BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks *(matrix)* adalah jajaran empat persegi panjang dan bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut **entri** dari matriks. Berikut ini beberapa contoh matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad 3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Sebagai contoh, matriks pertama pada Contoh di atas memiliki riga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3×2). Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Matriks-matriks lain pada Contoh di atas memiliku ukuran berturut-turut $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1,$ dan 1×1. Suatu matriks yang hanyi terdiri dari satu kolom disebut **matriks kolom** (atau **vektor kolom**) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Jadi pada cotoh diatas matriks 2×1 merupakan matriks kolom, matriks 1×4 merupakan matriks baris, dan matriks 1×1 merupakan matriks baris dan matriks kolom. (istilah vektor memiliki arti yang lain yang akan dibacarakan pada bab-bab selanjutnya.)

Sebaiknya menggunakan huruf kapital untuk menyatakan matriks dan huruf kecil untuk menyatakan kuantitas numerik; jadi dapat ditulis

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ atau $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

di dalam pembahasan matriks, kuantitas numerik sebagai **skalar** (*scalar*). Kecuali dinyatakan sebaliknya, semua skalar adalah bilangan real.

Entri yang terletak pada baris *i* dan kolom *j* di dalam matriks *A* akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi, matriks umum $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

dan matriks umum $m \times n$ sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks *A* dengan jumlah baris *n* dan jumlah kolom *n* disebut **matriks bujursangkar ordo n** (*square matrix of order n*) dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ pada matriks di bawah yang diberi arsiran merupakan **diagonal utama** (*main diagonal*) dari matriks *A*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Operasi Pada Matriks

Dua matriks adalah **setara** (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika$(A)_{ij} = (B)_{ij}$, atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua *i* dan *j*.

Contoh 1, Kesetaraan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = 5$, maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai x yang lain matriks *A* dan *B* tidak setara, karena tidak semua entri keduanya yang bersesuaian adalah sama. Tidak ada nilai x dimana $A = C$, karena *A* dan *C* memiliki ukuran yang berbeda.

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

dan

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh 2, Penjumlahan dan Pengurangan

Diketahui matriks-matriks sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Jika *A* adalah matriks sembarang dan *c* adalah skalar sembarang, maka hasilkalinya (*product*) *cA* adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks *A* dengan bilangan *c*. Matriks *cA* disebut **kelipatan skalar** (*scalar multiple*) dari *A*. Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Contoh 3, Kelipatan Skalar

Untuk matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

maka

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad (\frac{1}{3})C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh 4, Perkalian Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena *A* adalah matriks 2×3 dan *B* adalah matriks 3×4, maka hasilkali *AB* adalah matriks 2×4. Untuk menentukan, misal entri pada baris 2 dan kolom 3 dari *AB*, baris 2 dari *A* dan kolom 3 dari *B* dipisahkan. Kemudian sebagaimana dijelaskan berikut ini, entri-entri yang bersesuaian dikalikan dan kemudian dijumlahkan hasilkalinya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 26 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

Entri pada baris 1 dan kolom 4 dari *AB* dihitung dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 13 \\ \cdots & \cdots & 26 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

Perhitungan untuk hasilkali-hasilkali lainnya adalah

$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$

$(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) = 27$

$(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) = 30$

$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) = 8$

$(2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = -4$

$(2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 12$

$AB = \begin{bmatrix} 12 & 37 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

Perkalian matriks mensyaratkan jumlah kolom dari faktor pertama *A* harus sama dengan jumlah baris dari faktor kedua *B* agar dapat dibentuk hasilkali *AB*. Jika syarat ini tidak dipenuhi, makahasilkali tidak dapat didefinisikan.

2.1.2 Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dan seterusnya.}$$

Matriks identitas dinyatakan dengan *I*. jika ukurannya penting maka akan ditulis sebagai I_n untuk matriks identitas $n \times n$.

