibat terdisipasinya energi akibat gesekan dan hal lainnya. Persamaan gerak untuk sistem MDOF dengan kondisi getaran bebas adalah.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.14)$$

C adalah konstanta redaman yang merupakan energi yang terdisipasi pada suatu siklus getaran bebas ataupun getaran paksa yang harmonik. Kemudian yang dimaksud dengan rasio redaman (ξ) adalah suatu nilai tidak berdimensi yang bergantung pada properti fisik suatu sistem struktur (massa dan kekakuan), yaitu perbandingan antara konstanta redaman dengan konstanta redaman kritis ($\xi=c/2m\omega$).

3.4 Derajat Kebebasan (*Degree of Freedom, DOF*)

Menurut Tri Wahyu Ningsih (2011) derajat kebebasan (*degree of freedom*) merupakan derajat independensi yang dibutuhkan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat. Masalah dinamika setiap titik atau massa pada umumnya hanya diperhitungkan berpindah tempat dalam satu arah saja yaitu arah horisontal. Komponen-komponen utama dalam pembebanan dinamik ini adalah massa, sifat elastis (kekakuan), mekanisme kehilangan energi (redaman) dan beban luar. Percepatan, kecepatan dan simpangan masing-masing akan menimbulkan gaya inersia, gaya redaman, dan gaya pegas. Simpangan yang terjadi hanya terjadi dalam satu bidang atau dua dimensi, maka simpangan suatu massa pada setiap saat hanya mempunyai posisi atau ordinat tertentu baik bertanda negatif ataupun bertanda positif. Pada kondisi dua dimensi tersebut, simpangan suatu massa pada saat t dapat dinyatakan dalam koordinat tunggal yaitu $Y(t)$. Struktur seperti itu dinamakan struktur dengan derajat kebebasan tunggal / SDOF (*Single Degree of Freedom*) sistem.

Model sistem SDOF atau berderajat kebebasan tunggal, setiap massa m , kekakuan k , mekanisme kehilangan atau redaman c , dan gaya luar yang dianggap tertumpu pada elemen fisik tunggal. Struktur yang mempunyai n -derajat kebebasan

atau struktur dengan derajat kebebasan banyak disebut *multi degree of freedom* (MDOF), sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah derajat kebebasan adalah jumlah koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu.

3.4.1 Multi Degree of Freedom (MDOF)

Struktur MDOF merupakan struktur yang mempunyai tingkat yang banyak. Asumsi yang digunakan dalam analisis dengan MDOF adalah sebagai berikut.

1. Massa perantai sangat kaku (diafragma).
2. Gaya aksial diabaikan.
3. Derajat Kebebasan (degree of freedom) lateral.

Menyelesaikan persamaan MDOF perlu disusun eigen problem dari matriks massa dan matriks kekakuan. Rumus eigen problem yang digunakan pada struktur MDOF adalah sebagai berikut.

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\} \quad (3.15)$$

Struktur bangunan apabila dianggap tidak memiliki redaman, maka nilai $c = 0$ persamaan diatas menjadi seperti berikut ini.

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{0\} \quad (3.16)$$

Persamaan diatas adalah persamaan differensial maka pada struktur MDOF diasumsikan tidak memiliki redaman, maka sebagaimana penyelesaian persamaan differensial tersebut diharapkan dalam fungsi harmonic menurut bentuk.

$$Y = \{\emptyset\}_i \sin(\omega t) \quad (3.17)$$

$$\dot{Y} = \omega \{\emptyset\}_i \cos(\omega t) \quad (3.18)$$

$$\ddot{Y} = \omega^2 \{\emptyset\}_i \sin(\omega t) \quad (3.19)$$

Yang mana $\{\emptyset\}_i$ adalah suatu ordinat massa pada mode ke-i. Substitusi persamaan 3.17, 3.18, 3.19 ke dalam persamaan 3.16 sehingga akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\omega^2 [M] \{\emptyset\}_i \sin(\omega t) + [K] \{\emptyset\}_i \sin(\omega t) \quad (3.20)$$

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{\emptyset\}_i = 0 \quad (3.21)$$

Matriks massa dan matriks kekakuan berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$[M] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & mn \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k1 + k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & kn \end{bmatrix}$$

Eigen problem pada persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} k1 + k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & kn \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & mn \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Menggunakan persamaan eigen problem pada persamaan 3.22, maka akan didapatkan nilai dari masing-masing mode tiap tingkat bangunan. Nilai \emptyset ini yang nantinya akan menentukan pola goyangan struktur.

