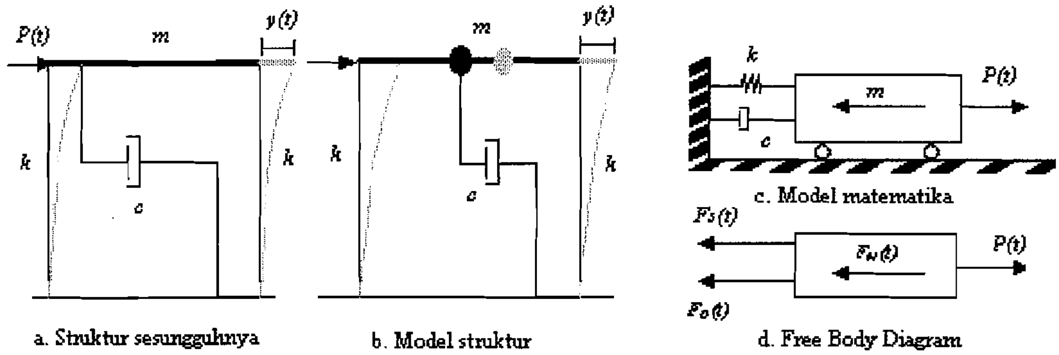
BAB III

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini akan menjelaskan mengenai garis besar dan teori yang mendukung guna memecahkan masalah yang di hadapi. Diantaranya adalah mengenai sistem berderajat kebebasan tunggal akibat beban dinamik, sistem berderajat kebebasan tunggal akibat beban gempa, sistem berderajat kebabasan banyak, *mode shape* dan frekuensi, jenis-jenis simpangan dan efeknya terhadap kerusakan, persamaan differensial independen, respon struktur terhadap beban gempa, prinsip resonansi pada beban dinamik harmonik.

3.1 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal Akibat Beban Dinamik

Beban dinamik yang diperhitungkan di dalam analisis struktur adalah beban angin dan beban gempa. Struktur dengan derajat kebebasan tunggal mempunyai satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jumlah derajat kebebasan biasanya dapat dikaitkan dengan jumlah massa. Struktur dengan derajat kebebasan tunggal atau *single degree of freedom* (SDOF) berarti hanya akan mempunyai satu massa. Beban dinamik seperti beban akibat putaran mesin atau beban akibat angin akan membebani struktur secara langsung dan umumnya dianggap bekerja pada lantai. Model sistem dengan derajat kebebasan tunggal *single degree of freedom* (SDOF) akibat beban dinamik ditunjukkan dalam Gambar 3.1



Gambar 3.1 Model Sistem SDOF Akibat Beban Dinamik

Berdasarkan keseimbangan dinamik dengan *free body diagram* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1.d diperoleh persamaan

$$F_M(t) + F_D(t) + F_S(t) = P(t) \tag{3.1}$$

$$F_M(t) = m \,.\, \ddot{y}(t), \quad F_D(t) = c \,.\, \dot{y}(t), \, dan \quad F_S(t) = k \,.\, y(t) \tag{3.2}$$

F_M adalah gaya inersia, F_D adalah gaya redam, F_S adalah gaya tarik/desak pegas yang mempresentasikan kekakuan kolom, $P(t)$ adalah beban dinamik, dan $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan dan simpangan, dan m, c, k masing-masing adalah massa, redaman dan kekakuan kolom.

