BAB III

LANDASAN TEORI

3.1 Pelabuhan

Menurut Perarturan Pemerintah No.69 Tahun 2001 Pasal 1 ayat 1, tentang Kepelabuhan, pelabuhan adalah tempat yang terdiri dari daratan dan perairan di sekitarnya dengan batas – batas tertentu sebagai tempat kegiatan pemerintahan dan kegiatan ekonomi yang dipergunakan sebagai tempat kapal bersandar, berlabuh, naik turun penumpang dan/atau bongkar barang yang dilengkapi dengan fasilitas keselamatan pelayanan dan kegiatan penunjang pelabuhan serta sebagai tempat perpindahan antara moda transportasi.

Menurut Triatmodjo (1996) pelabuahan (*port*) adalah suatu wilayah/tempat perairan yang terlindung oleh gelombang air laut dan berfungsi sebagai tempat berlabuhnya kapal atau kendaraan air lainnya yang berfungsi menaikan atau menurunkan penumpang, barang, hewan, reparasi, pengisian bahan bakar dan lain sebagainya.

3.2 Tongkang

Tongkang atau Ponton adalah suatau jenis kapal yang dengan lambung datar atau suatu kotak besar yang mengapung, digunakan untuk mengangkut berbagai jenis barang, mengangkut mobil menyebrangi sungai, di daerah yang belum memiliki jembatan. Dengan sistem ditarik oleh kapal tunda atau digunakan untuk mengakomodasikan pasang-surut seperti pada dermaga apung.

3.3 Kapal Tunda

Kapal tunda (*tugboat*) adalah kapal yang digunakan untuk melakukan pergerakan, yang berfungsi untuk menarik atau mendorong kapal lainnya di pelabuhan. Salah satu contoh kapal yang ditarik yaitu tongkang, kapal rusak, dan peralatan lainnya. Walaupun ukuran kapal tunda kecil, namun memilik tenaga yang besar bila dibandingkan dengan ukurannya yaitu berkekuatan antra 750 sampai 3000 tenaga kuda (500 – 2000 KW).

3.4 Pengertian Pelayanan

Pelayanan adalah suatu kegiatan atau tindakan yang akan diberikan pada orang lain atau mesin secara fisik sebagai pertolongan agar dapat menyelesaikan sebuah masalah. Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) dijelaskan pelayanan sebagai usaha melayani kebutuhan orang lain. Sedangkan melayani adalah membantu menyiapkan (mengurus) apa yang diperlukan sesorang. Menurut Loina (2001: 138) dalam bukunya *Hubungan Masyarakat Membina Hubungan Baik Dengan Publik* mengemukakan bahwa pelayanan merupakan suatu proses keseluruhuhan dari pembentuk citra perusahaan, baik melalui media berita, membentuk budaya perusahaan secara internal, maupun melakukan komunikasi tentang pandangan perusahaan secara internal, maupun melakukan komunikasi tentang pandangan perusahaan kepada para pemimpin pemerintah serta publik lainnya yang berkepentingan. Sedangkan menurut Soegito (2007) dalam bukunya *Marketing Research* Pelayanan adalah setiap kegiatan atau manfaat yang dapat memberikan suatu pihak kepada pihak lainnya yang pada dasarnya tidak berwujud dan tidak pula berakibat pemilikan sesuatu dan produksinya dapat atau tidak dapat dikaitkan dengan suatu produk fisik.

Pelayanan yang diberikan menyangkut segala usaha yang dilakukan oleh sesorang dalam rangka mencapai tujuan guna untuk mendapatkan kepuasan dalam hal pemenuhan kebutuhan. Namun tingkat kualitas pelayanan tidak hanya dapat dinilai dari sudut pandang suatu perusahaan melaikan dari sudut pandang pelanggan yang memakai jasa perusahaan tersebut.

3.5 Statistik Deskriptif

Statistika deskriptif adalah sebagian dari ilmu statistika yang berkaitan dengan prosuder-prosedur yang digunakan untuk menjelaskan karakteristik data secara umum agar mundah dimengerti (Walpole dkk, 2012). Statitstika deskriptif merupakan metode-metode yang berkaitan dengan pengumpulan dan panyajian suata data sehingga membiarkan informasi yang berguna dan akurat. (Walpole dkk, 2012).

3.6 Peubah Acak

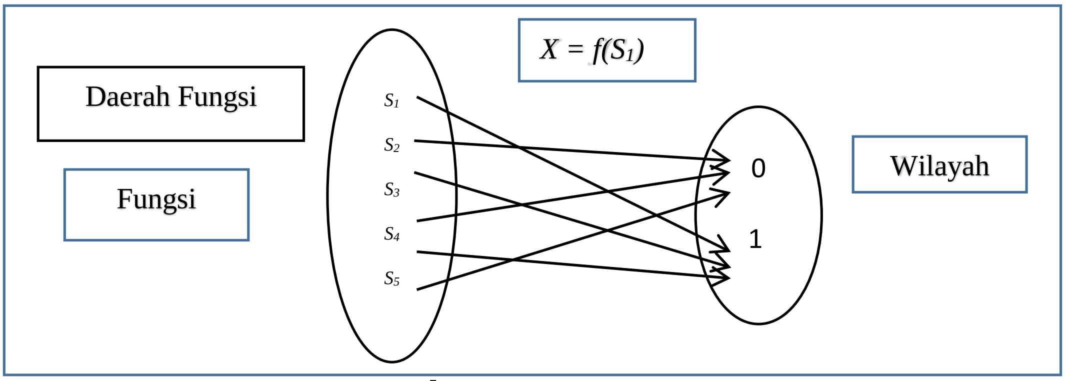
Misalkan *A* adalah sebuah percobaan dengan ruang sampel *S*. Sebuah ruang fungsi x yang terdiri dari setiap anggota $s \epsilon S$ ke sebuah bilangan real *X*(*s*) dinamakan peubah acak (Herhyanto dan Tuti, 2009) atau sebagai ilustrasi, dalam percobaan pelemparan dadu menghasilkan keluaran yang mungkin terjadi . Ruang sampelnya dituliskan seperti berikut:

$$R = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\} \tag{3.1}$$

Dari percobaan ini dapet didefiniskan beberapa peubah acak. Salah satu peubah acak yang dapat didefinisikan adalah *X* yang menunjukan munculnya mata dadu,

$$X = \begin{cases} 0, \text{bila muncul mata dadu ganjil} \\ 1, \text{bila muncul mata dadu genap} \end{cases} \tag{3.2}$$

