

BAB III LANDASAN TEORI

Pada landasan teori ini akan memaparkan teori-teori yang akan dipergunakan sebagai tuntunan untuk memecah masalah yang dihadapi dan memuat teori-teori dinamika struktur, model-model matematik dan penjabarannya.

3.1 Kelas Situs Tanah

Dalam perumusan kriteria desain seismik suatu bangunan di permukaan tanah atau penentuan amplifikasi besaran percepatan gempa puncak dari batuan dasar ke permukaan tanah untuk suatu situs, maka situs tersebut harus diklasifikasikan terlebih dahulu. Profil tanah di situs harus diklasifikasikan sesuai dengan Tabel 3.1, berdasarkan profil tanah lapisan 30 m paling atas. Penetapan kelas situs harus melalui penyelidikan tanah di lapangan dan di laboratorium, yang dilakukan oleh otoritas yang berwenang atau ahli desain geoteknik bersertifikat, dengan minimal mengukur secara independen dua dari tiga parameter tanah yang tercantum dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Klasifikasi Situs

Kelas situs	\bar{v}_s (m/detik)	\bar{N} atau \bar{N}_{cs}	\bar{s}_u (kPa)
SA (batuan keras)	>1500	N/A	N/A
SB (batuan)	750 sampai 1500	N/A	N/A
SC (tanah keras, sangat padat dan batuan lunak)	350 sampai 750	>50	≥ 100
SD (tanah sedang)	175 sampai 350	15 sampai 50	50 sampai 100
SE (tanah lunak)	< 175	< 15	< 50
	Atau setiap profil tanah yang mengandung lebih dari 3 m tanah dengan karakteristik sebagai berikut : 1. Indeks plastisitas, $PI > 20$, 2. Kadar air, $w \geq 40 \%$, 3. Kuat geser niralir $\bar{s}_u < 25$ kPa		
SF (tanah khusus, yang membutuhkan investigasi geoteknik spesifik dan analisis respons spesifik-situs yang mengikuti 6.10.1)	Setiap profil lapisan tanah yang memiliki salah satu atau lebih dari karakteristik berikut: - Rawan dan berpotensi gagal atau runtuh akibat beban gempa seperti mudah likuifaksi, lempung sangat sensitif, tanah tersementasi lemah - Lempung sangat organik dan/atau gambut (ketebalan $H > 3$ m) - Lempung berplastisitas sangat tinggi (ketebalan $H > 7,5$ m dengan Indeks Plastisitas $PI > 75$) Lapisan lempung lunak/setengah teguh dengan ketebalan $H > 35$ m dengan $\bar{s}_u < 50$ kPa		

(Sumber : SNI 1726:2012)

dengan :

N/A = Tidak dapat dipakai.

Nilai \bar{N} dan \bar{N}_{ch} harus ditentukan dengan Persamaan 3.1.

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{N_i}} \quad (3.1)$$

Di mana N_i dan d_i dalam Persamaan 3.1 berlaku untuk tanah non-kohefif, tanah kohefif, dan lapisan batuan.

$$\bar{N}_{ch} = \frac{d_s}{\sum_{i=1}^m \frac{d_i}{N_i}} \quad (3.2)$$

Di mana N_i dan d_i dalam Persamaan 3.2 berlaku untuk tanah non-kohefif saja. Nilai d_s sama dengan total d_i yang dapat dilihat pada Persamaan 3.3.

$$\sum_{i=1}^m d_i = d_s \quad (3.3)$$

dengan :

\bar{N} = Tahanan penetrasi standar lapangan rata-rata,

\bar{N}_{ch} = Tahanan penetrasi standar lapangan rata-rata untuk lapisan non-kohefif,

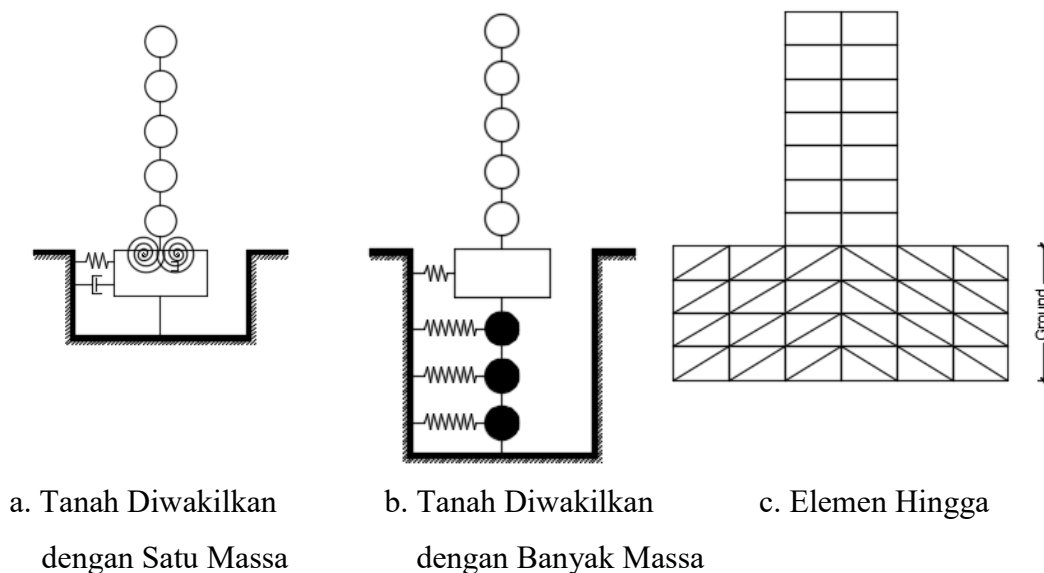
d_i = Tebal setiap lapisan antara kedalaman 0 sampai 30 meter,

d_s = Ketebalan total d_i , dan

N_i = Tahanan penetrasi standar 60 persen energi (N_{60}) yang terukur langsung di lapangan tanpa koreksi dengan nilai tidak lebih dari 305 pukulan/m. Jika ditemukan perlawanan lapisan batuan, maka nilai N_i tidak boleh diambil lebih dari 305 pukulan/m.

3.2 Pemodelan Tanah

Tanah tidaklah kaku sempurna, tanah yang berada di dekat bangunan berubah bentuk sebagai respon terhadap getaran bangunan, sehingga bangunan dan tanah saling berinteraksi satu sama lain di bawah guncangan gempa. Seringkali sebuah bangunan tidak hanya bergetar dalam arah horizontal tetapi juga mengalami getaran rotasi, yang biasanya disebut *rocking vibration*. Tanah harus dimodelkan agar mudah memahami tentang getaran horizontal dan getaran rotasi pada struktur bangunan. Banyak model yang diusulkan, mulai dari yang relatif sederhana hingga yang membutuhkan ketelitian. Pemodelan tanah dapat dilihat pada Gambar. 3.1.



Gambar 3.1 Pemodelan Tanah dan Struktur

(Sumber : Wakabayashi, 1921)

1. *Spring Models of Ground*

Model yang mudah untuk digunakan dalam analisis dari gerakan rotasi selama gangguan tanah adalah pegas. Di pemodelan ini, sebuah bangunan diasumsikan didukung oleh pegas dan *dashpot* yang mewakili dari karakteristik tanah yang dapat dilihat pada Gambar 3.1.a. Pegas dapat diperkirakan dari dua cara yaitu dengan eksperimen dan dengan teori. Untuk cara dengan eksperimen, tanah tertarik oleh generator getaran. Pada pendekatan dengan cara teori, diasumsikan tanah merupakan *Semi Infinite Body* dan gaya dinamik diberikan pada fondasi.

2. *Lumped Mass Model of Ground*

Pada pemodelan ini, tanah diwakilkan oleh massa menggumpal secara vertikal yang saling terikat yang dapat dilihat pada Gambar 3.1.b. Setiap massa yang menggumpal dengan pegas dan koefisien redaman, mewakili 1 lapis dari tanah. Properti tersebut sulit untuk ditentukan dan model tidak mengambil energi yang mengilang ke dalam perhitungan. Selanjutnya, asumsi bahwa sekitar tanah merupakan kaku sempurna merupakan jawaban yang diragukan.

3. *Semi Infinite Body Model*

Tanah diasumsikan seragam elastis atau viskoelastis *Semi Infinite Body*. Redaman radiasi dapat dimasukkan dan efek redaman tanah juga dapat dimasukkan kedalam analisis dengan asumsi bahwa tanah dalam kondisi viskoelastis.

4. *Finite Element Model*

Tanah dimodelkan menjadi sebuah elemen hingga dengan sifat diskrit yang dapat dilihat pada Gambar 3.1.c. Properti tanah yang tidak seragam juga dibolehkan dengan memasukkan properti material yang berbeda pada setiap elemen hingga. Sifat tanah pada kondisi inelastis bisa dipertimbangkan dengan perhitungan *nonlinier finite element*. Satu kerugian dari model ini yaitu merupakan analisis yang membutuhkan biaya yang besar.

3.3 Daya Dukung Fondasi

Daya dukung fondasi diperoleh dari penjumlahan tahanan ujung dan tahanan selimut tiang yang dapat dilihat pada Persamaan 3.4.

$$Q_u = Q_p + Q_s \quad (3.4)$$

dengan :

Q_u = Daya dukung ultimit tiang (ton),

Q_p = Daya dukung ultimit ujung tiang (ton), dan

Q_s = Daya dukung ultimit selimut tiang (ton).

Besarnya daya dukung ujung maupun daya dukung selimut diperoleh menggunakan metode Reese & Wright (1977).

3.3.1 Daya Dukung Ujung Tiang

Daya dukung ultimit pada ujung tiang bor dinyatakan pada Persamaan 3.5.

$$Q_p = q_p \cdot A \quad (3.5)$$

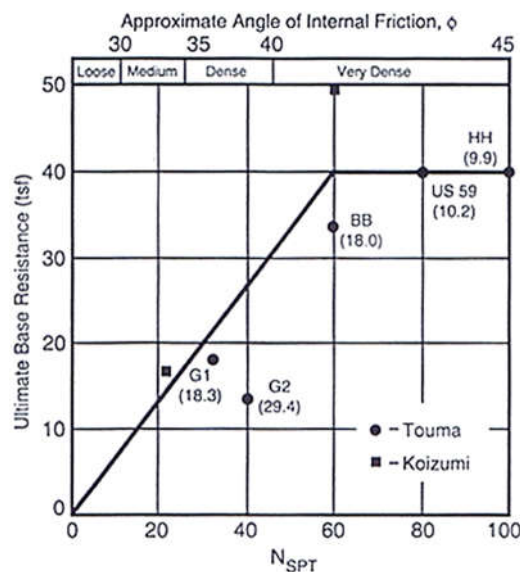
dengan :

Q_p = Daya dukung ultimit tiang (ton),

q_p = Tahanan ujung per satuan luas (ton/m^2), dan

A = Luas penampang tiang bor (m^2).