3.5 Hubungan Orthogonal

Hubungan orthogonal berfungsi untuk mengecek apakah *mode shape* yang telah didapat benar atau salah. Ragam getar pada setiap sistem MDOF mempunyai 2 sifat ortogonal yang memungkinkan penyederhanaan penting dalam persamaan gerak umum. Sifat ortogonal ragam merupakan hubungan yang sangat penting antara dua ragam getaran bebas. Hal ini mengandung arti masing-masing ragam benar-benar tidak tergantung satu sama yang lainnya.

Persamaan *eigenproblem* yang menghasilkan ragam ke i dan j :

$$\omega_i^2 [M] \{\emptyset\}_i = [K] \{\emptyset\}_i \quad (3.23)$$

$$\omega_j^2 [M] \{\emptyset\}_j = [K] \{\emptyset\}_j \quad (3.24)$$

Nilai transpose persamaan 3.23 dikalikan dengan \emptyset_k maka akan menjadi persamaan sebagai berikut.

$$\{\omega_i^2 [M] \{\emptyset\}_i\}^T \{\emptyset\}_j = \{[K] \{\emptyset\}_i\}^T \{\emptyset\}_j \quad (3.25)$$

Karena $\{[a][b]\}^T = [b]^T [a]^T$, maka persamaan 3.25 dapat ditulis:

$$\omega_i^2 \{\emptyset\}_i^T [M]^T \{\emptyset\}_i = \{\emptyset\}_i^T [K]^T \{\emptyset\}_j \quad (3.26)$$

Matriks $[M]$ dan $[K]$ simetris sehingga $[M]^T = [M]$ dan $[K]^T = [K]$ Apabila persamaan 3.25 dikalikan awal dengan $\{\emptyset\}_i^T$:

$$\omega_j^2 \{\emptyset\}_i^T [m] \{\emptyset\}_j = \{\emptyset\}_i^T [k] \{\emptyset\}_j \quad (3.27)$$

Ruas kanan persamaan 3.26 dan 3.27 adalah sama. Maka apabila persamaan 3.26 dikurangi dengan persamaan 3.27 akan didapat:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\emptyset\}_i^T [M] \{\emptyset\}_j = 0 \quad (3.28)$$

$\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, maka $\{\emptyset\}_i^T [m] \{\emptyset\}_j = 0$ untuk $i \neq j$, Kondisi yang sama terjadi pada ortogonalitas kekakuan, yaitu :

$$\{\emptyset\}_i^T [k] \{\emptyset\}_j = 0 \text{ untuk } i \neq j \quad (3.29)$$

Ortogonalitas untuk redaman tidak banyak diketahui karena persoalan redaman masih relatif rumit dibandingkan dengan massa struktur dan kekakuan tingkat. Karena keterbatasan tersebut maka diambil asumsi bahwa redaman juga mempunyai sifat ortogonal sebagaimana massa dan kekakuan (Widodo, 2001), sehingga:

$$\{\emptyset\}_i^T [C] \{\emptyset\}_j = 0 \text{ untuk } i \neq j \quad (3.30)$$

3.6 Metode Integrasi *Central Difference*

Penggunaan metode ini berdasar pada pendekatan nilai derivatif fungsi waktu, baik untuk parameter kecepatan maupun percepatan. Kedua parameter tersebut kemudian dinyatakan dalam fungsi simpangan. Rumus yang digunakan untuk metode *Central Difference* adalah seperti berikut ini.

$$y_{i+1} = \frac{-m\hat{y}_{b,i} - ay_i - by_{i-1}}{k} \quad (3.31)$$

$$k = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (3.32)$$

$$a = k + \frac{c}{\Delta t^2} \quad (3.33)$$

$$b = \frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \quad (3.34)$$

Dengan : y_{i+1} = simpangan pada step ke $i + 1$ (cm)

y_i = simpangan pada step ke- i (cm)

\hat{y}_{bi} = percepatan tanah (cm/dt²)

m = massa struktur (kg.dt²/cm)

k = kekakuan kolom struktur (kg/cm)

c = rasio redaman

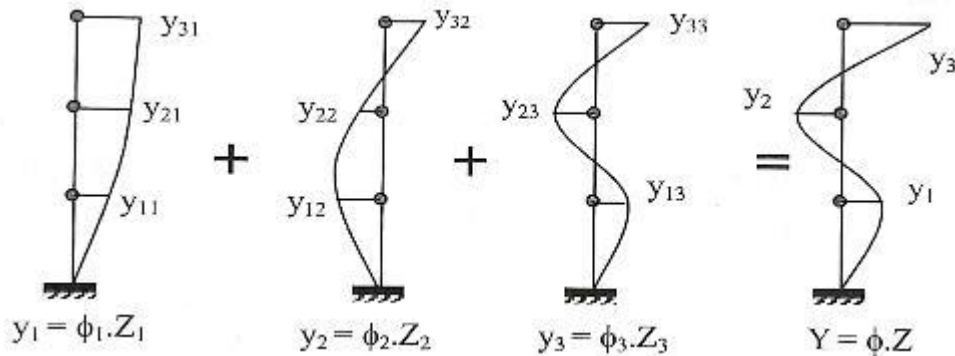
Δt = selisih waktu step ke i dengan step $i+1$ (dt)