Jika A adalah matriks identitas $m \times n$, maka, sebagaimana diilistrasikan dalam contoh berikut,

$$AI_n = A \text{ dan } I_m A = A$$

Jadi matriks identitas memiliki peranan yang sama dalam aritmatika matriks sebagaimana peranan bilangan 1 dalm hubungan numerik $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Contoh 5, Perkalian dengan Matriks Identitas

Apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

maka

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

dan

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

2.1.3 Invers Matriks

Jika *A* adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks *B* yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka *A* disebut **dapat dibalik** (*invertible*) dan *B* disebut sebagai **invers** (*inverse*) dari *A*. jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai **matriks singular**.

Teorema berikut merupakan syarat-syarat di mana matriks 2×2 dapat dibalik dan memberikan rumus sederhana untuk perhitungan inversnya.

$$Matriks\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Dapat dibalik apabila $ad - bc \neq 0$, *dan inversnya dapat dihitung dengan rumus*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Contoh 6 Pembuktian Persyaratan Invers

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adalah invers dari} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karena

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Contoh 7, Menentukan Invers dari Matriks ordo 3×3

Menentukan invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

Matriks A direduksi menjadi matriks identitas melalui operasi-operasi baris dan secara simultan melakukan operasi yang sama terhadap I untuk memperoleh A^{-1}. Untuk mencapai hal ini, matriks identitas digabungan ke sebelah kanan dari matriks A. Sehingga menghasilkan matriks dengan bentuk

$$[A \mid I]$$

Kemudian melakukan operasi-operasi baris terhadap matriks hingga sisi kiri tereduksi menjadi I; operasi-operasi berikut akan mengubah sisi kanan menjadi A^{-1}, sehingga matriks akhir akan berbentuk

$$[I \mid A^{-1}]$$

Operasi-operasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua dan -1 kali baris pertama ke baris ketiga.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Tambahkan 2 kali baris kedua ke baris ketiga.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kalikan baris 3 dengan -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Tambahkan 3 kali baris ketiga ke baris kedua dan -3 kali baris ketiga ke baris pertama.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Tambahkan -2 kali baris kedua ke baris pertama.

Jadi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A, $n \times n$ tidak dapat dibalik, maka matriks tersebut tidak dapat direduksi menjadi I_n melalui operasi-operasi baris elementer. Dengan kata lain, bentuk eselon baris tereduksi dari A memiliki paling tidak satu baris bilangan nol. Jadi, jika prosedur pada contoh terakhir dilakukan terhadap matriks yang tidak dapat dibalik, maka pada suatu saat dalam perhitungan, satu baris bilangan nol akan muncul pada *sisi kiri*. Maka dapat disimpulkan bahwa matriks tersebut tidak dapat dibalik dan perhitungan dapat dihentikan.

2.1.4 Determinan Matriks

Determinan adalah suatu hasil kali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks $A, n \times n$, adalah hasilkali dari n entri dari A, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. Determinan A dinyatakan dengan notasi det(A).

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka det($A$)= $ad - bc$.

Determinan dari matriks 2×2 dan 3×3

a) determinan dari matriks 2×2

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}$$

b) determinan dari matriks 3×3

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Contoh 8, Menghitung Determinan

Menghitung determinan matriks dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\det(A) = (45 + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

2.2 Vektor

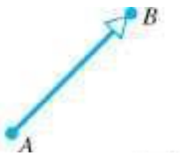
Kuantitas-kuantitas fisik seperti luas, panjang, massa, dan suhu telah terdefinisi dengan lengkap apabila besar kuantitasnya diberikan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut **skalar** (*scalar*). Kuantitas fisik lainnya belumlah terdefinisi dengan lengkap apabila besar dan arahnya belum ditentukan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut **vektor** (*vector*). Sebagai contoh, pergerakan angin biasanya digambarkan dengan memberikan kecepatan dan arah, misalnya 20 mil per ke timur laut. Kecepatan angin dan arah angin membentuk vektor yang disebut kecepatan (*velocity*) angin. Contoh lain vektor adalah **gaya** (*force*) dan **pergeseran** (*displacement*).