Substitusi persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1), menjadi

$$m \,.\, \ddot{y}(t) + c \,.\, \dot{y}(t) + k \,.\, y(t) = P(t) \tag{3.3}$$

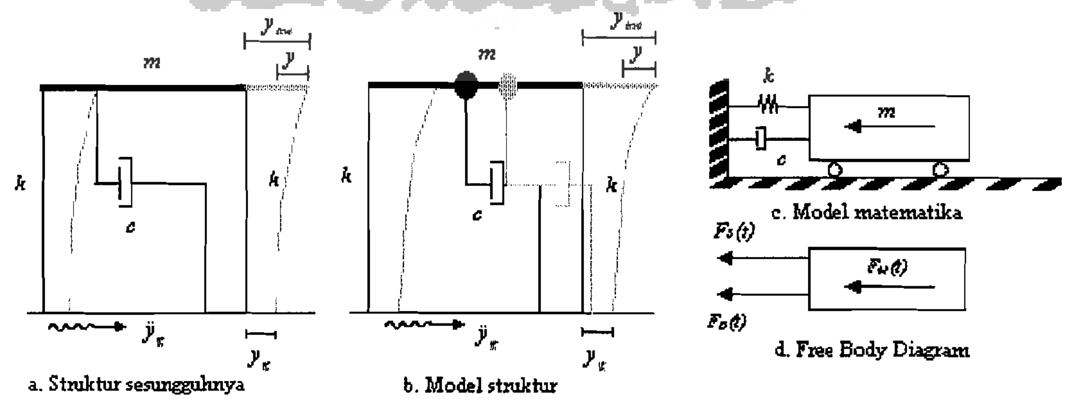
persamaan 3.3, disebut persamaan differensial gerakan (*differensial equation of motion*) pada struktur dengan derajat kebebasan tunggal. Untuk selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dari waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \tag{3.4}$$

3.2 Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal Akibat Beban Gempa

Beban statik biasanya bekerja secara vertikal namun beban gempa bekerja secara simultan pada arah vertikal dan horisontal bahkan dapat berupa putaran (Hu, Liu and Dong, 1996). Beban gempa merupakan beban yang menggunakan satuan percepatan tanah namun pada umumnya beban yang bekerja pada struktur menggunakan satuan gaya. Gerakan tanah akibat gempa bumi umumnya sangat random dan terjadi hanya beberapa detik saja tidak seperti halnya pada beban statik yang memiliki durasi lama.

Getaran gempa bumi pada permukaan tanah menyebabkan percepatan tanah dan simpangan horisontal *(horizontal displacement)*. Dalam keadaan ini digunakan anggapan bahwa pondasi dan tanah pendukung bergerak bersama-sama (Widodo, 1996)



Gambar 3.2 Model Sistem SDOF Akibat Beban Gempa

Berdasarkan *free body diagram* yang ditunjukkan pada gambar 3.2.d, maka persamaan differensial gerakan adalah

$$F_M + F_D + F_S = 0$$

$$F_M = m\,.\,\ddot{y}, \qquad F_D = c\,.\,\dot{y},\ dan \quad F_S = k\,.\,y$$

$$m\,\ddot{y}_{tot} + c\,\dot{y} + k\,y = 0 \tag{3.5}$$

Akibat gempa bumi, tanah mempunyai percepatan sebesar $\ddot{y}_g$, sehingga

$$\ddot{y}_{tot} = \ddot{y}_g + \ddot{y} \tag{3.6}$$

Dengan mendistribusikan persamaan (3.6) ke dalam persamaan (3.5), persamaan (3.5) dapat ditulis menjadi

$$m(\ddot{y}_g + \ddot{y}) + c\,\dot{y} + k\,y = 0 \tag{3.7}$$

$$m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = -\,m\,\ddot{y}_g \tag{3.8}$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = -\,m\,\ddot{y}_g \tag{3.9}$$

Dalam prinsip dinamika struktur diperoleh hubungan

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \frac{c}{m} = 2\,\xi\,\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/dt)}, \qquad \omega = \textit{angular frequency} \tag{3.10a}$$

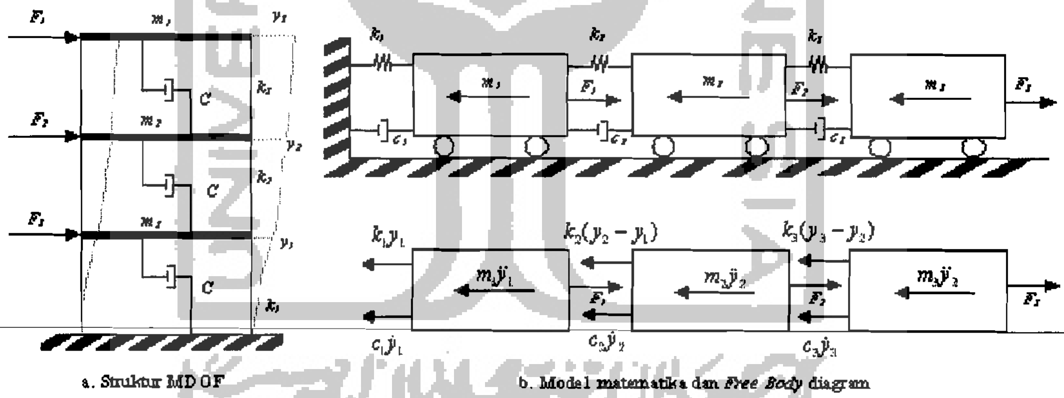
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(dt)}, \qquad T = \text{periode} \tag{3.10b}$$