Dengan demikian akan didapatkan nilai nol jika muncul mata dadu ganjil (S_1, S_3, S_5) sedangkan akan didaPTkan nilai 1 jika muncul mata dadu genap (S_2, S_4, S_6). Pemetaan fungsi X dapat digambar seperti berikut:



Gambar 3.1 Pemetaan Fungsi

(sumber: http://nacesa.blogspot.co.id//2014/04/konsep - sebaran - dan – sebaran – peluang.html)

3.7 Konsep Peluang

Ruang sampel *S* yang merupakan himpunan semua hasil dari suatu percobaan. Kejadian A adalah bagian dari himpunan ruang sampel. Peluang suatu kejadian *P*(*A*) Adalah rasio antara banyaknya titik kejadian dan ruang sampel ditulis sebagain berikut (Bain dan Engelhardt, 1992 :9):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \tag{3.3}$$

dengan

n(A) : banyaknya kejadian A

n(S) : banyaknya anggota ruang sampel atau kejadian yang mungkin muncul

Suatu percobaan dengan ruang sampel *S* dan A_1, A_2, A_3, … mewakili kejadian yang mungkin. Himpunan fungsi yang berhubungan dengan nilai rill *P*(*A*) dengan tiap kejadian *A* disebut fungsi himpunan peluan *P*(*A*) disebut peluang dari jika memenuhi syarat seperti berikut:

i. $0 \le P(A)$ untuk tiap *A*

ii. $P(S) = 1$

iii. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Dimana A_1, A_2, A_3, … adalah kejadian yang saling independen (Bain dan Engelhardt, 1992:9).

3.8 Distribusi Peluang

Menurut Ronaled E. Walpole dan Raymond Myers (1995) dalam bukunya yang berjudul "Ilmu Peluan dan Statistika untuk Insyinyur dan Ilmuan", menyatakan bahwa jika X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x) = P\ (X = x)$ untuk setiap x dalam *range X* dinamakan fungsi peluang X. Nilai fungsi peluang dari X yaitu $p(x)$ harus memenuhi sifat-sifat seperti berikut:

i. $p(x) \geq 0$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$
ii. $\sum_x p(x) = 1$

Kumpulan pasangan yang diurutkan $\{x,p(x)\}$ dinamakan distribusi peluang dari X. Bentuk umum dari fungsi peluang ada dua kemungkinan, yaitu berupa konstatanta dan berupa fungsi dari nilai peubah acak.

Misal X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan *real*. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X, jika nilai-nilainya, yaitu $f(x)$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $f(x) \geq 0$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$
ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
iii. Untuk setiap a dan b, dengan $-\infty < a < b < \infty$

$$\backslash P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

3.9 Distribusi Poisson

Menurut (Hasan, 2001) distribusi *poisson* adalah distribusi nilai-nilai bagi suatu variabel random x (x diskrit), yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu tertentu atau disuatu daerah tertentu.

Distribusi *poisson* memiliki ciri-ciri sebagai berikut (Hasan, 2001),

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu interval waktu atau suatu daerah tertentu, tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada interval waktu atau daerah lain yang terpisah.
2. Probabilitas terjadinya hasil percobaan selama suatu interval waktu yang singkat atau dalam suatu daerah yang kecil, sebagai dengan panjang interval

waktu atau besarnya daerah tersebut atau tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi diluar interval waktu atau daerah tersebut.

3. Probabilitas lebih dari satu hasil percobaan yang terjadi dalam interval waktu yang singkat atau dalam daerah yang kecil dapat diabaikan.

Bain dan Engelhardt (1992) dalam bukunya yang berjudul *Introduction of Probability and Mathematical Statistics* menyatakan bahwa peubah acak diskrit *X* dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika fungsi densitas peluang yang terbentuk,

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \text{dengan x} = 0,1,2,\ldots \tag{3.4}$$

dengan μ menyatakan rata-rata banyaknya sukses yang terjadi per satuan waktu atau daerah tertentu.

Walpole dan Myers (1995) menyatakan bahwa rataan dan variansi distribusi *poisson* $f(x,\mu)$ keduanya sama dengan μ.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \mu\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-u}\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

sekarang misalkan $y = x - 1$ sehingga diperoleh,

$$E(X) = \mu\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} = \mu$$

Karena,

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} p(y;\mu) = 1$$

Variansi distribusi *Poisson* dapat dengan mula-mula mencari

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \mu^{2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{x-2}}{(x-2)!}$$

Kemudian masukkan $= x - 2$, maka diperoleh ,

$$E[X(X-1)] = \mu^{2}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} = \mu^{2}$$

Jadi,

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = E[X(X-1)] + E(X) - \left(E(X)\right)^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

Adapun nilai *Momen Generating Function* (MGF) diperoleh dari

$$M_{x(t)=}E(e^{tx})\begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x)\,, \text{bila } x \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f\ (x)\,, \text{bila } x \text{ kontinue} \end{cases} \qquad (3.5)$$

Sehingga dari definisi tersebut diperoleh MGF dari distribusi Poisson,

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x$$

$$\sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{E^{-\mu}\mu^X}{x!} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{n} \frac{(\mu e^t)}{x!} = e^{-\mu} e^{\mu e^t} \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-\mu e^t (\mu e^t)^x}}{x!}$$

Sehingga,

$$M_{x(t)} = e^{-\mu} e^{\mu e^t} = e^{\mu(e^t - 1)}$$

Nilai MGF tersebut dapat dibukitkan dengan membukitkan nilai turunan pertama dan nilai turunan keduanya untuk mendapatkan nilai rataan atau $E(X)$ dan variansinya atau σ^2 yang telah didapatkan sebelumnya.

$$E(X) = M_x'(t=0) = \frac{d}{dt} e\mu^{(e^{t-1})}{}_{|t=0} = \mu e^t e^{\mu(e^{t-1})}{}_{|t=0} \qquad (3.6)$$