Pada metode Reese & Wright (1977), tanah kohesif besarnya tahanan ujung per satuan luas (q_p) dapat diambil sebesar 9 kali kuat geser tanah, sedangkan untuk tanah non-kohesif menggunakan korelasi antara q_p dengan NSPT yang dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Tahanan Ujung Ultimit pada Tanah Non-Kohesif

(Sumber : Reese & Wright, 1977)

3.3.2 Daya Dukung Selimut Tiang

Daya dukung ultimit pada ujung selimut tiang bor dinyatakan pada Persamaan 3.6.

$$Q_s = f \cdot L \cdot p \quad (3.6)$$

dengan :

Q_s = Daya dukung ultimit selimut tiang (ton),

f = Gesekan selimut tiang per satuan luas (ton/m^2),

L = Panjang tiang (m), dan

p = Keliling penampang tiang (m).

Pada metode Reese & Wright (1977), gesekan selimut tiang per satuan luas dipengaruhi oleh jenis tanah dan parameter kua geser tanah. Untuk tanah kohesif dan tanah non-kohesif dihitung menggunakan Persamaan 3.7.

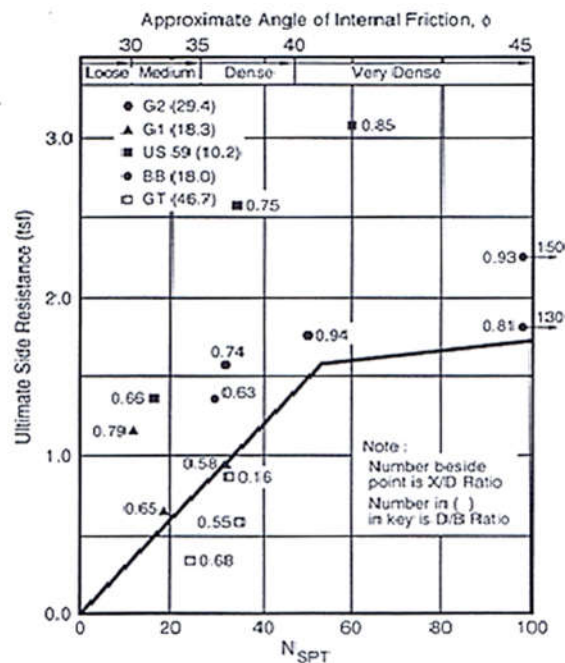
$$f = \alpha \cdot c_u \quad (3.7)$$

dengan :

α = Faktor adhesi, dan

c_u = Kohesi tanah (ton/m^2).

Berdasarkan hasil penelitian Reese, faktor adhesi (α) dapat diambil 0.55. Pada tanah non-kohesif, nilai f dapat diperoleh dari korelasi langsung dengan NSPT yang dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Hubungan Tahanan Selimut terhadap NSPT

(Sumber : Wright, 1977)

3.3.3 Daya Dukung Ijin Tiang dan *Safety Factor*

Daya dukung ijin tiang (Q_a) diperoleh dengan membagi daya dukung ultimit dengan *safety factor* baik secara keseluruhan atau dengan masing-masing faktor keamanan pada selimut tiang dan pada tahanan ujungnya yang dapat dilihat pada Persamaan 3.8.

$$Q_a = \frac{Q_u}{SF}$$

$$Q_a = \frac{Q_p}{SF_1} + \frac{Q_s}{SF_2} \quad (3.8)$$

dengan :

Q_a = Daya dukung ijin tiang (ton), dan

SF = Faktor keamanan.

Reese & O'Neill (1989) menyarankan pemilihan *safety factor* untuk perancangan fondasi tiang dapat menggunakan Tabel 3.2.

Tabel 3.2 *Safety Factor* untuk Fondasi Tiang

Klasifikasi Struktur	<i>Safety Factor</i>			
	Kontrol Baik	Kontrol Normal	Kontrol Jelek	Kontrol Sangat Jelek
Monumental	2.3	3	3.5	4
Permanen	2	2.5	2.8	3.4
Sementara	1.4	2	2.3	2.8

(Sumber : Reese & O'Neill, 1989)

3.4 Tiang dan *Pile Cap*

Suatu fondasi berfungsi untuk menyalurkan beban dari bangunan ke sebuah tanah dimana terdapat bangunan tersebut.

3.4.1 Jumlah Tiang

Untuk menentukan jumlah tiang yang akan dipasang berdasarkan beban yang

bekerja pada fondasi dan kapasitas dukung ijin tiang, maka rumus yang digunakan dapat dilihat pada Persamaan 3.9.

$$n = \frac{P}{Q_a} \quad (3.9)$$

dengan :

n = Jumlah tiang,

P = Beban yang bekerja, dan

Q_a = Kapasitas dukung ijin tiang tunggal.

Nilai beban yang bekerja (P) didapat dari Persamaan 3.10.

$$P = P_d + P_l \quad (3.10)$$

dengan :

P_d = Beban mati, dan

P_l = Beban hidup.

3.4.2 Jarak antar Tiang

Banyak peraturan bangunan mensyaratkan jarak minimum antara tiang sebesar 2 kali diameter sedangkan jarak optimal antara tiang adalah antara 2.5-3.0 kali diameter. Untuk fondasi yang memikul beban lateral yang besar maka dianjurkan jarak yang lebih besar.

3.4.3 *Pile Cap*

Pile cap berfungsi untuk menyalurkan beban bangunan yang diterima oleh kolom sehingga fondasi tiang akan menerima beban sesuai dengan kapasitas dukung ijin. *Pile cap* juga berfungsi agar membuat tiang tunggal menjadi kelompok tiang. *Pile cap* biasanya terbuat dari beton bertulang dan perancangan *pile cap* dilakukan dengan anggapan *pile cap* sangat kaku.

3.5 Kekakuan dan Redaman Interaksi antara Fondasi dengan Tanah

Tiang yang digunakan sebenarnya merupakan suatu kelompok tiang. Kekakuan dan redaman dari kelompok tiang membutuhkan evaluasi dari pertimbangan dari aksi kelompok tiang. Tidak dibenar bila mengasumsi bahwa kekakuan dan redaman kelompok tiang adalah penjumlahan yang mudah dari kekakuan dan redaman dari tiang tunggal. Tingkat dari aksi yang diberikan kelompok tiang tergantung dari rasio antara jarak terhadap diameter dari tiang. Semakin kecil jarak yang ada maka semakin besar aksi dari kelompok tiang dan sebaliknya. Perhitungan yang digunakan merupakan metode dari Novak (1974).

3.5.1 Kekakuan dan Redaman Vertikal Interaksi Antara Tanah dengan Fondasi

Rumus yang digunakan untuk mencari kekakuan vertikal dan redaman vertikal dapat dilihat pada Persamaan 3.11 dan Persamaan 3.12.

$$k_v^1 = \frac{E_p A}{r_0} f_{v1} \quad (3.11)$$

$$c_v^1 = \frac{E_p A}{V_s} f_{v2} \quad (3.12)$$

dengan :

k_v^1 = Kekakuan vertikal 1 tiang,

c_v^1 = Redaman vertikal 1 tiang,

E_p = Modulus young tiang,

A = Luas dari penampang tiang,

r_0 = Jari-jari tiang,

V_s = Kecepatan gelombang geser dalam tanah,

f_{v1} = Konstanta untuk kekakuan vertikal, dan

f_{v2} = Konstanta untuk redaman vertikal.

Nilai kecepatan gelombang geser dalam tanah (V_s) didapatkan dari Persamaan 3.13.

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.13)$$

dengan :

G = Modulus geser tanah, dan

ρ = Kepadatan massa tanah.

Nilai modulus geser tanah (G) didapatkan dari Persamaan 3.14 yang merupakan rumus menurut Hardin dan Black (1968).

$$G = 1230 \cdot OCR^k \frac{(2,973 - e)^2}{(1 + e)} \bar{\sigma}_0^{0,5} \quad (\text{dalam psi}) \quad (3.14)$$

dengan :

OCR = *Over consolidated ratio*,

k = Koefisien yang nilainya bergantung dari nilai Indeks Plastisitas (PI),

e = Angka pori didapat pada akhir uji konsolidasi, dan

$\bar{\sigma}_0$ = *Effective confining pressure*.

Nilai OCR didapatkan dari Persamaan 3.15.

$$OCR = \frac{p_c'}{p_o'} \quad (3.15)$$

dengan :

p_c' = Tekanan prakonsolidasi (*preconsolidation pressure*), dan

p_o' = Tekanan efektif lapangan.

Jika nilai OCR > 1 maka tanah *over consolidated*, jika nilai OCR ≤ 1 maka tanah *normally consolidated*. Nilai konstanta k didapatkan dari Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Nilai k

<i>Plasticity Index (PI)</i>	k
0	0
20	0,18
40	0,30
60	0,41
80	0,48
100	0,5

(Sumber : Hardin dan Drnevich, 1972)

Nilai $\bar{\sigma}_0$ didapatkan dari Persamaan 3.16.

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{3} \quad (3.16.a)$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z}{3} \quad (3.16.b)$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\sigma}_v + 2\bar{\sigma}_h}{3} \quad (3.16.c)$$

dengan :

$\bar{\sigma}_v$ = *Effective vertical stress*, dan

$\bar{\sigma}_h$ = *Effective horizontal stress*.

Nilai kepadatan massa tanah (ρ) didapatkan dari Persamaan 3.17.