Dengan demikian persamaan (3.9) akan menjadi,

$$\ddot{y} + 2\xi\,\omega\,\dot{y} + \omega\,y = -\,\ddot{y}_g \tag{3.11}$$

3.3 Sistem Berderajat Kebebasan Banyak

Pada struktur bangunan gedung bertingkat banyak, umumnya massa struktur dapat digumpalkan di satu titik pada lantai *(lumped mass)*, dengan demikian struktur yang semula mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan dapat dipandang sebagai struktur kebebasan terbatas. Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan pada struktur kebebasan banyak, dapat digunakan anggapan *shear building,* selanjutnya $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$, $P(t)$ masing-masing adalah percepatan, kecepatan, simpangan dan beban gempa yang merupakan fungsi dan waktu, penulisannya dapat disederhanakan menjadi $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y, P, sebagaimana penulisan pada struktur SDOF di muka.



Gambar 3.3 Model Sistem MDOF

Pada struktur bangunan gedung bertingkat tiga seperti pada Gambar 3.3.a, struktur akan mempunyai tiga derajat kebebasan, sehingga struktur yang mempunyai *n*-tingkat akan mempunyal *n*-derajat kebebasan dan mempunyai *n*-mode. Persamaan differensial gerakan pada struktur berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Berdasarkan keseimbangan dinamik seperti pada Gambar 3.3.b, akan diperoleh persamaan

$$m_1\,\ddot{y}_1 + c_1\,\ddot{y}_1 + k_1\,y_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2(y_2 - y_1) = F_1 \tag{3.12a}$$

$$m_1\,\ddot{y}_1 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3(y_3 - y_2) = F_2 \tag{3.12b}$$

$$m_3\,y_3 + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3(y_3 - y_2) = F_3 \tag{3.12c}$$

Selanjutnya persamaan (3.12) dapat ditulis dalam bentuk matrik yang lebih ringkas, menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F\} \tag{3.13}$$

$[M],[C],[K]$, berturut-turut adalah matrik massa, matrik redaman dan matrik kekakuan yang dapat ditulis menjadi

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.14a}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix} \tag{3.14b}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_2 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3.14c}$$

$$\{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \{F_{(t)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

dan $\{\ddot{y}\},\{\dot{y}\},\{y\}$ masing-masing adalah vektor percepatan, vektor kecepatan, vektor simpangan, dan $\{F\}$ adalah vektor gaya atau beban.

3.4 *Mode Shape* dan Frekuensi Sudut

Peristiwa pergerakan massa disebut dengan getaran bebas *(free vibration system)*, adalah suatu struktur yang bergerak akibat pembebanan dari luar maupun adanya suatu nilai awal *(initial condition)*. Misalnya suatu massa ditarik sedemikian rupa sehingga mempunyai simpangan awal sebesar y_n dan apabila gaya tarik tersebut dilepas maka massa akan bergerak. Gerakan suatu massa disebabkan pembebanan dari luar misalnya beban angin, beban gempa dan lainnya, maka gerakan massa dikelompokkan sebagai gerakan dipaksa *(forced vibration system)*. Untuk menyederhanakan permasalahan anggapan bahwa massa bergetar bebas *(free vibration)* akan sangat membantu untuk menyelesaikan analisis dinamika struktur.