Kemudian nilai harapa X^2 didapstkan dari turunan keduanya

$$E(X^2) = M_x^{"}(t=0) = \frac{d^2}{dt} e^{\mu(e^t-1)}{}_{|t=0} = \frac{d}{dt} \mu e^t e^{\mu(e^t-1)}{}_{|t=0} =$$
$$\frac{d}{dt} \mu e^t e^{\mu(e^t-1)}{}_{|t=0}$$

$$= \mu e^t e^{\mu(e^t-1)} + (\mu e^t)^2 e^{\mu(e^t-1)}{}_{|t=0} = \mu + \mu^2$$

Sehingga didapatkan nilai variansinya

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu \qquad (3.7)$$

3.10 Distribusi Eksponensial

Menurut Bain dan Engelhardt (1992), dalam bukunya yang berjudul *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* menyatakan bahwa peubah acak kontinue X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan $\theta > 0$ jika memiliki *Probability Density Function* (PDF) berikut:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0 \\ 0 \text{ untuk x lainnya} \end{cases} \quad (3.8)$$

Untuk mencari rataan distribusi eksponensial maka didapatkan,

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

misalkan $y = \frac{x}{\theta}$ maka $dy = \frac{1}{\theta} dx$ atau $dx = \theta\ dy$,

$$E(X) = \int_0^\infty y e^{-y} \theta\ dy = \theta \int_0^\infty y\, e^{-y}\, dy$$

dengan menggunakan integral parsial dimislkan $\mu = y$ dan $dv = e^{-y} dy$ didapatkan,

$$E(X) = \theta\left[-ye^{-y}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} dy\right] = \theta\left[0 + \left(-e^{-y}|_0^\infty\right)\right] = \theta \quad (3.9)$$

Selanjutnya untuk mendaPTkan nilai variansi maka diperlukan nilai-nilai harapan X^2berikut

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

misalkan $y = \frac{x}{\theta}$ maka $dy = \frac{1}{\theta}\ dx$ atau $dx = \theta\ dy$,

$$E(X^2) = \theta \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, \theta\ dy = \theta^2 \int_0^\infty y^2 e^{-y}\ dy$$

dengan menggunakan integral parsial sebanyak dua kali, dimislkan $u = y^2$ dan $v = e^{-y}$ didapatkan,

$$E(X^2) = \theta^2 \left[y^2 e^{-y} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} + \int_0^\infty 2y\, e^{-y}\, dy \right] = \theta^2 \left[0 + \int_0^\infty 2y\, e^{-y}\, dy \right]$$

$$= \theta^2 \left[\int_0^\infty 2y\, e^{-y}\, dy \right]$$

kemudian dengan integral parsial dimisalkan $u = 2y$ dan $dv = e^{-y}\, dy$ didapatkan,

$$E(X^2) = \theta^2 \left[2ye^{-y} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} + \int_0^\infty 2e^{-y} dy \right] = 2\theta^2 \left[ye^{-y} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} + \int_0^\infty e^{-y}\, dy \right]$$

$$= 2\theta^2 \left[0 + \left(e^{-y} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} \right) \right] = 2\theta^2$$

sehingga didapatkan variansinya,

$$\sigma^2 = \left(E(X)\right)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 \qquad (3.10)$$

Dari definisi yang telah diberikan sebelumnya MGF dari distribusi eksponensial adalah sebagai berikut,

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{x}{\theta}}\, dx = \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(t - \frac{1}{\theta}\right)x} dx$$

$$= \frac{1}{\theta\left(t - \frac{1}{\theta}\right)} \left[e^{\left(t-\frac{1}{\theta}\right)x} \Big|_0^\infty \right]$$

MGF ini hanya konvergen $t > \frac{1}{\theta}$ sehingga didatapkan,

$$Mx(t) = \frac{1}{1 - \theta t} \qquad (3.11)$$

Nilai MGF tersebut dapat dibukitkan dengan membukitkan nilai turunan pertama dan nilai turunan keduanya untuk mendapatkan nilai rataan atau $E(X)$ dan variansinya atau σ^2 yang telah didaPTkan sebelumnya,

$$E(X) = M_x'(t=0) = \frac{d}{dt}\frac{1}{1-\theta t}|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1-\theta t)^{-1}|_{t=0} \quad (3.12)$$

$$= \theta(1-\theta t)^{-2}|_{t=0} = \theta$$

kemudian nilai harapan X^2 didapatkan dari turunan keduanya,

$$E(X^2) = M_x''(t=0) = \frac{d^2}{dt^2}(1-\theta t)^{-1}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\theta(1-\theta t)^{-2}|_{t=0}$$

$$= (2\theta^2(1-\theta t)^{-3})|_{t=0} = 2\theta^2$$

Sehingga didapatkan nilai variansinya,

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 \quad (3.13)$$

3.11 Asumsi Teori Antrian

Menurut Mulyono (2007:276), teori antrian dikembangkan dengan membuat sejumlah asumsi tentang komponen proses antrian. Terdapat banyak variasi situasi antri diantaranya yaitu:

1.11.1 Distribusi Kedatangan

Model antrian adalah model probabilistik karena unsur-unsur tertentu proses antrian yang dimasukkan dalam model adalah variabel *random*. Variabel random ini sering di gambarkan dengan distribusi probabilitas.

Baik kedatangan maupun waktu pelayanan dalam suatu proses pada umumnya dinyatakan sebagai variabel *random*. Asumsi yang bisa digunakan dalam kaitannya dengan distribusi kedatangan (banyaknya kedatangan per unit waktu) adalah distribusi Poisson. Rumus umum distribusi probabilitas Poisson adalah:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad (3.14)$$

dimana,

x : banyaknya kedatangan

$P(x)$: probabilitas kedatangan

λ : rata-rata tingkat kedatangan

e : dasar logaritma natural, yaitu 2,71828

$x!$: x(x-1)(x-2) ... 1 (dibaca x faktorial)

Distribusi Poisson adalah distribusi diksrit dengan rata-rata sama dengan variansi. Suatu ciri menarik dari proses Poisson adalah bahwa jika banyaknya kedatangan per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata tingkat kedatangan λ , maka waktu antar kedatangan akan mengikuti distribusi Eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$ (Taha, 1997:179).