3.7 Modal Analisis

Modal analisis merupakan salah satu cara untuk dapat menyelesaikan persamaan differensial gerakan pada struktur MDOF. Metode ini dipakai khusus untuk menyelesaikan problem dinamik dengan beberapa syarat, yaitu respon struktur masih elastik dan struktur mempunyai standar *mode shape*. Respon elastik bahwa tegangan bahan belum mencapai tegangan leleh dan kekakuan struktur juga tidak mengalami perubahan selama terjadinya pembebanan, kemudian tidak mengalami perubahan massa dan koefisien redaman. Struktur yang mempunyai standar *mode shape* adalah struktur elastik dan tidak memperhitungkan interaksi antara tanah dan pondasi struktur. Ini berarti bangunan dianggap jepit pada bagian dasarnya.

3.7.1 Persamaan Differensial Independen (*Uncoupling*)

Pawirodikromo (2016) pada kondisi standar struktur yang mempunyai n -derajat kebebasan akan mempunyai n -*modes* atau n -pola/ragam goyangan, pada prinsip ini masing-masing *modes* akan memberikan kontribusi pada simpangan horisontal tiap-tiap massa.



Gambar 3.6 Prinsip Metode Superposisi
(Sumber: Pawirodikromo, 2016)

Simpangan massa ke-i atau Y_i dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh atau kontribusi tiap-tiap *modes*. Kontribusi mode ke-j terhadap simpangan horisontal massa ke-i tersebut dinyatakan dengan suatu modal amplitude Z_j atau seluruh kontribusi tersebut kemudian dinyatakan dalam,

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \phi_{11} Z_1 + \phi_{12} Z_2 + \phi_{13} Z_3 + \dots + \phi_{1n} Z_n \\
 Y_2 &= \phi_{21} Z_1 + \phi_{22} Z_2 + \phi_{23} Z_3 + \dots + \phi_{2n} Z_n \\
 Y_3 &= \phi_{31} Z_1 + \phi_{32} Z_2 + \phi_{33} Z_3 + \dots + \phi_{3n} Z_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 Y_n &= \phi_{n1} Z_1 + \phi_{n2} Z_2 + \phi_{n3} Z_3 + \dots + \phi_{nn} Z_n
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

Suku pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai suku ke-n pada ruas kanan persamaan 3.35 adalah kontribusi mode pertama, kedua, ketiga dan seterusnya sampai mode ke-n. Persamaan 3.35 diatas dapat ditulis dalam bentuk yang lebih kompak.

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\}
 \tag{3.36}$$

Derivatif pertama dan kedua persamaan 3.36 tersebut adalah.

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\}
 \tag{3.37}$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\}
 \tag{3.38}$$

Substitusi persamaan 3.36, 3.37 dan 3.38 ke persamaan 3.35, maka kan didapatkan persamaan berikut.

$$[M][\emptyset]\{\ddot{Z}\} + [C][\emptyset]\{\dot{Z}\} + [K][\emptyset]\{Z\} = -[M]\{r\}\ddot{y}_b \quad (3.39)$$

Persamaan 3.38 sebetulnya adalah 1 set persamaan simultan *dependent non-homogen*. Untuk dapat mentransfer persamaan dependent menjadi persamaan *independent*, maka persamaan 3.39 di *premultiply* dengan transpose suatu mode $\{\emptyset\}^T$ sehingga diperoleh.

$$\{\emptyset\}_i^T [M][\emptyset]\{\ddot{Z}\} + \{\emptyset\}_i^T [C][\emptyset]\{\dot{Z}\} + \{\emptyset\}_i^T [K][\emptyset]\{Z\} = -\{\emptyset\}_i^T [M]\{r\}\ddot{y}_b \quad (3.40)$$