Persamaan differensial gerak getaran bebas pada struktur seperti pada persamaan (3.5) dalam kondisi khusus dapat dinyatakan

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{3.16}$$

Frekuensi sudut pada struktur dengan redaman *(damped frequency)* nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur tanpa redaman jika nilai rasio redaman *(damping ratio)* kecil, sehingga persamaan (3.16) menjadi

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{3.17}$$

Persamaan (3.17) diasumsikan pada getaran bebas, sehingga vektor $\{y\}$ berbentuk

$$\{y\}=\{\phi\}\,z \tag{3.18a}$$

$$\{\ddot{y}\}=\{\phi\}\,\ddot{z} \tag{3.18b}$$

$\{\phi\}$ adalah vektor *mode shape* yaitu suatu vektor yang tidak berdimensi, yang paling sedikit sebuah elemen yang tidak sama dengan nol. Sedangkan z dan $\ddot{z}$

adalah vektor perpindahan dan vektor percepatan. Jika persamaan (3.18) disubsitusikan kedalam persamaan (3.17), akan didapatkan

$$[M]\{\phi\}\ddot{z}+[K]\{\phi\}z=\{0\} \tag{3.19}$$

$[M]$ dan $[K]$ adalah matriks konstan dan pada sebuah hipotesis disebutkan bahwa $\{\phi\}$ juga merupakan matriks konstan, akan didapatkan

$$\ddot{z} + (\text{konstanta})z = 0 \tag{3.20}$$

Jika konstanta diatas adalah $\omega_n^{\ 2}$ *(undamped natural frequency)*, persamaan (3.20) menjadi

$$\ddot{z}+\omega^2 z=0 \tag{3.21}$$

Persamaan (3.21) diselesaikan dengan

$$z = A \sin \omega t \tag{3.22}$$

sehingga persamaan (3.18) menjadi

$$\{y\}=\{\phi\}A \sin \omega t \tag{3.23a}$$

$$\{\ddot{y}\}=-\omega^2\{\phi\}A \sin \omega t \tag{3.23b}$$

Persamaan (3.23) disubsitusikan kedalam persamaan (3.17) didapatkan

$$(-\omega^2[M]\{\phi\}+[K]\{\phi\})\sin \omega t=0 \tag{3.24}$$

Persamaan (3.24) akan ada penyelesaiannya *(nontrivial solution)*, jika A dan ω keduanya adalah tidak sama dengan nol, sehingga

$$\{[K]-\omega^2[M]\}\{\phi\}=0 \tag{3.25}$$

Suatu sistem akan ada amplitudo yang terbatas jika nilai determinan sama dengan nol, sehingga

$$[K]-\omega^2[M]=0 \tag{3.26}$$

Persamaan (3.25) disebut dengan *Eigenproblem*. Nilai determinan dari persamaan (3.26) akan menghasilkan suatu persamaan polinomial dengan derajat ke-n yaitu $\lambda = \omega^2$, kemudian nilai λ yang diperoleh disubsitusikan ke persamaan (3.25), akan menghasilkan nilai mode shape $\{\phi\}_n$ dan simpangan $(y)_n$. Indeks n menunjukkan ragam/pola goyangan.

3.5. Jenis-jens Simpangan dan Efeknya Terhadap Kerusakan

1. Simpangan Relatif

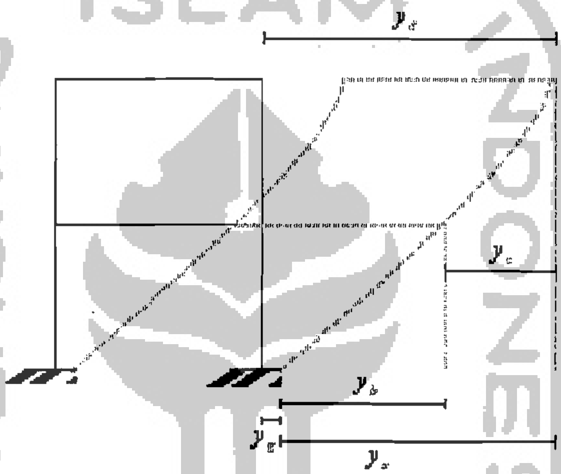
Simpangan relatif adalah simpangan yang dihitung relatif terhadap lantai dasar. Simpangan relatif ini mempunyai efek yang berpengaruh terhadap *structural pounding*. Masalah *structural pounding* ini biasa terjadi pada bangunan yang berdekatan untuk memaksimalkan penggunaan lahan, hal ini dapat menyebabkan kerusakan yang fatal pada bangunan bahkan dapat menyebabkan kerusakan total. Hal ini dapat dicegah dengan memperhitungkan jarak antara dua bangunan yang saling berdekatan. Jarak tersebut dapat dihitung dengan menghitung simpangan horisontal pada setiap tingkat. Simpangan relatif lantai 1 yang ditunjukkan pada Gambar 3.4, dirumuskan sebagai berikut :