1.11.2 Distribusi Waktu Pelayanan

Waktu pelayanan dalam proses antrian dapat juga sesuai atau pas dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Asumsi yang bisa digunakan bagi distribusi waktu pelayanan adalah distribusi Eksponensial (Taha, 1997:180). Sehingga jika waktu pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial, maka tingkat pelayanan mengikuti distribusi Poisson. Rumus umum fungsi densitas probabilitas Ekponensial adalah:

$$f(t) = \mu e^{\mu t} \tag{3.15}$$

dimana,

t : waktu pelayanan

$f(t)$: probabilitas yang berhubungan dengan *t*

μ : rata-rata tingkat pelayanan

$\frac{1}{\mu}$: rata-rata waktu pelayanan

e : dasar logaritma natural, yaitu 2,71828

Penelitian empiris menunjukkan bahwa asumsi distribusi Eksponensial maupun Poisson sering kali tidak absah. Karena itu asumsi ini harus diperiksa sebelum mencoba menggunakan suatu model. Pemeriksaan dilakukkan *Asymptotic Signigicance* (2-*tailed*) dengan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov*.

1.11.3 Faktor Utilisasi

Perhitungan dalam teori antrian berdasarkan syarat bahwa sistem berada dalam kondisi tetap (*steady state*). Dalam penerapan teori antrian harus diperhatikan apakah rata-rata pelayanan lebih besar dari rata-rata kedatangan. Ukuran kondisi tetap adalah (Pangestu dkk, 2000)

$$\rho = \frac{\lambda}{c\,\mu}, maka\ \frac{\lambda}{c\,\mu} < 1 \tag{3.16}$$

dengan

λ : rata-rata kedatangan

μ : rata-rata pelayanan/keberangkatan

c : banyak fasilitas pelayanan dalam sistem

Keadaan sistem atau jumlah unit dalam sistem akan sangat dipengaruhi oleh *state* (keadaan) awal dan waktu yang telah dilalui jika suatu sistem telah mulai berjalan. Dalam keadaan ini sistem dikatakan dalam kondisi *transient*. Bila keadaan ini berlangsung terus-menerus maka keadaan akan *independen* terhadap *state* awal dan juga terhadap waktu yang dilaluinya. Keadaan seperti ini dikatakan sistem dalam kondisi *steady-state*. Teori antrian cenderung memusatkan pada kondisi *steady-state*, sebab kondisi *transient* lebih sukar dianalisis (Dimyanti, 1994:356).

3.12 Teori Antrian

Antrian merupakan suatu fenomena yang timbul dalam aktivitas manusia, dan antrian yang muncul disebabkan oleh aktivitas pelayanan yang tidak diimbangi oleh kebutuhan akan pelayanan sehingga pengguna layanan tersebut tidak terlayani dengan segera, dan sistem antrian tercipta jika pelanggan datang ke tempat pelayanan, pelanggan menunggu untuk dilayani jika pelayanan tidak segera dilakukan dan pelanggan meninggalkan sistem pelayanan jika sudah terlayani (Gross dan Carl, 1998).

Teori antrian digunakan pertama kali sebagai bentuk pembukitan untuk memprediksi suatu tingkah laku pada sistem antrian. Teori ini pertama kali diperkenalkan oleh *A.K Erlang* dalam penemuannya yang berjudul *"Solution of some problems in theory probabilities of significance in Automatic Telephone Exchange"*. Pada kala itu banyak sekali operator yang sibuk sehingga kewalahan untuk melayani para penelpon, sehingga harus antri menunggu giliran.

Menurut Hiller and Lieberman (2005) sistem antrian terklasifikasi menjadi beberapa sistem dimana teori antrian disimulasikan dan diterapka secara luas. Klasifikasi sistem antrian menurut mereka adalah sebagai berikut:

a) Sistem pelayanan komersial, dimana aplikasi teori antrian dari model antrian yang digunakan untuk kepentingan komersial seperti antrian pada toko, supermarket, kafetaria dan sebagainya.
b) Sistem pelayanan bisnis industri, aplikasi teori antrian dari model antrian yang digunakan dalam cakupan lini produksi seperti sistem material handling, pergudangan dan sebagainya.
c) Sistem pelayanan transportasi, aplikasi teori antrian dari model antrian yang digunakan dalam proses transportasi seperti antrian kereta, antrian pendaratan pesawat, dan sebagainya.

3.13 Tujuan Teori Antrian

Tujuan dasar dari terori antrian adalah untuk meminimumkan total 2 (dua) biaya, yaitu biaya langsung penyediaan fasilitas dan biaya tak langsung yang timbul karena pelanggan yang harus menunggu untuk dilayani (Pangestu dkk, 1989). Bila sistem mempunyai fasilitas pelayanan lebih dari optimal, ini berarti membutuhkan inventasi modall yang berlebihan, tetapi apabila jumlah kurang dari optimal maka hasilnya adalah tertundanya pelayanan (P. Siagian, 1987). Teori antri sangat berfungsi sebagai alat pembantu untuk meminimalisirkan jumlah antrian pada suatu kasus.

3.14 Sistem Antrian

Gross dan Haris (Gross, 1998), mengatakan sistem antrian adalah suatu kejadian ketika seorang pelanggan datang untuk mendapatkan pelayanan, menunggu untuk dilayani saat pelayanan (*server*) masih sibuk, mendapatkan pelayanan dan kemudian meninggalkan sistem setelah dilayani. Sistem antrian diklasifikasikan menjadi berbagai macam sistem yang berbeda – beda dimana teori antrian dan simulasi diterapkan secara luas. Adapun contoh klasifikasi menutur Hiller dan Lieberman adalah sebagai berikut:

1. Sistem palayanan komesial

   Sistem pelayanan komersial merupakan aplikasi yang sangat luas dari model-model antrian, seperti rumah makan, toko – toko, butik, salon, supermarket, kafetaria dan sebagainya.
2. Sistem pelayanan bisnis-industri

   Sistem pelayanan bisnis-industri terkait dengan sistem produksi, sistem pergudangan, handling, sistem material, dan sebagainya.
3. Sistem pelayanan transportasi

   Sistem pelayanan transportasi menghubungkan orang dengan tata guna lahan pengikat kegiatan dan memberikan kegunaan tempat dan waktu untuk komoditi yang diperlukan.
4. Sistem pelayanan sosial

   Sistem pelayanan sosial merupakan suatu sistem pelayanan yang dikelola oleh berbagai macam instansi antara lain kantor-kantor dan persusahaan-perusahaan lokal maupun nasional, seperti kantro registrasi SIM dan STNK, kantor pos, puskesmas, rumah sakit dan sebagainya (Subagyo, 2000).