Untuk pembahasan awal akan ditinjau pengaruh mode ke-1 saja. Misalnya diambil struktur yang mempunyai 3-derajat kebebasan, maka perkalian suku persamaan 3.40 sebenarnya adalah berbentuk,

$$\{\emptyset_{11} \ \emptyset_{21} \ \emptyset_{31}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} & \emptyset_{12} & \emptyset_{13} \\ \emptyset_{21} & \emptyset_{22} & \emptyset_{23} \\ \emptyset_{31} & \emptyset_{32} & \emptyset_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Berdasarkan contoh sebelumnya terbukti bahwa hubungan orthogonal akan terbukti apabila $i \neq j$. dengan demikian untuk mode ke- i persamaan 3.41 akan menjadi,

$$\{\emptyset_{11} \ \emptyset_{21} \ \emptyset_{31}\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{bmatrix} Z_1 \quad (3.42)$$

Mode ke- j maka secara umum persamaan 3.42 juga dapat ditulis dengan,

$$\{\emptyset\}_j^T [M]\{\emptyset\}_j Z_j \quad (3.43)$$

Cara diatas juga berlaku untuk suku ke-2 dan ke-3 pada persamaan 3.37 dan 3.38. Dengan demikian setelah diperhitungkan hubungan orthogonal Persamaan 3.40 akan menjadi,

$$\{\emptyset\}_j^T [M][\emptyset]_j \{\ddot{Z}\}_j + \{\emptyset\}_j^T [C][\emptyset]_j \{\dot{Z}\}_j + \{\emptyset\}_j^T [K][\emptyset]_j \{Z\}_j = \{\emptyset\}_j^T [M]\{r\}\ddot{y}_b \quad (3.44)$$

Persamaan 3.44 merupakan persamaan diferensial yang bebas/*independent* antara satu dengan yang lainnya. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkannya hubungan orthogonal, baik orthogonal untuk matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan.

Berdasarkan persamaan 3.44, maka dapat didefinisikan suatu generalisasi massa, redaman dan kekakuan sebagai berikut.

$$M_j^* = \{\emptyset\}_j^T [M] \{\emptyset\}_j \quad (3.45)$$

$$C_j^* = \{\emptyset\}_j^T [C] \{\emptyset\}_j \quad (3.46)$$

$$K_j^* = \{\emptyset\}_j^T [K] \{\emptyset\}_j \quad (3.47)$$

Definisi seperti pada persamaan 3.45, 3.46 dan 3.47 diatas maka persamaan 3.44 akan menjadi

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \dot{y}_b \quad (3.48)$$

Dengan:

$$P_j^* = \{\emptyset\}_j^T [M] \{r\} \quad (3.49)$$

Persamaan sebelumnya diperoleh suatu hubungan bahwa,

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{C_{cr}} = \frac{C_j^*}{2M_j^* \omega_j} \quad \text{maka} \quad \frac{C_j^*}{M_j^*} = 2 \xi_j \omega_j \quad (3.50)$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \quad \text{dan} \quad \Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} \quad (3.51)$$

Hubungan-hubungan seperti pada persamaan 3.50 dan 3.51 diatas, maka persamaan 3.49 akan menjadi,

$$\ddot{Z}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j \dot{y}_b \quad (3.52)$$

Dan,

$$\Gamma_j = \frac{P_j^*}{M_j^*} = \frac{\{\emptyset\}_j^T [M]}{\{\emptyset\}_j^T [M] \{\emptyset\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m \emptyset_j m_i}{\sum_{i=1}^m \emptyset_j^2 m_i} \quad (3.53)$$

Persamaan 3.53 sering disebut dengan partisipasi setiap mode atau *mode participation factor*. Selanjutnya persamaan 3.52 juga dapat ditulis menjadi,

$$\frac{\ddot{Z}_j}{M_j} + 2\xi_j \omega_j \dot{Z}_j + \omega_j^2 \frac{Z_j}{M_j} = -\ddot{y}_b \quad (3.54)$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa,

$$\ddot{g}_j = \frac{\ddot{Z}_j}{\Gamma_j}, \quad \dot{g}_j = \frac{\dot{Z}_j}{\Gamma_j}, \quad g_j = \frac{Z_j}{\Gamma_j} \quad (3.55)$$

Maka persamaan 3.55 akan menjadi

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = -\ddot{y}_b \quad (3.56)$$

Persamaan 3.56 merupakan persamaan differensial independent karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode. Persamaan 3.56 hampir sama dengan persamaan diferensial SDOF (*Single Degree of Freedom*). Nilai partisipasi tiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat tiap mode (ϕ_{ij}) sudah didapatkan. Nilai \ddot{g}_j , \dot{g}_j , dan g_j dapat dihitung dengan cara integrasi numerik, sehingga nilai Z_i dapat dihitung. Kemudian dapat juga dihitung *modal effective mass* (E_m). Pawirodikromo (2016) *Modal effective mass* (E_m) merupakan ratio antara fraksi dari gaya geser terhadap berat ataupun massa total struktur, dengan rumus sebagai berikut.