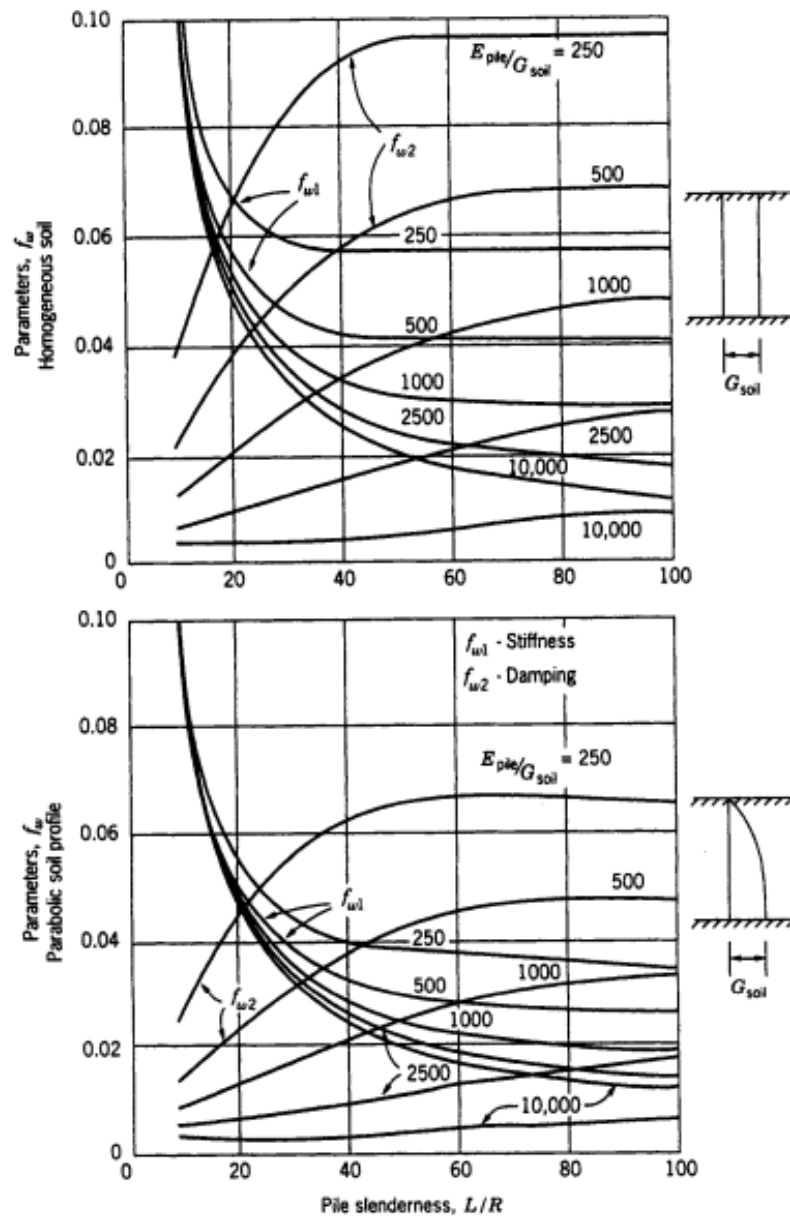
$$\rho = \frac{\gamma_s}{g} \quad (3.17)$$

dengan :

γ_s = Berat volume tanah jenuh, dan

g = Percepatan gravitasi.

Nilai konstanta (f_{v1} dan f_{v2}) didapatkan dari Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Faktor Kekakuan dan Redaman untuk Getaran Vertikal Tiang

(Sumber : Novak and El-Sharnouby, 1983)

3.5.2 Kekakuan dan Redaman Horizontal Interaksi Antara Tanah dengan Fondasi

Rumus yang digunakan untuk mencari kekakuan horizontal dan redaman horizontal dapat dilihat pada Persamaan 3.18 sampai 3.25.

1. Kekakuan dan redaman horizontal untuk 1 tiang

$$k_h^1 = \frac{E_p I_p}{r_0^3} f_{h1} \quad (3.18)$$

$$c_h^1 = \frac{E_p I_p}{r_0^2 V_s} f_{h2} \quad (3.19)$$

dengan :

k_h^1 = Kekakuan horizontal 1 tiang,

c_h^1 = Redaman horizontal 1 tiang,

E_p = Modulus young tiang,

I_p = Momen inersia dari potongan melintang tiang,

r_0 = Diameter tiang,

V_s = Kecepatan gelombang geser dalam tanah,

f_{h1} = Konstanta untuk kekakuan horizontal, dan

f_{h2} = Konstanta untuk redaman horizontal.

Nilai kecepatan gelombang geser dalam tanah (V_s) didapatkan dari Persamaan 3.13. Nilai *poisson ratio* (ν) didapatkan dari Tabel 3.4. Nilai kepadatan massa tanah (ρ) didapatkan dari Persamaan 3.17. Nilai f_{h1} dan f_{h2} didapatkan dari Lampiran 1.

Tabel 3.4 Nilai *Poisson Ratio*

Tipe Tanah	ν
Lempung	0.5
Pasir	0.3 - 0.35
Batuan	0.15 - 0.25

2. Kekakuan dan redaman horizontal untuk kelompok tiang

$$k_h^g = \frac{\sum_1^n k_h^1}{\sum_1^n \alpha_L} \quad (3.20)$$

$$c_h^g = \frac{\sum_1^n c_h^1}{\sum_1^n \alpha_L} \quad (3.21)$$

dengan :

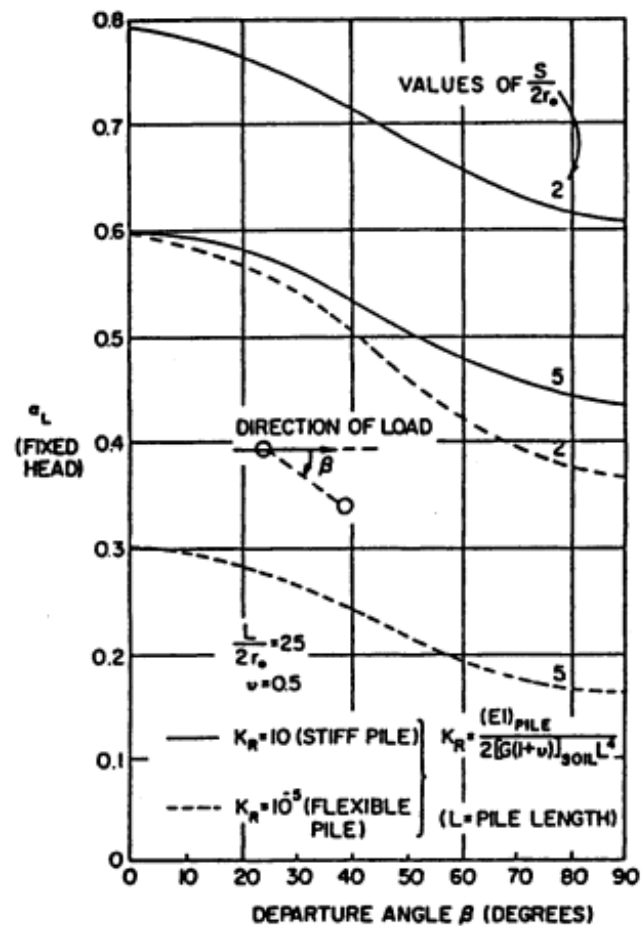
k_h^g = Kekakuan horizontal kelompok tiang,

c_h^g = Redaman horizontal kelompok tiang,

n = Jumlah tiang, dan

α_L = Faktor interaksi perpindahan horizontal.

Nilai Faktor interaksi perpindahan horizontal (α_L) didapat dari Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Faktor Interaksi Perpindahan Aksial (α_A)

(Sumber : Poulos, 1968)

3. Kekakuan dan redaman horizontal *pile cap*

$$k_h^f = G_s \cdot h \cdot \bar{S}_{h1} \quad (3.22)$$

$$c_h^f = h \cdot r_0 \cdot \bar{S}_{h2} \sqrt{G_s \rho_s} \quad (3.23)$$

dengan :

k_h^f = Kekakuan horizontal *pile cap*,

c_h^f = Redaman horizontal *pile cap*,

h = Tinggi *pile cap* yang tertimbun tanah,

r_0 = Radius *pile cap*,

G_s = Modulus geser tanah sekitar *pile cap* (timbunan),

ρ_s = Kepadatan massa tanah sekitar *pile cap* (timbunan),

\bar{S}_{h1} = Konstanta untuk kekakuan horizontal, dan

\bar{S}_{h2} = Konstanta untuk redaman horizontal.

Nilai \bar{S}_{h1} dan \bar{S}_{h2} dapat dilihat pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5 Parameter untuk Kekakuan dan Redaman Horizontal

<i>Poisson Ratio</i> (ν)	Rentang Validitas	Parameter Konstan
0.0	$0 < a_0 < 1.5$	$\bar{S}_{h1} = 3.6$
	$0 < a_0 < 1.5$	$\bar{S}_{h2} = 8.2$
0.25	$0 < a_0 < 2.0$	$\bar{S}_{h1} = 4.0$
	$0 < a_0 < 1.5$	$\bar{S}_{h2} = 9.1$
0.4	$0 < a_0 < 2.0$	$\bar{S}_{h1} = 4.1$
	$0 < a_0 < 1.5$	$\bar{S}_{h2} = 10.6$

(Sumber : Baredugo & Novak, 1972)

4. Total kekakuan dan redaman horizontal

$$k_h^g = k_h^g + k_h^f \quad (3.24)$$

$$c_h^g = c_h^g + c_h^f \quad (3.25)$$

3.5.3 Kekakuan dan Redaman Rotasi Interaksi Antara Tanah dengan Fondasi

Rumus yang digunakan untuk mencari kekakuan rotasi dan redaman rotasi dapat dilihat pada Persamaan 3.26 sampai 3.36.

1. Kekakuan dan redaman rotasi untuk 1 tiang

$$k_r^1 = \frac{E_p I_p}{r_0} f_{r1} \quad (3.26)$$

$$c_r^1 = \frac{E_p I_p}{V_s} f_{r2} \quad (3.27)$$

$$k_{hr}^1 = \frac{E_p I_p}{r_0^2} f_{hr1} \quad (3.28)$$

$$c_{hr}^1 = \frac{E_p I_p}{r_0 V_s} f_{hr2} \quad (3.29)$$

dengan :

k_r^1 = Kekakuan rotasi 1 tiang,

c_r^1 = Redaman rotasi 1 tiang,

k_{hr}^1 = Kekakuan silang 1 tiang,

c_{hr}^1 = Redaman silang 1 tiang,

E_p = Modulus young tiang,

I_p = Momen inersia dari potongan melintang tiang,

r_0 = Diameter tiang,

V_s = Kecepatan gelombang geser dalam tanah,

f_{r1} = Konstanta untuk kekakuan rotasi,

f_{r2} = Konstanta untuk redaman rotasi,

f_{hr1} = Konstanta untuk kekakuan silang rotasi, dan

f_{hr2} = Konstanta untuk redaman silang rotasi.

Nilai kecepatan gelombang geser dalam tanah (V_s) didapatkan dari Persamaan 3.13. Nilai kepadatan massa tanah (ρ) didapatkan dari Persamaan 3.17.

Nilai f_{r1} , f_{r2} , f_{hr1} , dan f_{hr2} didapatkan dari Lampiran 1.