$$y_a = y_d - y_g \tag{3.28}$$

2. Simpangan Antar Tingkat (*Inter Story Drift*)

Simpangan ini adalah simpangan yang terjadi pada tiap tingkat, simpangan ini dihitung dengan cara simpangan lantai atas dikurangi simpangan lantai bawah. *Inter Story Drift* terjadi karena kecacatan/kekurangan perencanaan konfigurasi bangunan yang berhubungan dengan kekakuan struktur. Distribusi kekakuan struktur terjadi secara vertikal tidak merata yang menyebabkan adanya suatu tingkat yang lemah. *Inter Story Drift* yang berlebihan sangat mungkin terjadi pada daerah tingkat lemah, oleh karena itu kerusakan struktur akibat ini sangat sering terjadi. Besar simpangan antar tingkat yang ditunjukkan pada Gambar 3.4, dirumuskan sebagai berikut :

$$y_c = y_a - y_b \tag{3.28}$$



Gambar 3.4 Simpangan struktur akibat gempa

3.6 Persamaan Differensial Independen (*Uncoupling*)

Pada kondisi standar, struktur yang mempunyai *n*-derajat kebebasan akan mempunyai *n*-mode, masing-masing mode akan memberikan kontribusi simpangan horisontal tiap-tiap massa. Simpangan massa ke-*m* atau y_m dapat diperoleh dengan menjumlahkan pengaruh dari kontribusi tiap-tiap mode. Kontribusi mode ke-*n* terhadap simpangan horisontal massa ke-*m* tersebut dinyatakan dalam produk antara ϕ_{mn} dengan suatu modal amplitudo Z_n yang dinyatakan dalam bentuk

$$\{Y\} = [\phi]\{Z\} \tag{3.29a}$$

$$\{\dot{Y}\} = [\phi]\{\dot{Z}\} \tag{3.29b}$$

$$\{\ddot{Y}\} = [\phi]\{\ddot{Z}\} \tag{3.29c}$$

Subtitusi persamaan (3.29) ke dalam persamaan (3.28) akan diperoleh

$$[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + [C][\phi]\{\dot{Z}\} + [K][\phi]\{Z\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_g \tag{3.30}$$

Apabila persamaan (3.30) dikalikan dengan *transpose* suatu mode $\{\phi\}^T$, diperoleh

$$\{\phi\}^T[M][\phi]\{\ddot{Z}\} + \{\phi\}^T[C][\phi][\dot{Z}] + \{\phi\}^T[K][\phi]\{Z\} = -\{\phi\}^T[M]\{1\}\ddot{y}_g \tag{3.31}$$

Misal, diambil struktur yang mempunyai 3 derajat kebebasan, maka suku pertama persamaan (3.31) berbentuk

$$\lfloor \phi_{11} \quad \phi_{21} \quad \phi_{31} \rfloor \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

Berdasarkan hubungan orthogonal, maka untuk mode ke-1 persamaan (3.32) akan mcnjadi

$$\lfloor \phi_{11} \quad \phi_{21} \quad \phi_{31} \rfloor \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} \ddot{Z}_1 \tag{3.33}$$

Dengan catatan, persamaan di atas dalam hubungan orthogonal, $m = n$. Pada kondisi orthogonal apabila m tidak sama dengan n, perkalian matriks sama dengan nol.

$$\{\phi\}_m^T[M]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.34a}$$

$$\{\phi\}_m^T[K]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.34b}$$

$$\{\phi\}_m^T[C]\{\phi\}_n = 0 \tag{3.34c}$$

untuk mode ke-*n*, secara umum persamaan (3.33) dapat ditulis dengan

$$\{\phi\}_m^T[M]\{\phi\}_n\ddot{Z}_n \tag{3.35}$$

Cara diatas juga berlaku untuk suku ke-2 dan ke-3 pada persamaan (3.30). Berdasarkan hubungan orthogonal persamaan (3.31) akan menjadi

$$\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n\ddot{Z}_n + \{\phi\}_n^T[C]\{\phi\}_n\dot{Z}_n + \{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_n Z_n = -\{\phi\}_m^T[M]\{1\}\ddot{y}_g \tag{3.36}$$

Persamaan (3.36) adalah persamaan differensial yang bebas/*idenpendent* antara satu dengan yang lain. Persamaan tersebut diperoleh setelah diterapkan hubungan orthogonal, baik orthogonal matriks massa, matriks redaman dan matriks kekakuan. Dengan demikian untuk *n*-derajat dengan *n*-persamaan differensial yang dahulu bersifat *coupling* sekarang menjadi *independent/uncoupling*. Berdasarkan sifat-sifat tersebut maka persamaan differensial dapat diselesaikan untuk setiap pengaruh mode.