2.2.1 Pengantar Vektor

Vektor dapat dinyatakan secara geomatrik sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3. Arah anak panah menunjukkan arah vektor, sementar panjang anak panah menggambarkan besarannya. Ekor anak panah disebut titik awal (*initial point*) dari vektor, dan ujung anak panah adalah titik akhir (*terminal point*). Secara simbolis, vektor dinyatakan dengan huruf kecil tebal (misalnya **a**, **k**, **v**, **w**, dan **x**). Saat kita membahas vektor, kita menyebut bilangan-bilangan sebagai skalar. Untuk saat ini, semua skalar merupakan bilangan real dan akan dinyatakan dengan huruf kecil miring (misalnya, a, k , v, w ,dan x).

Jika titik awal dari suatu vektor **v** adalah A dan titik akhirnya adalah B, sebagaimana yang tampak pada Gambar 2.1*a*, maka vektor **v** dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$



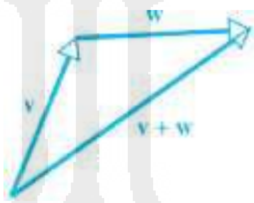
(a)

(b)

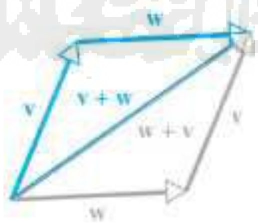
Gambar 2.1 (a) Vektor $\overrightarrow{AB}$, (b) Vektor-Vektor yang Ekuivalen.

Vektor-vektor dengan ukuran dan arah yang sama, sebagaimana yana terlihat pada Gambar 2.1*b* disebut **ekuivalen**. Karena suatu vektor ditentukan hanya berdasarkan panjang dan arahnya, vektor-vektor ekuivalen dinyatakan ***setara*** (*equal*) meskipun mungkin terletak pada posisi-posisi yang berbeda. Jika **v** dan **w** ekuivalen, maka dapat ditulis

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$



(*a*)



(b)

Gambar 2.2 (a) Jumlah **v + w,** (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

Jika **v** dan **w** adalah dua vektor sembarang, maka jumlah (*sum*) **v + w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut: Tempatkan vektor **w** sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan denga titik akhir **v**. vektor **v + w** diwakili oleh anak panah dari titik awal **v** hingga titik akhir **w,** ditunjukkan pada Gambar 2.2*a*. Pada Gambar 2.2*b* digambarkan dua penjumlahan, **v** + **w** dan **w** + **v**. Di sini terlihat bahwa

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

dan bahwa jumlah tersebut berhimpit dengan diagonal paralelogram (jajaran genjang) yang terbentuk oleh **v** dan **w** jika kedua vektor ini ditempatkan sedemikian rupa sehingga keduannya memiliki titik awal yang sama.

Vektor dengan panjang nol disebut **vektor nol** (*zero vector*) dan dinyatakan sebagai **0**. Persamaan

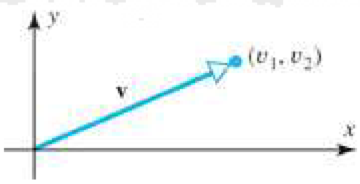
$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

didefinisikan bahwa untuk setiap vektor **v**. karena vektor nol secara alami tidak memniliki arah, vektor nol dapat memiliki arah sembarang, sehingga penyelesaian masalah yang sedang ditinjau menjadi lebih mudah. Jika **v** adalah vektor taknol sembarang, maka –**v** adalah bentuyk negatif dari **v** dan didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan **v**, tetapi memiliki arah yang berlawanan.

2.2.2 Vektor dalam Sistem Koordinat

Seringkali masalah-masalah yang menyangkut vektor dapat disederhanakan dengan menggunakan suatu sistem koordinat siku-siku.misalkan **v** adalah vektor sembarang pada suatu bidang dan asumsikan, sebagaimana tampak pada Gambar 2.3, bahwa **v** ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik asal sistem koordinat siku-siku. Koordinat (v_1, v_2) dari titik akhir **v** disebut komponen **v**,