Dalam sistem antrian terdapat berbagai komponen dasar proses antrian diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Kedatangan

Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan, misalnya orang, transportasi, panggilan telepon untuk dilayani dan sebagainya. Unsur ini dinamakn proses input. Proses input meliputi sumber kedatangan atau biasa disebut *calling population* dan terjadinya kedatangan secara umum merupakan variable acak. Karakteristik dari populasi yang akan dilayani dapat dilihatdari sebuah ukuruan, pola kedatangan, serta perlilaku dari populasi yang akan dilayani. Menurut ukurannya, populasi yang dilayani bias terbatas (*finite*) dan tidak terbatas (*infinite*). Pola kedatangan bisa teratur, dan bisa juga bersifat acak atau *random*. Menurut Levin dkk (2002), varibel acak adalah suatu variable yang nilainya tidak menentu sebagain hasil dari percobaan acak. Variabel acak berupa diskrit dan kontinu. Dikatakan variabel acak diskrit jika hanya memiliki beberapa nilai saja. Sebaliknya dikatakan kontinue jika nilai bervariasi pada rentang tertentu.

2. Pelayanan

Pelayanan atau mekanisme terdiri dari satu atau lebih, tergantung fasilitas yang disediakan. Tiap-tiap fasilitas terkadang disebut sebagai saluran (*channel*) (Schroeder,1997). Contohnya, sebuah jalan tol yang memiliki beberapa pintu tol dan penjualan tiket bisokop, mekanisme pelayanan terdiri dari satu layanan dalam satu fasilitas. Dalam mekanisme pelayanan ini perlu adanya aspek yang harus diperhatikan yaitu:

A. Tersedia pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat. Misalnya dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan karcis yang dibuka pada saat tertentu antra satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya, sehingga saat loket ditutup mekanisme pelayanan akan berhenti dan petugas beristirahat.

B. Kapasitas pelayanan

Kapasitas pelayanan diukur berdasarkan jumlah pelanggan yang tidak dapat dilayani secara bersamaan. Kapasitas pelayanan yang tidak selalu sama untuk setiap saat, ada yang tetap, dan ada juga yang berubah - ubah. Oleh karena itu, fasilitas pelayanan dapat memilki satu atau lebih saluran. Fasilitas yang mempunyai satu saluran disebut dengan saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran disebut dengan saluran ganda atau pelayanan ganda.

C. Lama pelayanan

Lama pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan pada saat melayani satu pelanggan atau satu satuan. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua pelanggan atau boleh juga berupa varibel acak. Umumnya digunakan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan dianggap sebagai variabel acak yang terpencar secara bebas dan tidak bergantung pada waktu tiba.

3. Antrian

Suatu antrian timbul tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Jika tidak terjadi antrian berarti terdapat pelayan yang tidak bekerja atau kelebihan fasilitas pelayanan (Mulyono, 1991).

Menurut Yamit (1993) tedapat beberapa sistem antrian, meliputi identifikasi dari *item* dalam antrian dan fasilitas pelayanan yang diperlukan. Dapat dilihat dari tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Contoh Sistem Antrian

Sistem	**Garis Tunggu Atau Antrian**	**Fasilitas Pelayanan**
Lapangan Terbang	Pesawat Menunggu Di Landasan	Landasan Pacu
Pecucian Mobil	Mobil Menunggu Sampai Mobil Sebelumnya Selesai di cuci	Tempat Cuci Mobil
Registrasi Mahasiswa	Mahasiswa Mengantri Mengambil Nomor Antrian	Pusat Registrasi
Perpustakaan	Anggota Perpustakaan Menunggu melakukan Finger Print	Pegawai Perpustakaan
Bank	Nasabah (orang) Menunggu Di Loket Pembayaran	Kasir

3.15 Disiplin Antrian

Menurut Sinalungga (2008:251), disiplin antrian adalah aturan yang digunakan dalam memilih pelanggan yang ada didalam barisan untuk segera dilayani. Menurut Sinalungga (2008:252) terdapat 4 bentuk disiplin antrian, berdasarkan urutan kedatangan adalah sebagai berikut:

a. *First Come First Served* (*FCFS*) atau *First In First Out* (*FIFO*) dimana pelanggan yang lebih dahulu datang maka akan lebih dahulu dilayani. Disiplin antrian ini mengutamakan pelayanan terhadap seseorang yang lebih dahulu datang. Contohnya : Antrian loket pembelian tiket bioskop
b. *Last Come First Served* (*LCFS*) dimana pelanggan yang paling terakhir datang maka akan lebih dahulu dilayani. Disipin antrian ini mengutamakan pelanggan yang terakhir. Contohnya : Sistem antrian elevator untuk lantai yang sama
c. *Priority Service* (*PS*), dimana prioritas pelayanan diberikan kepada palanggan yang mempunyai prioritas yang lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas yang lebih rendah, meskipun pelanggan yang datang lebih awal akan dilayani menjadi palanggan yang terakhir. Hal ini disebebkan oleh beberapa hal, misalna sesorang yang miliki penyakit yang lebih berat dibandingakan dengan orang lain pada suatu tempat pelayanan praktek dokter, hubungan kekerabatan dan pelanggan potensial akan dilayani terlebih dahulu.
d. *Service In Random Order* (*SIRO*) merupakan sistem pelayanan dimana pelanggan mungkin akan dilayani secara acak (random), tidak peduli siapa yang lebih dahlu tiba untuk dilayani. Contohnya: Saat test wawancara pekerjaan.