2. Kekakuan dan redaman rotasi untuk kelompok tiang

$$k_r^g = \sum_1^n (k_r^1 + k_v^1 x_r^2 + k_h^1 z_c^2 - 2z_c k_{hr}^1) \quad (3.30)$$

$$c_r^g = \sum_1^n (c_r^1 + c_v^1 x_r^2 + c_h^1 z_c^2 - 2z_c c_{hr}^1) \quad (3.31)$$

dengan :

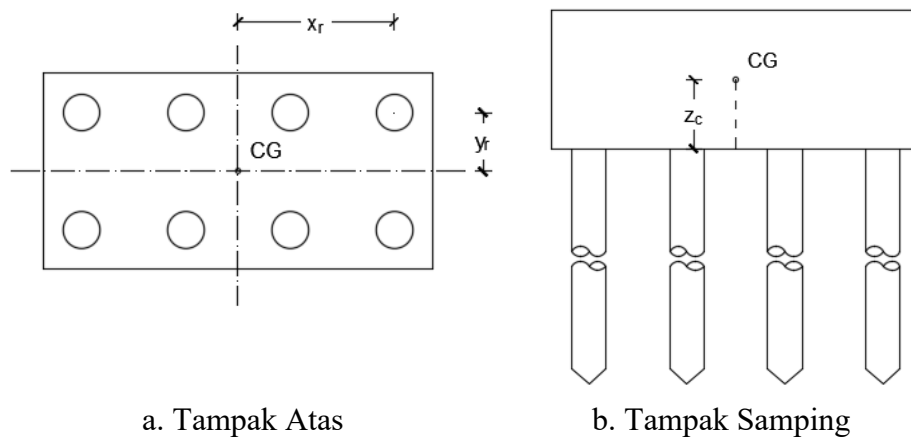
k_r^g = Kekakuan rotasi kelompok tiang,

c_r^g = Redaman rotasi kelompok tiang,

x_r = Jarak setiap tiang terhadap C.G, dan

z_c = Tinggi dari titik tengah *pile cap* ke bawah permukaan.

Penjelasan x_r dan z_c dapat dilihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Dimensi Fondasi Tiang

(Sumber : Poulos, 1968)

3. Kekakuan dan redaman rotasi *pile cap*

$$k_r^f = G_s \cdot r_0^2 \cdot h \cdot \bar{S}_{r1} + G_s \cdot r_0^2 \cdot h \cdot \bar{S}_{h1} \left[\left(\frac{\delta^2}{3} \right) + \left(\frac{z_c}{r_0} \right)^2 - \delta \left(\frac{z_c}{r_0} \right) \right] \quad (3.32)$$

$$c_r^f = \delta \cdot r_0^4 \sqrt{\frac{G_s \gamma_s}{g}} \cdot \left\{ \bar{S}_{r2} + \bar{S}_{h2} \left[\left(\frac{\delta^2}{3} \right) + \left(\frac{z_c}{r_0} \right)^2 - \delta \left(\frac{z_c}{r_0} \right) \right] \right\} \quad (3.33)$$

dengan :

- k_r^f = Kekakuan rotasi *pile cap*,
 c_r^f = Redaman rotasi *pile cap*,
 h = Tinggi *pile cap* yang tertimbun tanah,
 r_0 = Radius *pile cap*,
 G_s = Modulus geser tanah sekitar *pile cap* (timbunan),
 ρ_s = Kepadatan massa tanah sekitar *pile cap* (timbunan),
 δ = Perbandingan antara h dengan r_0 ,
 \bar{S}_{r1} = Konstanta untuk kekakuan rotasi,
 \bar{S}_{r2} = Konstanta untuk redaman rotasi,
 \bar{S}_{h1} = Konstanta untuk kekakuan horizontal, dan
 \bar{S}_{h2} = Konstanta untuk redaman horizontal.
 Nilai δ didapatkan dari Persamaan 3.34.

$$\delta = \frac{h}{r_0} \quad (3.34)$$

4. Total kekakuan dan redaman rotasi

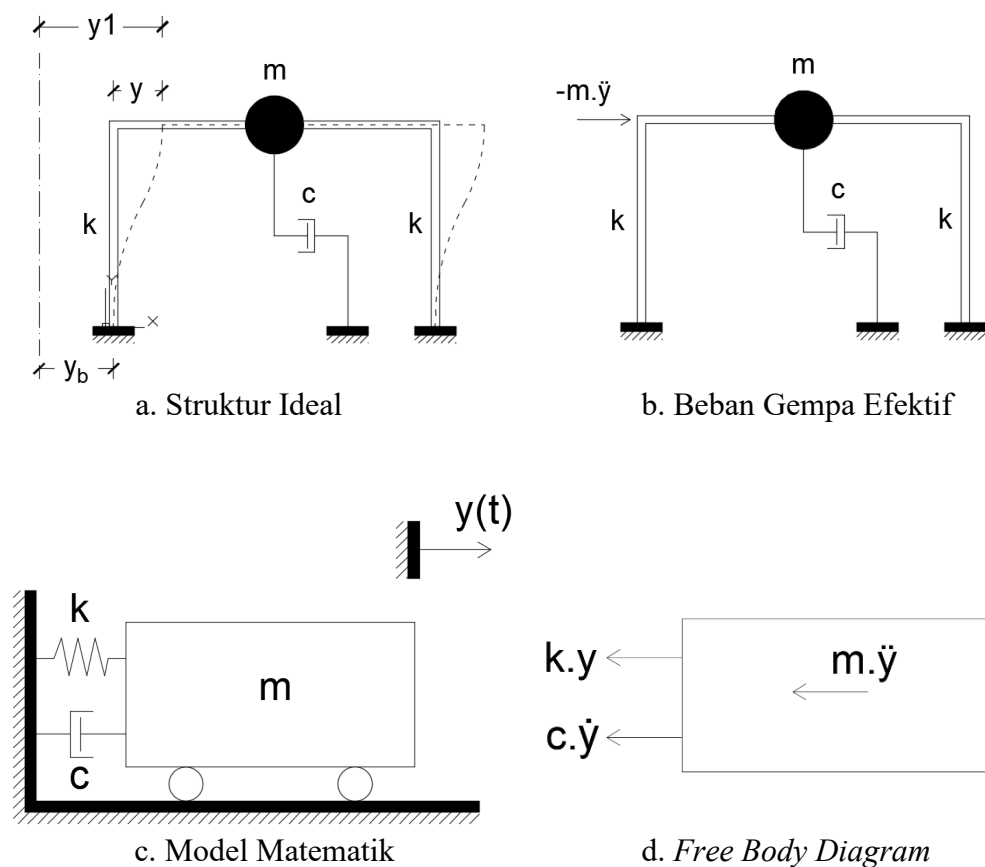
$$k_r^g = k_r^g + k_r^f \quad (3.35)$$

$$c_r^g = c_r^g + c_r^f \quad (3.36)$$

3.6 Struktur (SDOF) Akibat *Base Motion*

Dalam suatu analisis struktur, selain beban mati dan beban hidup yang umum diperhitungkan adalah beban gempa. Gempa bumi akan menyebabkan permukaan tanah menjadi bergetar. Selain itu getaran tanah di permukaan tanah juga akan menyebabkan percepatan tanah dan simpangan secara horizontal (*horizontal displacement*). Didalam hal ini masih ada anggapan bahwa fondasi dan tanah pendukungnya bergerak secara bersama-sama atau fondasi dianggap menyatu dengan tanah. Anggapan ini tidak sepenuhnya benar karena tanah bukanlah material yang kaku dan tidak menyatu dengan fondasi. Kejadian yang sesungguhnya adalah antara fondasi dan tanah tidak akan bergerak secara bersama-sama (Widodo, 2017). Struktur dengan derajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom, SDOF*)

berarti hanya ada satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jika diambil notasi m , c , k dan y berturut-turut adalah massa, koefisien redaman, kekakuan kolom, dan simpangan maka struktur SDOF akibat gerakan tanah dengan anggapan bahwa tanah menyatu secara kaku dengan fondasi dapat dimodelkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Model Sistem SDOF akibat Gerakan Tanah

Berdasarkan *free body diagram* yang ditunjukkan pada Gambar 3.7.d maka persamaan diferensial gerakan tanah dapat dilihat pada Persamaan 3.37.

$$m.\ddot{y}_1 + c.\dot{y}_1 + k.y_1 = 0 \quad (3.37)$$

dengan :

y_1 = Simpangan,

\dot{y}_1 = Kecepatan, dan

\ddot{y}_1 = Percepatan.

Akibat gempa bumi, tanah mempunyai percepatan (\ddot{y}_1), kecepatan (\dot{y}_1), simpangan (y_1) yang dapat dilihat pada Persamaan 3.38.

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_b + \ddot{y} \quad (3.38.a)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_b + \dot{y} \quad (3.38.b)$$

$$y_1 = y_b + y \quad (3.38.c)$$

dengan :

y_b = Simpangan beban gempa,

\dot{y}_b = Kecepatan beban gempa,

\ddot{y}_b = Percepatan beban gempa, dan

y, \dot{y}, \ddot{y} = Posisi sebelum terjadi gerakan tanah.

Dengan mendistribusi Persamaan 3.38 kedalam Persamaan 3.37 maka diperoleh Persamaan 3.39.

$$m(\ddot{y}_b + \ddot{y}) + c(\dot{y}_b + \dot{y}) + k(y_b + y) = 0 \quad (3.39)$$

Persamaan 3.39 juga dapat ditulis menjadi Persamaan 3.40.

$$m.\ddot{y} + c.\dot{y} + k.y = -m.\ddot{y}_b - c.\dot{y}_b - k.y_b \quad (3.40)$$

Respon struktur umumnya terjadi karena adanya perbedaan simpangan antara tanah dengan lantai tingkat (simpangan antar tingkat) atau percepatan antara tanah dengan massa struktur. Karena antara tanah dan lantai tingkat belum terjadi perbedaan simpangan (simpangan antar tingkat = 0) maka peristiwa tersebut seperti pada peristiwa *rigid body motion*. Sehingga suku ke-3 ruas kanan pada Persamaan 3.40 sama dengan nol dan suku ke-2 ruas kanan sama dengan nol dikarenakan para ahli menganggap bahwa fenomena ini kurang begitu diketahui. Dengan demikian Persamaan 3.40 menjadi,

$$m.\ddot{y} + c.\dot{y} + k.y = -m.\ddot{y}_b \quad (3.41)$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = -\ddot{y}_b \quad (3.42)$$

Persamaan 3.41 dan 3.42 merupakan persamaan diferensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah (*base motion*). Ruas kanan biasa disebut sebagai beban gempa. Dalam perinsip dinamika struktur diperoleh hubungan yang dapat dilihat pada Persamaan 3.43 sampai 3.46.

$$\frac{c}{m} = 2.\xi.\omega \quad (3.43)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.44)$$

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} \quad (3.45)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.46)$$

dengan :

ξ = Rasio redaman,

ω = Frekuensi sudut (rad/dt),

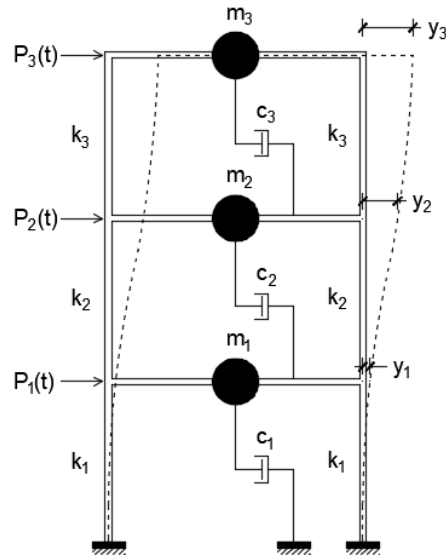
T = Periode (dt), dan

f = frekuensi natural (cps atau Hertz).