$$E_{mj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m m_i} \frac{\{P_j^*\}}{M_j^*} \quad (3.57)$$

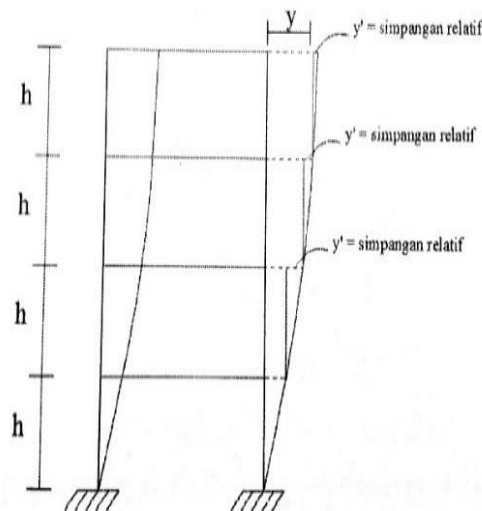
Dengan demikian simpangan horisontal tiap-tiap tingkat dapat dihitung.

Setelah nilai partisipasi mode didapat, maka dapat pula dihitung respon dari suatu struktur. Ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk menghitung simpangan struktur, salah satunya adalah dengan menggunakan metode *central difference*. Berikut ini rumus yang digunakan untuk struktur MDOF.

$$g_{i+1} = \frac{-y_i - ag_i - bg_{i-1}}{kt} \quad (3.58)$$

3.7.2 Macam-macam Respon Struktur MDOF

Respon struktur pada penelitian ini berupa simpangan horizontal, *drift ratio*, gaya horizontal tingkat, gaya geser dasar dan momen guling.



Gambar 3.7 Simpangan Struktur Bangunan Bertingkat Banyak

(Sumber: Vitae, 2014)

1. Simpangan Struktur

Ada 2 metode yang dapat digunakan untuk mencari simpangan struktur, yaitu *Upperbound Response* dan *Reasonable Response*. Berikut ini penjelasan singkat dan rumus kedua metode tersebut,

a. *Upperbound Response*

Widodo (2016) mengungkapkan bahwa *Upperbound Response* (simpangan maksimum) adalah simpangan suatu masa dapat diperoleh dengan menjumlahkan nilai absolut atas kontribusi tiap mode. Berikut ini adalah rumus yang digunakan,

$$Y_i = \sum_{j=1}^n |\phi_{ij} \Gamma_j g_{j,max}| = \sum_{j=1}^n |\phi_{ij} Z_j| \quad (3.62)$$

b. *Reasonable Respons*

Widodo (2016) *Reasonable Respons* merupakan akar dari jumlah kuadrat setaip mode. Berikut ini rumus yang digunakan

$$Y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \{\emptyset_{ij} \Gamma_j g_{j,maks}\}^2} \quad (3.63)$$

2. Drift Ratio

Drift Ratio merupakan perbandingan antara simpangan dengan tinggi struktur bangunan, selain itu sebagai indikator untuk menunjukkan kerusakan struktur bangunan. Pada umumnya struktur yang mempunyai *drift ratio* kurang dari 0,5% aman terhadap beban gempa, namun jika lebih dari itu maka bangunan sudah mulai rusak. Berikut ini adalah rumus untuk mencari *drift ratio*,

$$DR = \frac{y'}{H} \times 100 \quad (3.64)$$

$$= \left[\frac{y_i - y_{(i-1)}}{H} \right] \times 100 \quad (3.65)$$

3. Gaya Horizontal Tingkat

Gaya Horizontal Tingkat dipakai dalam melakukan analisis struktur bangunan, karena gaya horizontal tingkat dapat menyebabkan rotasi pada penampang horizontal lantai yang akan mempengaruhi besar gaya geser dasar dan momen guling. Gaya horizontal tingkat mode ke-j (Respon Dinamik Struktur Elastis, Widodo, 2001) adalah

$$\begin{aligned} F_{ij} &= K \times Y_{ij} \\ &= K \emptyset_{ij} \Gamma_j \frac{C_j \cdot g}{\omega_j^2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dimana rumus gaya geser dasar adalah,

$$V = \sum_{i=1}^m F_{ij} = F_{ij} \quad (3.67)$$

4. Momen Guling

Momen guling merupakan hasil dari pengkalian dari gaya horizontal tingkat dengan jarak, maka rumus yang digunakan adalah.

$$M_j = \sum_{i=0}^{m-1} F_{ij} \cdot jH_{i+1} \quad (3.68)$$