3.16 Pengujian Distribusi Data

Prosedur pengujian distribusi data digunakan untuk mengetahui bentuk fungsi dari populasi (Harisanti, 2009). Salah satu pengujian distribusi data yaitu menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov*. Uji hipotesisnya seperti berikut:

H_0 : data mengikuti distribusi tertentu.

H_1 : data tidak mengikuti distribusi tertentu.

Beberapa referensi menyebutkan bahwa jenis variabel yang dapat diuji adalah variabel kontinu. Pengujian distribusi data nilai yang dihitung ada *P-value* sebagai nilai kritis untuk menolak hipotesis nol (H_0) yang bernilai benar. *P-value* dihitung berdsarkan nilai peluang, yang berlandaskan dengan uji statistik yang digunakan sebagai indikator dalam pengambilan keputusan. Jika *P-value* < α, maka H_0 ditolak dengan resiko kesalahan sebesar *P-value*. Semakin kecil nilai *P-value*, maka semakin kecil peluan untuk membuat kesalahan dengan menolak H_0. Adapun nilai α sebesar 0; 0,1; 0,05; dan 0,1 tergantung dari tingkat kekritisan yang diinginkan dari penelitian.

Dengan kata lain tergantung pada seberapa besar resiko salah yang masih ditolerir, sangat tergantung dari tingkat kekritisan penelitian dan kepentingan penggunaan hasil penelitian tersebut. Jika *P-value* bernilai kecil, maka hal itu menunjukkan konsistensi atau derajat yang relatif kecil antara data dan hipotesis nol (H_0) dan akan relatif besar dari hipotesis (H_1) yang berarti data mendukung hipotesis alternatif. Oleh karena itu, semakin kecil nilai *P-value* dibandingkan nilai α, maka besar peluang resiko salah untuk menolak H_0 secara nilai juga akan semakin kecil. Namun sesungguhnya tergantung pada seberapa besar nilai *P-value* yang masa dapat ditolerir sangat tergantung dari tingkat kekritisan penelitian dan penggunaan hasil penelitian (Harisanti, 2009).

Penjelasan mengenai cara pengujian data akan dijelaskan secara umum adalah seperti berikut:

1. Uji *Kolmogorov-Smirnov*

Uji *Kolmogorov-Smirnov* digunakan untuk menaksir kesesuainan (*Fit Curve*) dari suatu persebaran data, serta dapat memberikan informasi tentang adanya ketidaksesuaian model (*Lack of fit*) jika *P-value* < 0,05. Selain itu, uji *Kolmogorov-Smirnov* berfungsi untuk memberikan pendekatan nilai maksimumnya adalah 1,00 dan nilai minimumnya adalah 0,00. Karna itu nilai *P-value* hanya untuk pendekatan, maka uji ini tidak mampu menunjukan spesifikasi *P-value* yang sebenarnya dari sebaran empiris yang diamati tersebut. Jika data berasal dari distribusi normal, maka titik-titik distribusi datanya akan membentuk seperti garis lurus dengan nilai koefisien yang sangat besar. Adapun bila datanya berasal dari distribusi lain, maka plot antara data dan nilai peluang akan menunjukan sebuah bentuk kurva, dengan nilai koefesien kolerasi yang tidak terlalu besar. Sehingga H_0 akan ditolak pada taraf α tertentu, bila koefisien > *critical value* disamping pengambilan keputusan memalului pendekatan *P-value*.

Asumsi untuk uji ini adalah data terdiri atas hasil pengamatan bebas yang merupakan sebuah sampel acak berukuran *n* dari suatu distribusi yang belum diketahui.

Adapun prosedur pengujiannya adalah sebagai berikut (Daniel, 1989),

1. Menentukan Hipotesis :

   H_0 = Data yang diamati berdistribusi Poisson

   H_1 = Data yang diamati tidak berdistribusi Poisson

2. Menentukan Taraf Signifikansi :

   Taraf siginifikansi yang digunakan adalah $\alpha = 5\%$

3. Statistik Uji

   $D = \text{Sup} \mid S(x) - F_0(x) \mid$

   dengan :

   S(x) = distribusi kumulatif sampel dari populasi

   $F_0(x)$=distribusi kumulatif data teoritis dari distribusi yang di hipotesiskan

4. Kriteria Uji yang digunakan :

   H_0 ditolak jika *p-value* < nilai α.

3.17 Notasi Kendal

Merupakan notasi yang berfungsi untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama yang dikemukakan oleh D.G Kendall dalam bentuk *a/b/c*, dan dikenal sebagai kendall. Namun, A.M. Lee menambahkan symbol *d* dan *e* sehingga menjadi *a/b/c/d/e* yang disebut dengan notasi Kendall-Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall-Lee perlu adanya penambahan, yaitu dengan simbol *f*. Sehingga didapatkan suatu karakteristik suatu antrian yang dinotasikan dalam format baku (*a/b/c*):(*d/e/f*). Notasi ini meliputi distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah *server* pelayanan, disiplin pelayanan, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi *a* sampai *f* dapat digantikan dengan simbol-simbol seperti dalam tabel 3.3 berikut.

Tabel 3.2 Simbol-Simbol Pengganti Notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan *b*	M	Markov menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (Waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial)
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan
	E_k	Waktu antar kedatangan atau Waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)
	G	Distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)
c	1, 2, 3, … ∞	Jumlah server
d	*FCFS/FIFO*	*First Come First Served/First In First Out*
	LCFS/LIFO	*Last Come First Served/Last In First Out*
	SIRO	*Service In Random Order*
	PS	*Priority Service*
e. f	1, 2, 3, … ∞	Ukuran Populasi dan total kapasitas (di asumsikan tak berbatas jika tidak di definisikan)

3.18 Model Antrian Dasar

Dalam sistem antrian terdapat beberapa struktru antrian yang mempunyai bentuk serta fungsi yang berbeda. Dikelompokan dalam beberapa saluran (*single* *multiple*) dan fase (*single* atau *multiple*), istilah saluran yaitu menunjukan jumlah tempat yang memberikan pelayanan atau dapat diartkan sebagai jumlah fasilitas pelayanan. Sedangkan *phase* yaitu menunjukan jumlah tahapan pelayanan dimana pelanggan harus melalui tahapan demi tahapan hingga dinyatakan lengkap. Sistem antrian dapat digolongkan sebagai berikut, (Subagyo, dkk, 2000) :