Berdasarkan persamaan (3.36), dapat didefinisikan suatu generalisasi massa (*generalized mass)*, redaman dan kekakuan sebagai berikut

$$M_n^* = \{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n \tag{3.37a}$$

$$C_n^* = \{\phi\}_n^T[C]\{\phi\}_n \tag{3.37b}$$

$$K_n^* = \{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_n \tag{3.37c}$$

Dengan definisi seperti pada persamaan (3.37) maka persamaan (3.36) menjadi

$$M_n^*\ddot{Z}_n + C_n^*\dot{Z}_n + K_n^*Z_n = -P_n^*\ddot{y}_g \tag{3.38}$$

$$P_n^* = \{\phi\}_n^T[M]\{1\} \tag{3.39}$$

Terdapat suatu hubungan bahwa

$$\xi_n = \frac{C_n^*}{C_{cr}^*} = \frac{C_n^*}{2M_n^*\omega_n}, \quad \text{maka} \quad \frac{C_n^*}{M_n^*} = 2\xi_n\omega_n \tag{3.40a}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_n^*}{M_n^*}, \ \text{dan}\ \Gamma_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} \tag{3.40b}$$

Dengan hubungan seperti pada persamaan (3.40), persamaan (3.39) akan menjadi

$$\ddot{Z}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = -\Gamma_n\ddot{y}_g \tag{3.41}$$

$$\Gamma_N = \frac{P_n^*}{M_n^*} = \frac{\{\phi\}_n^T[M]\{1\}}{\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n} \tag{3.42}$$

Persamaan (3.42) sering disebut dengan partisipasi setiap mode atau *mode participation factor*. Selanjutnya persamaan (3.41) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n} + 2\xi_n\omega_n\frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n} + \omega_n^3\frac{Z_n}{\Gamma_n} = -\ddot{y}_g \tag{3.43}$$

Apabila diambil suatu notasi bahwa

$$\ddot{q}_n = \frac{\ddot{Z}_n}{\Gamma_n}, \ \dot{q}_n = \frac{\dot{Z}_n}{\Gamma_n}, \ \text{dan}\ q_n = \frac{Z_n}{\Gamma_n} \tag{3.44}$$

Persamaan (3.43) menjadi

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\ddot{y}_g \tag{3.45}$$

Persamaan (3.45) adalah persamaan diferensial yang *independent* karena persamaan tersebut hanya berhubungan dengan tiap-tiap mode.

Nilai partisipasi setiap mode akan dapat dihitung dengan mudah setelah koordinat setiap mode ϕ_{mn} telah diperoleh. Nilai $q, \dot{q}$ dan $\ddot{q}$ dapat dihitung dengan integrasi secara numerik. Apabila nilai tersebut telah diperoleh maka nilai

Z_n dapat dihitung. Dengan demikian simpangan horisontal setiap tingkat akan dapat dihitung.

3.7 Respon Struktur Terhadap Beban Gempa

Persamaan gerakan yang disebabkan adanya beban gempa dapat diselesaikan dengan persamaan (3.45). Nilai *q(t)* dapat diperoleh dengan membandingkan antara persamaan (3.45) dengan persamaan gerakan mode ke-*n* sistem dari SDOF. Sistem SDOF mempunyai frekuensi natural (*natural frequency*) (ω_n) dan rasio redaman (ξ_n) mode ke-*n* dari sistem MDOF, dengan *n*=1,2,3, ..., i.

Nilai yang akan dicari adalah $q_n(t)$, misalnya dipergunakan *Newmark's Acceleration Method* untuk *unconditionally stable procedures*, proses integrasi adalah sebagai berikut.