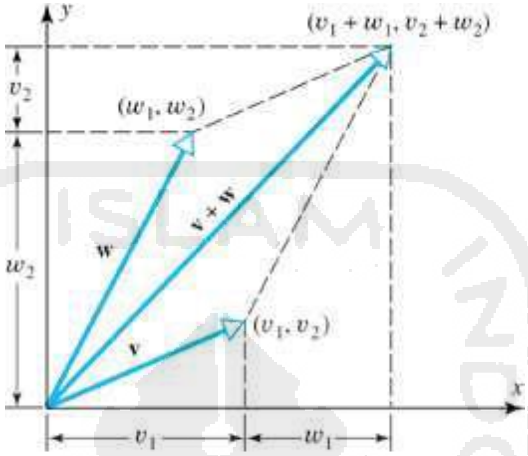
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$



Gambar 2.3 v_1 dan v_2 Adalah Komponen Dari **V**

Jika vektor-vektor ekuivalen, **v** dan **w**, terletak sedemikian rupa sehingga titik-titik awalnya jatuh pada titik asal, maka titik akhirnya harus berhimpitan (karena kedua vektor mempunyai panjang dan arah yang sama). Jadi, vektor-vektor tersebut memiliki komponen-komponen yang sama. Sebaliknya vektor-vektor dengan komponen yang sama adalah ekuivalen karena memiliki panjang yang sama dan arah yang sama. Secara ringkas, dua vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$



Gambar 2.4 $(v_1 + w_1\,, v_2 + w_2)$

Adalah ekuivalen, jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1 \text{ dan } v_2 = w_2$$

Operasi penjumlahan dan perkalian vektor dengan skalar mudah untuk diselesaikan dalam bentuk komponen-komponennya. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.4, jika

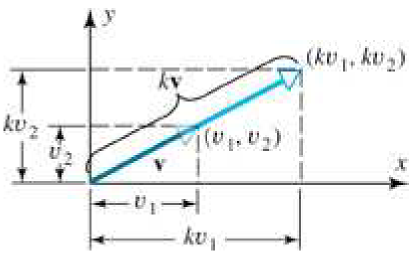
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1\,, v_2 + w_2) \tag{1}$$

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dan k adalah skalar sembarang, maka dengan menggunakan argumental geometrik yang melibatkan segitiga-segitiga serupa, dapat ditunjukkan bahwa

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{2}$$



Gambar 2.5 $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$

Jadi sebagai contoh, jika $\mathbf{v} = (1, -2)$ dan $\mathbf{w} = (7, 6)$, maka

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

dan

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

Karena $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$, maka sesuai Rumus (1) dan (2) diperoleh

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 + w_2)$$

2.2.3 Norma Suatu Vektor; Aritmatika Vektor

Teorema berikut berisi daftar sifat-sifat paling penting dari vektor pada ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3. Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan *k* dan *l* adalah skalar, maka hubungan-hubungan berikut berlaku.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (k\mathbf{u} + k\mathbf{v})$

(g) $(k + l)\mathbf{u} = (k\mathbf{u} + l\mathbf{u})$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Panjang (*length*) dari suatu vektor **u** disebut sebagai **norma** (*norm*) dari **u** dan dinyatakan dengan $\|\mathbf{u}\|$. Sesuai dengan Teorema Phytagoras, maka norma dari suatu vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ pada ruang berdimensi 2 adalah

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

apabila $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ adalah suatu vektor berdimensi 3, dengan menggunakan aplikasi dari Teorema Phytagoras, diperoleh

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

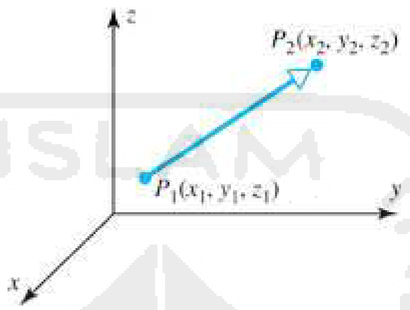
Contoh 1, Menentukan Norma

Norma dari vektor $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$ adalah

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{-3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Suatu vektor dengan norma satu disebut **vektor satuan** (*unit vector*).

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik pada ruang berdimensi 3, maka **jarak** (*distance*) d di antara keduanya adalah norma dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ (Gambar 2.6).