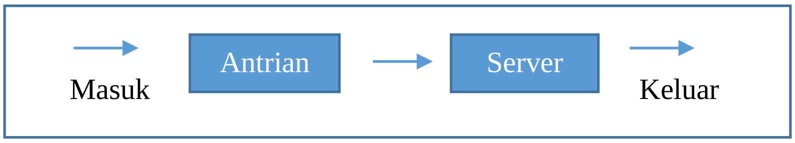
Tabel 3.3 Simbol dan Rumus Antrian

λ	Rata-rata tingkat kedatangan
μ	Rata-rata tingkat keberangkatan
n	Jumlah Individu dalam sistem
L_s	Jumlah unit rata-rata yang diharapkan dalam sistem/banyak pelanggan dalam antrian (unit)
L_q	Jumlah unit rata-rata yang diharapkan dalam antrian/banyak pelanggan dalam antrian (unit)
W_s	Lama waktu yang dihabiskan satu pelanggan dalam sistem
Wq	Lama waktu yang dihabiskan satu pelanggan dalam antrian
P_0	Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem
P_w	Probabilitas menunggu dalam antrian
ρ	Tingkat insentitas fasilitas keberangkatan
S	Jumlah fasilitas pelayanan (Server)

1. *Single Channel – Single Phase*

Single Channel berarti hanya ada satu jalur yang memasuki sistem pelayaan atau ada suatu fasilitas pelayanan. *Single Phase* berarti hanya ada satu fasilitas pelayanan. Contohnya adalah sebuah kantor pos yang hanya mempunyai satu loket pelayanan dengan jalur satru antrian, supermarket yang hanya memiliki satu kasir sebagai

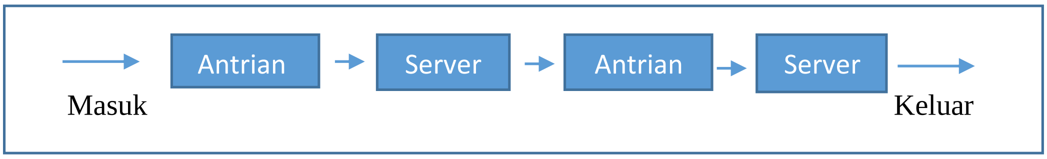
tempat pembayaran, dan lain-lain. Adapun model dan rumus yang digunakan seperti berikut (Pangestu, dkk, 1989)



Gambar 3.2 Ilustrasi Sistem Antrian *Single Channel - Single Phase*

2. *Single Channel – Multi Phase*

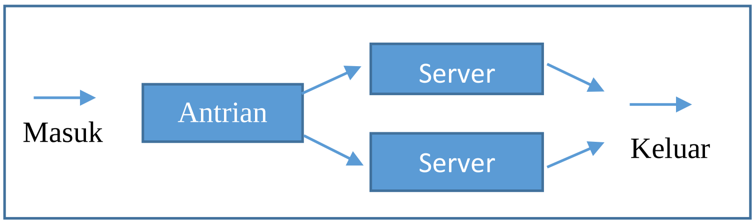
Sistem antrian jalur tunggal dangan tahapan berganda ini atau menunjukan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara fasilitas pelayanan berurutan. Sebagai contoh adalah: pencucian mobil, tukang cat mobil, dan sebagainya. Adapun model dan rumus yang digunakan seperti berikut (Pangestu dkk, 1989):



Gambar 3.3 Ilustrasi Sistem Antrian *Single Channel - Multi Phase*

3. *Multi Channel– Single Phase* dengan laju *Homogen*

Sistem *Multi Channel – Single Phase* terjadi di mana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal. Contohnya adalah antrian pada sebuah bank dengan beberapa teller, pembelian tiket atau karcis yang dilayani oleh beberapa loket, pembayaran dengan beberapa kasir, dan lain-lain. Adapun model dan rumus yang digunakan seperti berikut (Pangestu dkk, 1989):



Gambar 3.4 Ilustrasi Sistem Antrian *Multi Channel - Single Phase*

4. *Multi Channel Single Phase* dengan laju *Heterogen*

Sistem *Multi Channel Single Phase* dengan laju *heterogen* terjadi dimana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal, namun memiliki kondisi yang bebas untuk masuk kedalam sistem yang artinya mengisi dermaga yang kosong tanpa adanya penentuan untuk masuk ke dalam sistem yang sudah ditentukan. Contohnya adalah antrian di Bandara Adisucipto Yogyakarta untuk Apron besar. Adapun rumus yang digunakan untuk laju pelayanan *Multi Channel Single Phase Heterogen* berbeda dengan laju layanan *Multi Channel Single Phase*. Menggunakan penurunan rumus seperti berikut (Adhie, 2017);

Tabel 3.4 Nilai λ dan μ

λ	Rata-rata kedatangan kapal/hari
μ_{s1}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari
μ_{s2}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari
μ_{s3}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari
μ_{s4}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari
μ_{s5}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari
μ_{s6}	Rata-rata keberangkatan kapal/hari

Keterangan;

λ : Nilai rata-rata kedatangan kapal

μ_{s1} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 01

μ_{s2} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 02

μ_{s3} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 03

μ_{s4} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 04

μ_{s5} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 05

μ_{s6} : Nilai rata-rata keberangkatan kapal server 06

Kemudian dilakukan penurunan rumus,

Misal :

μ_{s1} : μ_1

μ_{s2} : μ_2

μ_{s3} : μ_3

μ_{s4} : μ_4

μ_{s5} : μ_5

μ_{s6} : μ_6

Dengan menggunakan persamaan kesetimbangan (*Global Balance Equation*);

$\lambda P_0 = (\mu_1)P_1$

$\lambda P_1 = (\mu_1 + \mu_2)P_2$

$\lambda P_2 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P_3$

$\lambda P_3 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)P_4$

$\lambda P_4 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)P_5$

$\lambda P_5 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6)P_6$

$\lambda P_6 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6)P_7$

Kemudian mensubsitusikan nilai P_0 ke dalam $P_k$untuk κ = 1, 2, 3, …,s seperti berikut;