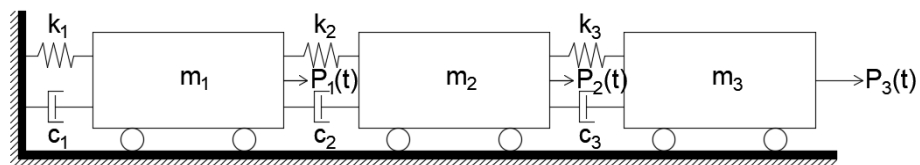
3.7 Struktur dengan Derajat Kebebasan Banyak (MDOF)

Pada struktur bangunan gedung mempunyai derajat kebebasan banyak (*multi degree of freedom*, MDOF). Untuk menyatakan persamaan diferensial gerakan pada struktur dengan derajat kebebasan banyak maka dipakai anggapan dan pendekatan seperti pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF. Prinsip *shear building* masih berlaku pada struktur dengan derajat kebebasan banyak (MDOF). Prinsip massa struktur menggumpal pada setiap lantai (*lumped mass*) masih dapat digunakan. Untuk memperoleh memperoleh persamaan differensial, maka tetap

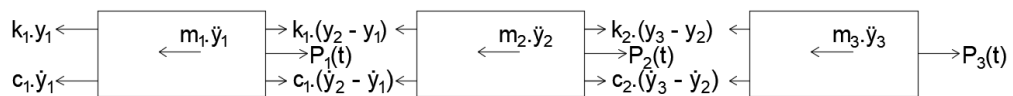
digunakan prinsip keseimbangan dinamik (*dynamic equilibrium*) pada suatu massa yang ditinjau (Widodo, 2017). Pemodelan stuktur dengan MDOF dapat dilihat pada Gambar 3.8.



a. Struktur dengan 3 DOF



b. Model Matematik



c. Free Body Diagram

Gambar 3.8 Struktur MDOF

Persamaan diferensial gerakan untuk struktur MDOF pada umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut *frist mode* atau *mode* pertama seperti pada garis putus-putus pada Gambar 3.8.a. Berdasarkan pada keseimbangan dinamik pada *free body diagram* pada Gambar 3.8.c maka diperoleh,

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0 \tag{3.47}$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3(y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \quad (3.48)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3(y_3 - y_2) - F_3(t) = 0 \quad (3.49)$$

Persamaan 3.47 sampai 3.49 merupakan persamaan yang akan tergantung satu sama lain yang biasa disebut *coupled equation*. Dengan menyusun Persamaan 3.47 sampai 3.49 menurut parameter percepatan, kecepatan dan simpangan maka diperoleh,

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)\dot{y}_1 - c_2\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = F_1(t) \quad (3.50)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2\dot{y}_1 + (c_2 + c_3)\dot{y}_2 - c_3\dot{y}_3 - k_2y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3y_3 = F_2(t) \quad (3.51)$$

$$m_3\ddot{y}_3 - c_3\dot{y}_2 + c_3\dot{y}_3 - k_3y_2 + k_3y_3 = F_3(t) \quad (3.52)$$

Persamaan 3.50 sampai 3.52 dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Persamaan 3.53 dapat ditulis dalam matriks yang lebih kompak menjadi Persamaan 3.54.

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = F(t) \quad (3.54)$$

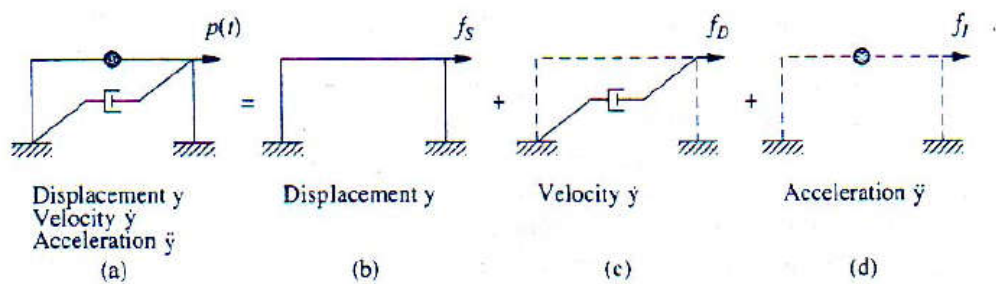
dengan [M], [C] dan [K] berturut-turut adalah matriks massa, matriks redaman, matriks kekakuan. Penjabaran dari [M], [C] dan [K] dapat dilihat pada Persamaan 3.55.

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Sedangkan $\{\ddot{Y}\}$, $\{\dot{Y}\}$, $\{Y\}$ dan $\{F(t)\}$ masing-masing adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan dan vektor beban yang dapat dilihat pada Persamaan 3.56.

$$\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \text{ dan } \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{3.56}$$

Secara visual Chopra (1995) menyajikan keseimbangan antara gaya dinamik, gaya pegas, gaya redam dan gaya inersia seperti pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Keseimbangan Gaya Dinamik dengan F_s , F_D dan F_I

(Sumber : Chopra, 1995)

Pada Gambar 3.9 didapat Persamaan 3.57.

$$F_I + F_D + F_s = P(t) \tag{3.57}$$

Penjabaran F_I , F_D , dan F_S dapat dilihat pada Persamaan 3.58.

$$F_I = m.\ddot{y} \quad (3.58.a)$$

$$F_D = c.\dot{y} \quad (3.58.b)$$

$$F_S = k.y \quad (3.58.c)$$

dengan :

$P(t)$ = Gaya dinamik,

F_I = Gaya inersia,

F_D = Gaya redam, dan

F_S = Gaya pegas.

3.8 Massa Struktur

Pada struktur bangunan gedung, beban struktur lebih banyak terkonsentrasi pada masing-masing tingkat. Semakin banyak massa yang dapat didefinisikan maka semakin banyak derajat kebebasan yang mungkin timbul. Banyaknya derajat kebebasan secara keseluruhan umumnya dikaitkan dengan jumlah massa dikalikan dengan jumlah derajat kebebasan untuk setiap massa. Struktur yang mempunyai banyak derajat kebebasan, maka akan mempunyai banyak persamaan diferensial. Oleh karena itu perlu adanya asumsi-asumsi untuk menyederhanakan masalah. Terdapat dua pokok yang umumnya dilakukan untuk mendiskripsikan massa struktur.

1. Model *Lumped Mass*

Model ini merupakan sistem diskretisasi massa yaitu massa dianggap menggumpal pada tempat-tempat (*lumped mass*) join atau tempat-tempat tertentu. Clough dan Peinzen (1993) menyatakan bahwa bagian *off-diagonal* akan sama dengan nol karena gaya inersia hanya bekerja pada tiap-tiap massa. Apabila prinsip bangunan geser (*shear building*) dipakai maka setiap massa hanya akan bergerak secara horizontal.

2. Model *Consistent Mass Matrix*

Pada model ini memiliki prinsip bahwa elemen struktur akan berdeformasi menurut bentuk fungsi (*shape function*) tertentu. Apabila tiga derajat kebebasan

(horizontal, vertical, dan rotasi) diperhitungkan pada setiap node maka standar *consistent mass matrix* dapat diperoleh dengan *off-diagonal matrix* tidak sama dengan nol. Cough dan Penzien (1993) dalam Widodo (2017) menyatakan bahwa pemakaian *consistent mass matrix* akan memerlukan hitungan yang lebih banyak. Ada dua alasan yang perlu dipertimbangkan. Alasan yang pertama adalah bahwa pada *lumped mass* model, tidak akan terjadi (ketergantungan antar massa (*mass coupling*)) karena matrik massa adalah diagonal. Alasan yang kedua adalah adanya *mass moment of inertia* akibat translasi dan rotasi yang harus diperhitungkan. Carr (1993) dalam Widodo (2017) menyatakan bahwa untuk problema bangunan gedung bertingkat yang massanya terkonsentrasi pada tiap-tiap tingkat bangunan, maka penggunaan model *lumped mass* masih cukup akurat.

Sehingga formulasi untuk menghitung massa baik yang *single lumped mass* atau *multiple lumped mass* digunakan Persamaan 3.59.

$$m = \frac{W}{g} \quad (3.59)$$

dengan :

W = Berat beban gravitasi, dan

g = Percepatan gravitasi.

3.9 Kekakuan Tingkat

Kekakuan adalah salah satu dinamik karakteristik struktur bangunan yang sangat penting disamping massa bangunan. Antara massa dan kekakuan struktur akan mempunyai hubungan yang unik yang umumnya disebut karakteristik diri atau *eigenproblem*. Hubungan tersebut akan menentukan nilai frekuensi sudut (ω_i) dan periode getar struktur (T_i). Kedua nilai ini merupakan parameter yang sangat penting dan akan sangat mempengaruhi respon dinamik struktur.

Pada prinsip bangunan geser (*shear building*) bahwa titik pertemuan antara kolom dengan balok dianggap tidak berotasi agar balok pada lantai tingkat dianggap tetap horizontal baik sebelum maupun sesudah terjadi penggoyangan. Adanya pelat

lantai yang menyatu secara kaku dengan balok diharapkan dapat membantu kekakuan balok sehingga anggapan tersebut tidak terlalu kasar. Anggapan/asumsi bahwa joint tidak berotasi akan menghasilkan suatu kekakuan kolom yang sifatnya *upper bound*. Pada prinsip desain bangunan tahan gempa dikehendaki agar kolom lebih kuat dibanding dengan balok. Namun demikian yang lebih kuat/besar tersebut adalah kekuatannya. Dengan prinsip *shear building* dan model *lumped mass* maka kekakuan setiap kolom dapat dihitung dengan Persamaan 3.60.

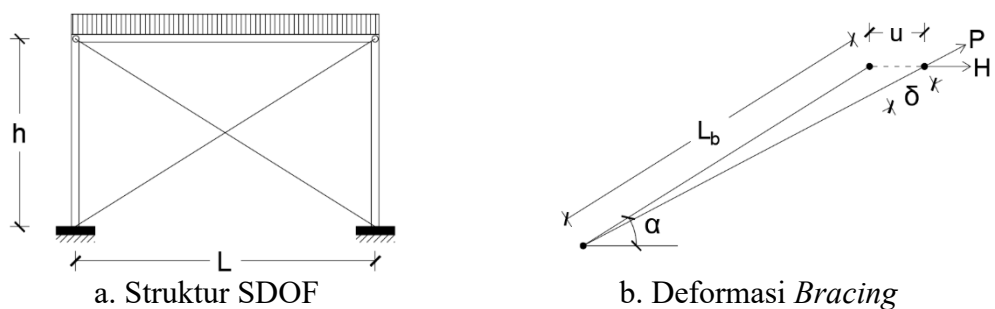
$$K = \frac{12.E.I}{h^3} \quad (3.60)$$

dengan :

- E = Modulus elastis bahan,
- I = Inersia bahan, dan
- h = Tinggi kolom tiap lantai.