Pada *Newmark's Acceleration Method* diperoleh hubungan awal bahwa

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{q}_n + (\gamma.\Delta t)\ddot{q}_{n+1}$$

$$q_{n-1} = q_n + (\Delta t)\dot{q}_n + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{q}_n + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{q}_{n-1} \tag{3.46}$$

Parameter γ dan β untuk *Newmark's Acceleration Method* adalah γ = 1/2 dan β = 1/4, persamaan (3.46) disubstitusikan ke persamaan berikut :

$$\Delta q_n = q_n + 1 - q_n \qquad \Delta\dot{q}_n = \dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n \qquad \Delta\ddot{q}_n = \ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n \tag{3.47a}$$

$$\Delta\ddot{y}_n = \ddot{y}_{n+1} - y_n \tag{3.47b}$$

Dari distribusi persamaan (3.46) ke persamaan (3.47) diperoleh

$$\Delta\dot{q} = (\Delta t)\ddot{q}_n + (\gamma.\Delta t)\Delta\ddot{q}_n \tag{3.48a}$$

$$\Delta q_n = (\Delta t)\dot{q}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{q}n + \beta(\Delta t)^2 \Delta\ddot{q}_n \tag{3.48b}$$

Dari persamaan (3.48b) diperoleh

$$\Delta\ddot{q}_n = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta q_n - \frac{1}{\beta.\Delta t}\dot{q}_n - \frac{1}{2\beta}\ddot{q}_n \tag{3.39}$$

Substitusi persamaan (3.49) ke dalam persamaan (3.48a), diperoleh persamaan

$$\Delta\dot{q}_n = \frac{\gamma}{\beta.\Delta t}\Delta q_n - \frac{\gamma}{\beta}\dot{q}_n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{q}_n \tag{3.50}$$

Subtitusikan persamaan (3.49) dan persamaan (3.50) ke dalam persamaan (3.45), akan diperoleh

$$\left(\omega^2 + \frac{2\xi\omega\gamma}{\beta.\Delta t}\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\right)\Delta q_n = \Delta y + \left(\frac{1}{\beta.\Delta t} + \frac{2\xi\omega\lambda}{\beta}\right)\dot{q}_n + \left[\frac{1}{2\beta} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)2\xi\omega\right]\ddot{q}_n \tag{3.51}$$

Persamaan (3.51) dapat ditulis menjadi

$$\Delta q_n = \frac{\Delta\ddot{y}_n + a.\dot{q}_n + b.\ddot{q}_n}{\hat{k}} \tag{3.52}$$

$$a = \left[\frac{4}{\Delta t} + 4\xi\omega\right] \tag{3.53a}$$

$$b = 2 \tag{3.53b}$$

$$\hat{k} = \left[\omega^2 + \frac{4\xi\omega}{\Delta t} + \frac{4}{\Delta t^2}\right] \tag{3.53c}$$

Untuk memulai iterasi diperlukan anggapan bahwa

$$q_0 = 0 \tag{3.54a}$$

$$\dot{q}_0 = 0 \tag{3.54b}$$

$$\ddot{q}_0 = 0 \tag{3.54c}$$

Maka

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n \tag{3.55a}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta \dot{q}_n \tag{3.55b}$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_n + \Delta \ddot{q}_n \tag{3.55c}$$

Sehingga

$$\ddot{q}_0 = \ddot{y}_0 - \dot{q}_0 2\xi\omega - \ddot{q}\omega^2 = 0 \tag{3.56a}$$

$$\Delta \dot{q}_n = \frac{2}{\Delta t}\Delta q_n - 2\dot{q}_n \tag{3.56b}$$

$$\Delta \ddot{q}_n = \frac{4}{(\Delta t)^2}(\Delta q_n - \Delta t \dot{q}_n) - 2\ddot{q}_n \tag{3.56c}$$

Setelah diperoleh nilai q_n untuk tiap-tiap *mode*, selanjutnya nilai simpangan tiap *mode* (y_n), dapat diperoleh,

$$y_n = \Gamma_n \phi_n q_n \tag{3.57}$$

Simpangan antar tingkat (*inter story drift*) dari suatu titik pada suatu lantai harus ditentukan sebagai simpangan horisontal titik itu, relatif terhadap titik yang sesuai pada lantai dibawahnya. Perbandingan antara simpangan antar tingkat (*inter story drift*) dan tinggi tingkat yang bersangkutan tidak boleh melampaui 0,005 dengan ketentuan bahwa dengan segala hal simpangan tersebut tidak boleh melebihi dari 2 cm (PPKGRG, 1987)