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_5 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

$$P_6 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5+\mu_6} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0$$

Dan secara umum diperoleh,

$\mathrm{P_k} = \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\mathrm{P_0}$

Misal;

$\mathrm{k} = 1 \rightarrow \mathrm{P_1} = \frac{\lambda^1}{\prod_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\mathrm{P_0} = \frac{\lambda}{u_1}\mathrm{P_0}$

$\mathrm{k} = 2 \rightarrow \mathrm{P_2} = \frac{\lambda^2}{\prod_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\mathrm{P_0} = \frac{\lambda}{u_1\sum_{j=1}^{2}\mu_j}\mathrm{P_0}$

$\mathrm{k} = 3 \rightarrow \mathrm{P_3} = \frac{\lambda^3}{\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\mathrm{P_0} = \frac{\lambda}{u_1\sum_{j=1}^{2}\mu_j\sum_{j=1}^{3}\mu_j}\mathrm{P_0}$

Untuk k $= 7, 8, \ldots$ (k $>$ s)

$\mathrm{P_7} = \frac{\lambda^6}{\mu_1\sum_{j=1}^{2}\mu_j \cdots \sum_{j=1}^{6}\mu_j}\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{6}\mu_j}\mathrm{P_0}$

$\mathrm{P_8} = \frac{\lambda^6}{\mu_1\sum_{j=1}^{2}\mu_j \cdots \sum_{j=1}^{6}\mu_j}\left(\frac{\lambda}{(\sum_{j=1}^{6}\mu_j)}\right)^2\mathrm{P_0}$

Sehingga di dapatkan persamaan,

$$\mathrm{P}_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}u_j}\mathrm{P_0}, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{s} \\ \dfrac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\left(\dfrac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)^{k-s}\mathrm{P_0}, \mathrm{k} > \mathrm{s} \end{cases}$$

Karena pelanggan yang memungkinkan datang lebih dari sistem melibihi dari server tersebut maka dapat mensubsitusikan k > s ke dalam L_q,

$$\mathrm{L}_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\mathrm{P}_n$$

n-s yaitu banyak pelanggan yang berada dalam sistem dikurangi dengan yang berada di dalam server (s), maka;

Misal n = a, maka a = k-s sehingga k = a+s;

$$\mathrm{L}_q = \sum_{n=s}^{\infty}(a-s)P_a$$

$$= \sum_{a=0}^{\infty} \mathrm{a}\,\mathrm{P}_{a+s}$$

$$= \sum_{a=0}^{\infty} a \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s}\sum_{i=1}^{j}\mu_j}\left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)^a \mathrm{P}_0$$

$$= \mathrm{P}_0 \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s}\sum_{i=1}^{j}\mu_j}\sum_{a=0}^{\infty} a\left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)^a \mathrm{P}_0$$

$$= \mathrm{P}_0 \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s}\sum_{i=1}^{j}\mu_j}\frac{\left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)}{1-\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}}$$

Kemudian mencari formula dari P_0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k = 0$$

$$\mathrm{P}_0 + \frac{\lambda}{\mu_1}\mathrm{P}_0 + \cdots + \frac{\lambda^6}{\prod_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\mathrm{P}_0 + \frac{\lambda^6}{\prod_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{6}\mu_j} + \cdots + \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\left(\frac{\kappa}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)^{k-s} = 1$$

Sehingga,

$$\mathrm{P}_0\left[1 + \sum_{k=1}^{s-1}\frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{i}\mu_j} + \sum_{k=s}^{\infty}\left(\frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\mu_j}\right)\left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s}\mu_j}\right)^{k-s}\right] = 1$$

Rumus umum dari P_0

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}$$

$$\mathrm{R}_1 = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mu_j}$$

$$\mathrm{R}_2 = \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \right) \left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{s} \mu_j} \right)^{k-s}$$

$$= \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} + \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j} + \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j} \right)^2 + \cdots +$$

$$= \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \left[1 + \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j} + \left(\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j} \right)^2 + \cdots \right]$$

$$= \frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j}}$$

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \right] + \left[\frac{\lambda^s}{\prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i} \mu_j} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{i} \mu_j}} \right]}$$

Berdasarkan formula tersebut maka di dapatkan,

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{s} \mu_1} \quad (3.17)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (3.18)$$

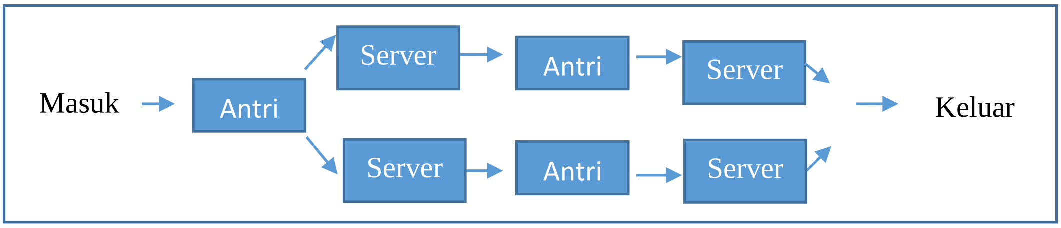
$$W_s = W_q + \mathrm{E}(s)$$

$$= W_q + \frac{s}{\sum_{i=1}^{s} \mu_i} \quad (3.19)$$

$$L_s = \lambda\, W_s \quad (3.20)$$

5. *Multi Channel Multi Phase*

Sistem *Multi Channel – Multi Phase* ini menunjukkan bahwa setiap sistem mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahan sehingga terdapat lebih dari suatu pelanggan yang dapat dilayani pada waktu bersamaan. Contoh pada model ini adalah: pada pelayanan yang diberikan kepada pasien di rumah sakit dimulai dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis, sampai pembayaran, registrasi ulang mahasiswa baru pada sebuah universitas, dan lain-lain. Adapun model yang digunakan seperti berikut:



Gambar 3.5 Ilustrasi Sistem Antrian *Multi Channel* - *Multi Phase*