3.10 Kekakuan Elemen *Bracing*

Untuk mengurangi terjadinya simpangan horizontal yang berlebihan, suatu struktur kadang-kadang dipasang sistem *bracing* terutama pada struktur baja. Dengan adanya sistem ini maka struktur akan menjadi kaku, karena *bracing* mempunyai kekakuan yang cukup besar. Walaupun sistem *bracing* dibuat secara bersilang (dua arah), namun demikian sistem ini hanya akan bekerja pada satu arah saja yaitu arah tarik. Hal ini terjadi karena pada arah desak struktur/element *bracing* akan mudah sekali tertekuk (*buckling*). Untuk menurunkan rumus kekakuan elemen *bracing* ini maka diambil model struktur seperti pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Struktur dengan *Bracing*

Menurut prinsip mekanika, pada suatu batang tarik akan diperoleh hubungan yang dapat dilihat pada Persamaan 3.61.

$$P = \frac{A.E}{L} \delta \quad (3.61)$$

Nilai δ diperoleh dari Persamaan 3.62.

$$\delta = u \cdot \cos(\alpha) \quad (3.62)$$

Dari Gambar 3.10.b diperoleh hubungan yang dapat dilihat pada Persamaan 3.63.

$$H = P \cdot \cos(\alpha) \quad (3.63)$$

Dengan memperhatikan Persamaan 3.61 sampai 3.63 maka Persamaan 3.64 akan menjadi,

$$H = \frac{A.E}{L} u \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad (3.64)$$

$$H = \frac{A.E}{L} u \cdot \cos^2(\alpha)$$

Dengan demikian kekakuan *bracing* dapat dilihat pada Persamaan 3.65.

$$K_b = \frac{H}{u} = \frac{A.E}{L} \cos^2(\alpha) \quad (3.65)$$

dengan :

A = Luas penampang *bracing*,

E = Modulus elastis bahan,

L = Panjang *bracing*, dan

α = Sudut *bracing*.

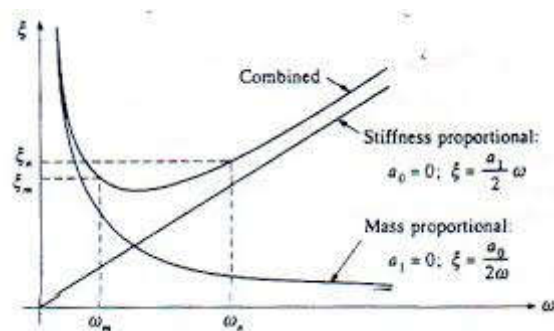
3.11 Redaman Struktur

Redaman adalah peristiwa penyerapan energi (*energy dissipation*) oleh struktur akibat adanya berbagai macam sebab. Beberapa penyebab itu diantaranya

adalah pelepasan energi oleh adanya gerakan antara molekul di dalam material, pelepasan energi oleh gesekan alat penyambung maupun sistem dukungan, pelepasan energi akibat gesekan dengan udara dan pada respon inelastik pelepasan energi juga terjadi akibat adanya rotasi sendi plastik. Karena redaman berfungsi menyerap energi maka hal tersebut akan mengurangi respon struktur.

Untuk memodel kemampuan struktur melepaskan energi maka besaran yang dipakai umumnya adalah rasio redaman (*damping ratio*, ξ). Rasio redaman adalah suatu rasio antara koefisien redaman c dengan koefisien redaman saat kritik c_{cr} . Nilai rasio redaman untuk berbagai macam material dan tingkat respon struktur seperti pada Lampiran 2.

Umumnya rasio redaman dipakai dalam kondisi konstan, artinya nilai rasio redaman diambil sama untuk semua mode. Apabila hal ini telah disepakati maka analisis dinamik struktur dengan modal analisis tidak memerlukan matriks redaman. Cara ini mempunyai kelemahan karena pada mode yang lebih tinggi umumnya frekuensi sudut (ω) dan rasio redaman (ξ) akan lebih besar. Terdapat beberapa sistem redaman proporsional yang dapat disusun yang secara skematis ditunjukkan oleh Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Jenis-Jenis Proporsional Damping

Sumber : Widodo (2017)

1. Redaman proporsional dengan massa (*mass proportional damping*)

Bentuk umum hubungan antara redaman dengan massa adalah,

$$[C] = \alpha [M] \quad (3.66)$$

Apabila prinsip kondisi *orthogonal* diterapkan pada Persamaan 3.66 maka akan diperoleh Persamaan 3.67.

$$\begin{aligned}\phi^T . C . \phi &= \alpha . \phi^T . M . \phi \\ C_j^* &= \alpha . M_j^* \\ 2\xi_j \omega_j M_j^* &= \alpha . M_j^*\end{aligned}\tag{3.67}$$

Persamaan 3.68 akan di peroleh,

$$\alpha = 2\xi_j \omega_j \tag{3.68}$$

Persamaan 3.68 adalah suatu koefisien matrik massa apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan. Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti Persamaan 3.67. Oleh karena itu untuk mode ke-i akan diperoleh hubungan,

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \alpha . M_i^* \tag{3.69}$$

substitusi nilai α dari Persamaan 3.68 ke dalam Persamaan 3.69 selanjutnya akan diperoleh Persamaan 3.70.

$$\begin{aligned}2\xi_i \omega_i M_i^* &= 2\xi_j \omega_j M_i^* \\ \xi_i &= \frac{\xi_j \omega_j}{\omega_i}\end{aligned}\tag{3.70}$$

dengan :

- ξ_i = Rasio redaman mode ke-i,
- ω_i = Frekuensi sudut mode ke-i,
- ξ_j = Rasio redaman mode ke-j, dan
- ω_j = Frekuensi sudut mode ke-j.

2. Redaman proporsional dengan kekakuan (*stiffness proportional damping*)
Bentuk umum hubungan antara redaman dengan kekakuan adalah,

$$[C] = \beta[K] \quad (3.71)$$

Apabila prinsip kondisi *orthogonal* diterapkan pada Persamaan 3.71 di atas maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} \phi^T . C . \phi &= \beta . \phi^T . K . \phi \\ C_j^* &= \beta . K_j^* \\ 2\xi_j \omega_j M_j^* &= \beta \omega_j^2 M_j^* \end{aligned} \quad (3.72)$$

dari Persamaan 3.72 akan diperoleh,

$$\beta = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (3.73)$$

Persamaan 3.73 adalah suatu koefisien matrik kekakuan apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan. Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti pada Persamaan 3.72. Oleh karena itu untuk mode ke-i akan diperoleh hubungan,

$$2\xi_i \omega_i M_i^* = \beta \omega_j^2 M_i^* \quad (3.74)$$

Substitusi nilai β dari Persamaan 3.73 ke dalam Persamaan 3.74 selanjutnya akan diperoleh Persamaan 3.75.

$$\begin{aligned} 2\xi_i \omega_i M_i^* &= \frac{2\xi_j}{\omega_j} \omega_j^2 M_i^* \\ \xi_i &= \frac{2\xi_j \omega_j}{\omega_i} \end{aligned} \quad (3.75)$$

dengan :

- ξ_i = Rasio redaman mode ke-i,
- ω_i = Frekuensi sudut mode ke-i,
- ξ_j = Rasio redaman mode ke-j, dan
- ω_j = Frekuensi sudut mode ke-j.

3. Redaman proposional terhadap massa dan kekakuan (*mass and stiffness proportional damping*)

Clough dan Penzien (1993) dalam Widodo (2017) menyatakan bahwa jenis-redaman *mass proportional damping* dan *stiffness proportional damping* masing-masing mempunyai kekurangan. Oleh karena itu kombinasi antara *mass proportional damping* dan *stiffness proportional damping* dapat dipakai sebagai penyempurna atas jenis-jenis redaman di atas.

Bentuk umum hubungan antara redaman, massa dan kekuatan tersebut adalah,

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (3.76)$$

Apabila prinsip kondisi *orthogonal* diterapkan pada Persamaan 3.76 di atas maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} \phi^T . C . \phi &= \alpha . \phi^T . M . \phi + \beta . \phi^T . K . \phi \\ C_j^* &= \alpha . M_j^* + \beta . K_j^* \\ 2\xi_j \omega_j M_j^* &= \alpha M_j^* + \beta \omega_j^2 M_j^* \\ 2\xi_j \omega_j &= \alpha + \beta \omega_j^2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Untuk dua mode yang berurutan yaitu mode ke-i dan mode ke-j maka dari Persamaan 3.77 akan menghasilkan,

$$2\xi_j \omega_j = \alpha + \beta \omega_j^2 \quad (3.78)$$

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (3.79)$$

Berdasarkan Persamaan 3.78 dan 3.79 maka akan diperoleh nilai-nilai β dan α sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2(\xi_j \omega_j - \xi_i \omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \\ \alpha &= 2\xi_j \omega_j - \beta \omega_j^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Persamaan 3.80 adalah suatu koefisien matrik massa dan matrik kekakuan apabila frekuensi sudut dan rasio redaman telah ditentukan. Untuk setiap mode juga akan mempunyai hubungan seperti pada Persamaan 3.78 dan 3.79. Untuk dua mode ditinjau, pada pada Persamaan 3.78 dan 3.79 dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta}{2}\omega_j &= \xi_j \\ \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i &= \xi_i\end{aligned}\tag{3.81}$$

Persamaan 3.81 adalah persamaan simultan yang nilai α dan β perlu diperhitungkan. Dalam *mass and stiffness proportional damping*, frekuensi sudut dan rasio redaman untuk mode ke-i dan mode ke-j sudah ditentukan dan berfungsi sebagai nilai referensi. Apabila hal ini telah dilakukan maka sebenarnya nilai α dan β dapat dicari melalui bentuk matrik Persamaan 3.81 yaitu,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \\ \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_j \\ \xi_i \end{Bmatrix}\tag{3.82}$$

Melalui Persamaan 3.82 apabila nilai-nilai frekuensi sudut dan rasio redaman untuk mode ke-i dan mode ke-j sudah ditentukan maka nilai α dan β dapat dihitung. Selanjutnya nilai-nilai rasio redaman untuk setiap mode dapat dicari dengan mengambil salah satu dari Persamaan 3.81 yaitu,

$$\frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i = \xi_i\tag{3.83}$$

Dengan catatan nilai α dan β pada Persamaan 3.83 dihitung menurut Persamaan 3.80.