3.8 Prinsip Resonansi Pada Beban Dinamik Harmonik.

Untuk mengetahui efek frekuensi beban terhadap respon struktur dapat diketahui dengan memperhatikan solusi persamaan differensial gerakan. Apabila suatu struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF dibebani beban harmonik.

$$P(t)=P_o \sin(\omega t) \tag{3.58}$$

Untuk struktur yang tidak mempunyai redaman, simpangan struktur dapat dihitung dengan rumus

$$y(t) = \frac{p_o}{k}\frac{1}{\left|1-r^2\right|}\{\sin(\Omega t) - r\sin(\omega t)\}, \text{ dan } \; r = \frac{\Omega}{\omega} \tag{3.59}$$

dengan k adalah kekakuan struktur, P_o adalah amplitudo beban, ω adalah frekuensi sudut akibat getaran struktur, Ω adalah frekuensi sudut beban dinamik dan r adalah rasio frekuensi.

Dari persamaan (3.59) terlihat bahwa respon gempa struktur dipengaruhi baik oleh frekuensi sudut beban dinamik maupun frekuensi sudut akibat getaran struktur. Respon struktur terdiri dari dua bagian pokok yaitu steadi *state response* yang ditunjukkan oleh suku *sin(ωt)* dan *transient response* yang ditunjukkn oleh suku *sin(ωt)*. Apabila frekuensi sudut beban dinamik sama dengan frekuensi sudut getar struktur maka nilai r sama dengan 1. keadaan ini disebut resonansi, yaitu keadaan dimana frekuensi sudut beban dinamik sama dengan frekuensi sudut getar struktur yang mengakibatkan simpangan struktur menjadi tak terhingga.

Persamaan (3.59) dapat ditulis dalam fungsi *Dynamic Load Factor* (DLF), yaitu :

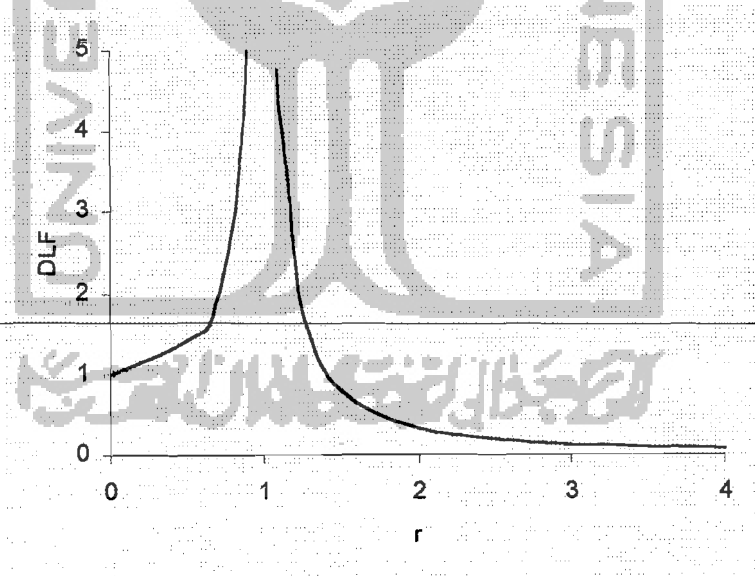
$$y(t) = y_{st}\,\mathrm{DLF}$$

$$y_{st} = \frac{p_o}{k} \qquad \text{dan} \qquad \mathrm{DLF} = \frac{1}{\left|1-r^2\right|}\left\{\sin(\omega t) - r\sin(\omega t)\right\} \tag{3.60}$$

Dalam soal-soal praktis, *transient response* sering diabaikan karena nilainya dianggap relatif kecil. Nilai DLF akan diperoleh apabila *sin(Ωt)* maksimum, yaitu *sin(Ωt)=1,* maka dapat ditulis dalam rumus.

$$\mathrm{DLF} = \frac{1}{\left|1-r^2\right|} \tag{3.61}$$

Plot antara DLF dan nilai rasio antara frekuensi *r* dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Grafik DLF lawan frekuensi rasio