Gambar 2.6 Jarak Antara P_1 Dan P_2 Adalah Norma Dari Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$

Karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

maka

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Persamaan diatas juga berlaku pada vektor berdimensi 2. Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik-titik pada ruang berdimensi 2, maka jarak antara titik-titik tersebut adalah

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh 2, Menentukan Jarak

Jarak d antara titik-titik $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$ adalah

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1-5)^2 = \sqrt{44}} = 2\sqrt{11}$$

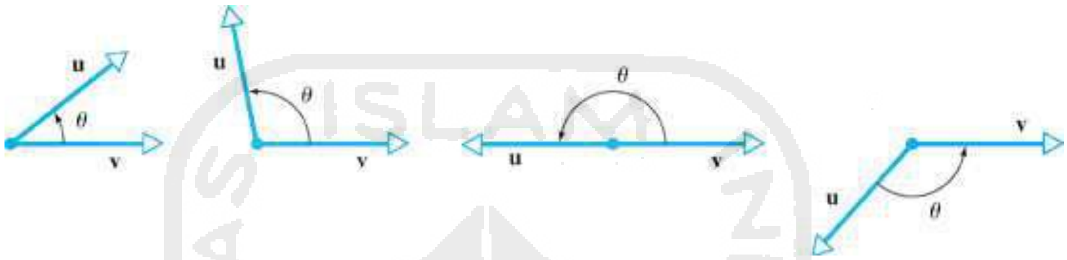
Dari definisi $k\mathbf{u}$, panjang dari vektor $k\mathbf{u}$ adalah $|k|$ kali panjang $\mathbf{u}$. pernyataan tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$\|k\mathbf{u}\| = |k| \, \|\mathbf{u}\|$$

Rumus tersebut berlaku untuk ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3.

2.2.4 Hasil Titik; Proyeksi

Apabila **u** dan **v** adalah dua vektor taknol pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan diasumsikan bahwa vektor-vektor ini ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan. Mengenai sudut antara **u** dan **v** (*angle between u and v*), yang dimaksudkan adalah sudut θ ditentukan oleh **u** dan **v** di mana $0 \leq \theta \leq \pi$ (Gambar 2.7).



Gambar 2.7 Sudut *Θ* Antara **u** dan **v** Yang Memenuhi *0 ≤ Θ ≤ Π.*

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada ruang dimensi 2 atau ruang dimensi 3 dan θ adalah sudut antara **u** dan **v**, maka **hasilkali titik** (*dot product*) atau **hasilkali dalam Euclidean** (*Euclidean inner product*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \ \cos\theta & \text{jika } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ dan } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{jika } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ atau } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Contoh 1, Hasilkali Titik

Apabila sudut antara vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$ adalah 45^{o}. Maka,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \ \cos\theta = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

Terdapat persamaan lain yang juga dapat digunakan untuk menyelesaikan hasilkali titik. Apabila vektor **u** dan **v** adalah dua vektor pada ruang berdimensi 3 maka persamaannya adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Jika **u** dan **v** adalah dua vektor pada ruang berdimensi 2 maka rumus yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor taknol, maka untuk menentukan sudut diantara keduanya menggunakan rumus

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Contoh 2, Menentukan Hasilkali Titik dan Sudut diantara Dua Vektor Menggunakan Persamaan

Jika vektor $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ dan vektor $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ maka tentukan $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ dan sudut θ antara **u** dan **v.**

Penyelesaian.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$ dan $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$**,** sehingga

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6\sqrt{6}}} = \frac{1}{2}$$

Maka, $\theta = 60^{\circ}$.

Jika **u**, **v** dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3 dan *k* adalah skalar, maka:

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
c) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})$
d) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dan $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2.2.5 Hasilkali Silang

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka **hasilkali silang** (*cross product*) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \qquad (1a)$$

Atau dalam notasi determinan

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \qquad (1b)$$

Untuk memperoleh komponen-komponen dari $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, tidak perlu menghafal persamaan (1b) tetapi hanya perlu melakukan langkah-langkah berikut

- Bentuk matriks 2 × 3 $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ yang baris pertamanya terdiri dari komponen-komponen u dan baris kedua terdiri dari komponen-komponen v.