3.12 Stuktur dengan Memperhitungkan Fleksibilitas Fondasi Akibat Gerakan Tanah

Tanah pada dasar gedung (fondasi) tidak sepenuhnya kaku, karena tanah pada dasar fondasi akan terpengaruh apabila terjadi getaran gedung akibat gerakan tanah. Keadaan gedung yang dikenai beban gempa akan mengalami getaran ke tiga arah, yaitu getaran tanah horizontal, getaran arah vertikal dan getaran berputar. Pada *lumped parameter model* akibat gerakan tanah dipengaruhi oleh nilai kekakuan dan redaman interaksi antara tanah dan fondasi yang berbeda, dalam hal ini kekakuan dan redaman interaksi antara tanah dengan fondasi dimodel sebagai pegas dan *dashpot* (model redaman). Kekakuan dan redaman interaksi yang diperoleh kemudian dicangkakan dengan struktur dan terjadilah sistem struktur yang utuh.

Pada metode *sub structure* dengan menggunakan pendekatan *Lumped Parameter Model* simpangan horizontal struktur terdiri atas simpangan tanah bebas (u_g), simpangan tanah dasar akibat interaksi (u_o), simpangan relatif tingkat ke-j (u_j), simpangan akibat rotasinya fondasi (u_r), atau dinyatakan dalam Persamaan 3.84.

$$u_t = u_g + u_o + u_j + u_r \quad (3.84)$$

dengan :

- u_t = Simpangan total stuktur,
- u_g = Simpangan tanah bebas,
- u_o = Simpangan tanah dasar akibat interaksi,
- u_j = Simpangan relatif tingkat ke-j, dan
- u_r = Simpangan akibat rotasinya fondasi.

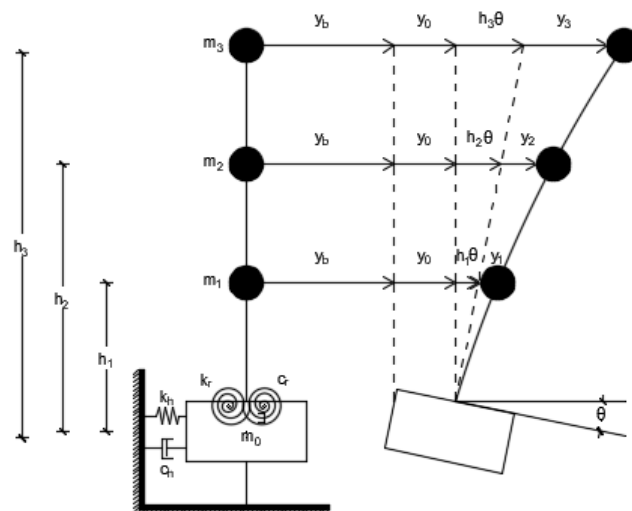
Persamaan diferensial gerakan dalam sistem struktur dapat diperoleh dengan mengambil keseimbangan dinamik struktur atas, keseimbangan horizontal, momen dan keseimbangan vertikal sistem struktur. Keseimbangan-keseimbangan itu secara umum dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned}
 F_I + F_D + F_S &= 0 \\
 F_{I,v} + F_{D,v} + F_{S,v} &= 0 \\
 F_{I,h} + F_{D,h} + F_{S,h} &= 0 \\
 F_{I,r} + F_{D,r} + F_{S,r} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

indek I, D dan S berturut-turut berarti *inersia*, *damping* dan *spring*, sedangkan indeks v, h dan r berturut-turut berarti vertikal, horizontal dan rotasi.

Unsur-unsur kekakuan dan redaman interaksi antara tanah dengan fondasi untuk vertikal, horizontal, dan rotasi (*rocking*) masing-masing akan tampak pada elemen $F_{D,v}$, $F_{S,v}$, $F_{D,h}$, $F_{S,h}$, $F_{D,r}$, dan $F_{S,r}$. Apabila efek *rigid body motion* dan *vertical mode* diabaikan maka persamaan-persamaan di atas akan membentuk satu set persamaan diferensial dengan variabel u_j , u_0 dan u_r dengan u_r adalah rotasi fondasi.

Pengaruh gerakan tanah yang mengakibatkan rotasi fondasi pada struktur bangunan karena mengalami getaran arah horizontal dan getaran berputar pada struktur MDOF dapat digambarkan Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Struktur MDOF dengan Rotasi Fondasi

Gambar 3.12 merupakan pemodelan struktur bangunan dengan massa menggumpal (*lumped mass*) yang bergeser kearah horizontal dan terjadi rotasi dengan struktur bergeser kearah vertikal dan terjadi torsi diabaikan. Jika gaya

inersia, gaya redam serta gaya kekakuan adalah F_I , F_D dan F_S maka diperoleh Persamaan 3.86.

$$\begin{aligned}
 F_I &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta}) = 0 \\
 F_D &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta}) = 0 \\
 F_S &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (y_j + y_b + y_0 + h_j \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Untuk keseimbangan struktur untuk arah horizontal diperoleh Persamaan 3.87.

$$\begin{aligned}
 F_{I,h} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta}) + m_0 (\ddot{y}_b + \ddot{y}_0) = 0 \\
 F_{D,h} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta}) + Ch \cdot \dot{y}_0 = 0 \\
 F_{S,h} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (y_j + y_b + y_0 + h_j \theta) + Kh \cdot y_0 = 0
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Untuk keseimbangan struktur untuk arah putar (rotasi) diperoleh Persamaan 3.88.

$$\begin{aligned}
F_{I,r} &= \begin{bmatrix} m_1 h_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 h_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \ddot{y}_j + \ddot{y}_b + \ddot{y}_0 + h_j \ddot{\theta} \right\} + I_G \ddot{\theta} = 0 \\
F_{D,r} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \dot{y}_j + \dot{y}_b + \dot{y}_0 + h_j \dot{\theta} \right\} + Cr \dot{\theta} = 0 \\
F_{S,r} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ y_j + y_b + y_0 + h_j \theta \right\} + Kh \theta = 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Dari Persamaan 3.86 sampai 3.88 maka akan diperoleh Persamaan 3.89.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_1 & m_1 h_1 \\ 0 & m_2 & 0 & m_2 & m_2 h_2 \\ 0 & 0 & m_3 & m_3 & m_3 h_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_0 + m_1 + m_2 + m_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 \\ m_1 h_1 & m_2 h_2 & m_3 h_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 & I_G + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2 \end{bmatrix} \\
& \left\{ \begin{matrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\theta} \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \\
& \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_0 \\ \theta \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} m_1 \ddot{y}_b \\ m_2 \ddot{y}_b \\ m_3 \ddot{y}_b \\ (m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_b \\ (m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3) \ddot{y}_b \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Dengan [M], [C], [K], $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$ dan $\{y\}$ dapat dilihat pada Persamaan 3.90.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_1 & m_1 h_1 \\ 0 & m_2 & 0 & m_2 & m_2 h_2 \\ 0 & 0 & m_3 & m_3 & m_3 h_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_0 + m_1 + m_2 + m_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 \\ m_1 h_1 & m_2 h_2 & m_3 h_3 & m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 & I_G + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[C] &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \\
[K] &= \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \\
\{\ddot{y}\} &= \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_0 \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Untuk matriks redaman pada struktur atas dapat dihitung dengan tiga cara yaitu, redaman proposional dengan massa, redaman proposional dengan kekakuan dan redaman proposional dengan massa dan kekakuan. Sehingga matriks redaman berturut-turut dapat dilihat pada Persamaan 3.91 sampai 3.93.

$$[C] = \begin{bmatrix} \alpha.m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha.m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha.m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ch & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cr \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \beta(k_1+k_2) & \beta-k_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-k_2 & \beta(k_2+k_3) & \beta-k_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-k_3 & \beta.k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \alpha.m_1 + \beta(k_1 + k_2) & \beta - k_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta - k_2 & \alpha.m_2 + \beta(k_2 + k_3) & \beta - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta - k_3 & \alpha.m_3 + \beta.k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

dengan :

I_G = Inersia polar moment,

c_h = Redaman horizontal interaksi antara tanah dengan fondasi,

c_r = Redaman vertikal interaksi antara tanah dengan fondasi,

k_h = Kekakuan horizontal interaksi antara tanah dengan fondasi, dan

k_r = Kekakuan putar (rotasi) interaksi antara tanah dengan fondasi.

Nilai I_G menggunakan persamaan dari buku Joseph E. Bowles dengan judul *Foundation Analysis and Design* (1982) yang dapat dilihat pada Persamaan 3.94 dan 3.95.

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL^3}{3\pi}} \quad (3.94)$$

$$I_G = m \left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \quad (3.95)$$

dengan :

B = Lebar *pile cap*,

L = Panjang *pile cap*,

m = Massa total (bangunan + *pile cap*),

r_0 = Radius *pile cap*, dan

h = Tinggi *pile cap*.

3.13 Getaran Bebas pada Struktur Derajat Kebebasan Banyak

Suatu struktur akan bergoyang apabila memperoleh pembebanan dari luar misalnya akibat beban angin, getaran akibat putaran mesin (beban harmonik) ataupun akibat beban gerakan tanah/gempa. Getaran-getaran seperti ini

dikelompokkan sebagai getaran dipaksa atau *force vibration system*. Membahas tentang getaran bebas pada struktur dengan derajat kebebasan banyak akan diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat pada analisis dinamika struktur. Pembahasan getaran bebas ini masih diikuti dengan penyederhaan permasalahan yaitu dengan menganggap struktur tidak mempunyai redaman (*undamped system*).

3.13.1 Nilai Karakteristik (*Eigenproblem*)

Getaran bebas (*free vibration system*) pada kenyataan jarang terjadi pada struktur MDOF, namun membahas jenis getaran ini akan diperoleh suatu besaran/karakteristik dari struktur yang bersangkutan yang selanjutnya sangat berguna untuk pembahasan-pembahasan respon struktur berikutnya. Besaran-besaran tersebut terutama adalah frekuensi sudut dan *normal modes*.

Pada getaran bebas untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak maka persamaan diferensial geraknya adalah seperti Persamaan 3.96 dengan nilai ruas kanan sama dengan nol,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.96)$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman (*damped frequency*) nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman, apabila nilai damping ratio relatif kecil. Jika hal ini diadopsi untuk struktur dengan derajat kebebasan banyak maka untuk nilai $C = 0$ maka Persamaan 3.96 menjadi,

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (3.97)$$

Persamaan 3.97 adalah persamaan diferensial pada struktur MDOF yang dianggap tidak mempunyai redaman maka sebagaimana penyelesaian persamaan diferensial yang sejenis maka penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik menurut bentuk,

$$Y = \{\phi\}_i \sin(\omega t) \quad (3.98.a)$$

$$\dot{Y} = \omega \{\phi\}_i \sin(\omega t) \quad (3.98.b)$$

$$\ddot{Y} = -\omega^2 \{\phi\}_i \sin(\omega t) \quad (3.98.c)$$

Dimana $\{\phi\}_i$ adalah suatu ordinat massa pada mode ke-i. Persamaan 3.98 disubstitusikan ke dalam Persamaan 3.97 maka akan diperoleh,

$$-\omega^2 [M] \{\phi\}_i \sin(\omega t) + [K] \{\phi\}_i \sin(\omega t) = 0 \quad (3.99.a)$$

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{\phi\}_i = 0 \quad (3.99.b)$$

Persamaan 3.99 adalah suatu persamaan yang sangat penting dan biasanya disebut dengan persamaan *eigenproblem* atau karakteristik problem atau ada juga yang menyebut *eigenvalue* problem. Persamaan 3.99 tersebut adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan simultan tersebut adalah dengan memakai dalil Cramer (1704-1752). Cramer (1704-1752) dalam Widodo (2017) menyatakan bahwa penyelesaian persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor $\{\phi\}_i$ adalah nol, sehingga Persamaan 3.99 menjadi Persamaan 3.100.

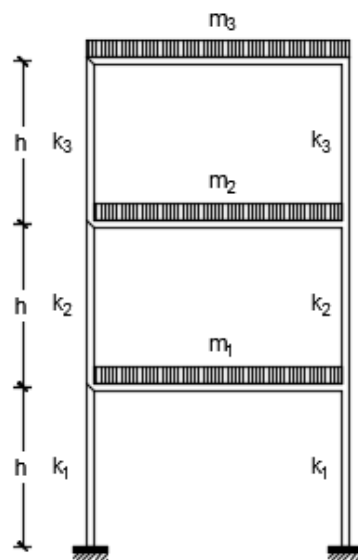
$$[[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (3.100)$$

Dengan adanya hubungan antara jumlah mode dengan jumlah massa struktur maka struktur yang mempunyai n-tingkat maka akan mempunyai n-derajat kebebasan. Mode itu sendiri adalah jenis/pola/ragam getaran/goyangan suatu struktur bangunan. Persamaan 3.100 akan menghasilkan suatu polinomial pangkat-n yang selanjutnya akan menghasilkan nilai ω_i^2 untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Selanjutnya substitusi masing-masing frekuensi sudut ω_i kedalam Persamaan 3.100 maka akan diperoleh nilai-nilai *mode shape*, sedangkan *mode shape* pada suatu *eigenproblem* diambil dari model struktur yang berada pada tanah dengan kondisi dianggap jepit sempurna.

3.13.2 Metode Polinomial

Metode polinomial pada dasarnya masih menggunakan persamaan *eigenproblem*. Untuk mencari atau menghitung *eigenvalue* (nilai-nilai frekuensi sudut) tidak dapat lagi digunakan cara determinan. Cara yang dipakai adalah dengan mentransfer persamaan simultan *eigenproblem* menjadi suatu persamaan polinomial pangkat banyak. Akar-akar persamaan polinomial inilah yang akan dicari yang seterusnya akan menghasilkan nilai-nilai *eigenvector*.

Untuk membahas cara polinomial ini maka dapat ditinjau suatu struktur dengan fondasi jepit seperti pada Gambar 3.13.



a. Struktur Bangunan 3-DOF



b. Free Body Diagram

Gambar 3.13 Struktur Bangunan 3 Derajat Kebebasan

Berdasarkan keseimbangan gaya-gaya *free body diagram* maka dapat disusun persamaan simultan gerakan dibawah ini,

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) &= 0
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Persamaan 3.101 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 3.102.

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 &= 0 \\
m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_3 &= 0 \\
m_3 \ddot{y}_3 - k_3 y_2 + k_3 y_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Persamaan 3.102 dapat ditulis dalam bentuk matriks pada Persamaan 3.103.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.103}$$

3.14 Motode β -Newmark

Motode β -Newmark dapat dipakai untuk menyelesaikan integrasi persamaan diferensial *coupled* struktur MDOF secara langsung. Motode β -Newmark yang dimaksud misalnya adalah metode yang berdasarkan pada *incremental method*, sedangkan untuk struktur yang berperilaku linear inelastik maupun nonlinier inelastik maka perlu dikembangkan model integrasi yang dapat mensimulasikan perubahan kekakuan menurut fungsi dan waktu.

Persamaan diferensial yang berlaku saat interval yang ditinjau pada metode β -Newmark dapat dilihat pada Persamaan 3.104.

$$m \Delta \ddot{y}_i + c \Delta \dot{y}_i + k \Delta y_i = \Delta p_i \tag{3.104}$$

Apabila beban dinamik yang dipakai adalah beban gempa maka untuk struktur MDOF persamaan diferensialnya dapat dilihat pada Persamaan 3.105.

$$[M] \Delta \ddot{y}_i + [C] \Delta \dot{y}_i + [K] \Delta y_i = [M] \{r\} \ddot{y}_{b,i} \tag{3.105}$$

Pada metode β -Newmark memakai perjanjian notasi untuk perubahan simpangan (Δy), perubahan kecepatan ($\Delta \dot{y}$) dan perubahan percepatan ($\Delta \ddot{y}$) yang dapat dilihat pada Persamaan 3.106.

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta \dot{y}_i = \dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i, \Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i \quad (3.106)$$

Sedangkan perubahan intensitas pembebanan pada interval yang ditinjau dapat dilihat pada Persamaan 3.107.

$$\Delta p_i = \Delta p_{i+1} - \Delta p_i \quad (3.107)$$

Untuk struktur MDOF akibat gempa bumi maka persamaan diferensial dapat digunakan Persamaan 3.108.

$$\Delta p_i = [M] \{r\} (\ddot{y}_{b,i+1} - \ddot{y}_{b,i}) \quad (3.108)$$

Untuk memulai integrasi numerik tersebut digunakan Persamaan 3.109.

$$\Delta \ddot{y}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta y_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{y}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{y}_i \quad (3.109)$$

Dengan $\Delta \ddot{y}_i$ adalah perubahan percepatan pada langkah ke-i, sedangkan untuk perubahan kecepatan pada langkah yang sama $\Delta \dot{y}_i$ dapat dilihat pada Persamaan 3.110.

$$\Delta \dot{y}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta y_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{y}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{y}_i \quad (3.110)$$

Kemudian untuk perubahan simpangan dapat dicari dengan Persamaan 3.111.

$$\Delta y_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}} \quad (3.111)$$

Nilai $\Delta \hat{p}_i$ dan \hat{k} didapat dari Persamaan 3.112 dan 3.113.

$$\Delta \hat{p}_i = (p_{i+1} - p_i) + a \cdot \dot{y}_i + b \cdot \ddot{y}_i \quad (3.112)$$

$$\hat{k} = \left\{ [K] + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} [C] + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} [M] \right\} \quad (3.113)$$

Sedangkan untuk struktur MDOF akibat beban gempa bumi maka Persamaan 3.112 akan menjadi,

$$\Delta \hat{p}_i = [M] \{r\} (\ddot{y}_{b,i+1} - \ddot{y}_{b,i}) + a \cdot \dot{y}_i + b \cdot \ddot{y}_i \quad (3.114)$$

Dimana nilai a dan b pada Persamaan 3.112 didapat dari Persamaan 3.115 dan 3.116.

$$a = \left(\frac{1}{\beta \cdot \Delta t} [M] + \frac{\gamma}{\beta} [C] \right) \quad (3.115)$$

$$b = \left\{ \frac{1}{2\beta} [M] + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [C] \right\} \quad (3.116)$$

Pada metode β -Newmark terdapat perbedaan nilai koefisien berdasarkan metode yang digunakan, yaitu.

1. Metode percepatan rata-rata, dengan nilai koefisien $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$.
2. Metode percepatan linier, dengan nilai koefisien $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$.

Selanjutnya simpangan, kecepatan, dan percepatan pada akhir interval didapat dari Persamaan 3.117.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (3.117.a)$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \quad (3.117.b)$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \ddot{y}_i + \Delta \ddot{y}_i \quad (3.117.c)$$

3.15 Respon Struktur

Respon struktur merupakan respon yang terjadi pada struktur yang akibat dari beban gempa.

3.15.1 Simpangan Relatif

Simpangan relatif merupakan simpangan bersih yang terjadi pada struktur akibat dari beban gempa. Nilai ini didapatkan dari hasil simpangan pada metode β -Newmark pada Persamaan 3.117.

3.15.2 Rotasi Fondasi

Rotasi fondasi merupakan nilai sudut yang terjadi pada fondasi akibat beban gempa.

3.15.3 Simpangan Rotasi

Simpangan rotasi merupakan simpangan yang dihasilkan oleh adanya rotasi fondasi. Nilai simpangan rotasi didapatkan dari Persamaan 3.118.

$$y_r = H * \tan(\phi) \quad (3.118)$$

dengan :

h = Tinggi tingkat, dan

ϕ = Sudut rotasi fondasi.

3.15.4 Simpangan Total

Simpangan total didapatkan dari Persamaan 3.119.

$$y_{tot} = y + y_r + y_{fond} \quad (3.119)$$

dengan :

y = Simpangan relatif,

y_r = Simpangan rotasi, dan

y_{fond} = Simpangan pada fondasi.

3.15.5 Drift Ratio

Drift ratio merupakan selisih simpangan antar tingkat dalam bentuk persen. *Drift ratio* didapatkan dari Persamaan 3.120.

$$yy(t) = \frac{y_j(t) - y_{j-1}(t)}{H} * 100\% \quad (3.120)$$

dengan :

y_j = Simpangan pada lantai ke j,

y_{j-1} = Simpangan pada lantai dibawah lantai ke j, dan

H = Tinggi tingkat.

3.15.6 Gaya Horizontal

Gaya horizontal didapatkan dari Persamaan 3.121.

$$F_j(t) = y_j(t) * K_j \quad (3.121)$$

dengan :

y_j = Simpangan pada lantai ke j,

K_j = Kekakuan struktur.

3.15.7 Gaya Geser

Gaya geser didapatkan dari Persamaan 3.122.

$$V(t) = \sum_{j=1}^n F(t) \quad (3.122)$$

dengan :

F = Gaya horizontal.

3.15.8 Momen Guling (*Overtuning Moment*)

Momen guling didapatkan dari Persamaan 3.123.

$$M_g = F_j(t) * H \quad (3.123)$$

dengan :

F = Gaya horizontal, dan

H = Tinggi tingkat.