- Untuk menghitung komponen pertama dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, hilangkan kolom pertama dan hitung nilai negatif dari determinannya; untuk menghitung komponen kedua, hilangkan kolom kedua dan hitung determinannya; dan untuk menghitung komponen ketiga, hilangkan kolom ketiga dan hitung determinannya.

Contoh 1, Menghitung Hasilkali Silang

Tentukan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ di mana $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan-persamaan diatas, maka diperoleh.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

Terdapat perbedaan penting antara hasilkali titik dan hasilkali silang dari dua vektor. Hasilkali titk adalah suatu skalar dan hasilkali silang adalah suatu vektor. Teorema berikut menjabarkan beberapa hubungan penting antara hasilkali titik dan hasilkali silang dan juga menunjukkan bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah ortogonal, baik terhadap u maupun v.

Jika **u**, **v** dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

   ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah ortogonal terhadap **u)**

b) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

   ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah ortogonal terhadap **v)**

c) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

   (identitas *Lagrange*)

d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

   (hubungan antara hasilkali titik dan hasilkali silang)

e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

   (hubungan antara hasilkali titik dan hasilkali silang)

Contoh 2, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ Tegak Lurus terhadap **u** dan terhadap **v**

$\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$

Telah ditunjukkan pada Contoh 1 bahv $\times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$

Karena

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

dan

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah ortogonal baik terhadap u maupun terhadap v sebagaimana dinyatakan pada teorema diatas.

Hasilkali silang mempunyai sifat-sifat dasar sebagai berikut jika **u**, **v** dan **w** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

2.2.6 Vektor Satuan Standar

Vektor satuan standar (*standard unit vector*) pada ruang berdimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk **i**, **j**, dan **k**, dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

hasil-hasil perkalian satuan vektor adalah sebagai berikut

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

hasilkali silang dapat diwakili dengan notasi dalam bentuk determinan 3×3;

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Contoh 3, jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$**,** maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Sesuai dengan hasil yang diperoleh pada Contoh 1.

2.3 Nilai Eigen dan Eigen Vektor

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol **x** pada baris n (R^n) disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan dari x;

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Untuk skalar sembarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A, dan **x** disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

2.3.1 Vektor Eigen dari Matriks 2 × 2

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A, $n \times n$, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dituliskan kembali sebagai

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

Atau secara ekuivalen,

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, persamaan diatas memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan tersebt disebut **persamaan karakteristik** (*characteristic equation*) matriks A; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. apabila diperluas, determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai **polinomial karakteristik** (*characteristic polynomial*) matriks A.

2.3.2 Nilai Eigen dari Matriks 3 × 3

Menentukan nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

maka nilai-nilai eigen A harus memenuhi persamaan kubik dari

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Dengan membagi $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ dengan $\lambda = 4$ akan menunjukkan bahwa dapat persamaan tersebut dapat dituliskan kembali sebagai

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Apabila diselesaikan dengan rumus kuadratik, maka nilai-nilai eigen dari A adalah

$$\lambda = 4, \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \qquad \text{dan} \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

2.3.3 Diagonalisasi Matrix

Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan **dapat didiagonalisasi** (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi (*diagonalize*) A.

Berikut ini menunjukan bahwa masalah vector eigen dan masalah diagonalisasi adalah sama. Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

(a) A dapat didiagonalisasi.

(b) A memiliki n vector eigen yang bebas linear.

Bukti (a) => (b). Karena A diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matriks yang dapat dibalik.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan rumus $P^{-1}AP = D$ bahwa $AP = \ PD$; jelasnya,

$$AP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Jika kita sekarang menetapkan bahwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ menotasikan vektor- vektor kolom dari matriks P, maka dari (1) urutan kolom-kolom AP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_1 p_2, \ldots, \lambda_n P_n$. Akan tetapi, dari Rumus (6) Subbab 1.3, urutan kolom-kolom AP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n P_n$. $Ap_2, \ldots, Ap_n$. Sehingga, kita akan memperoleh $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, \ Ap_{n=} \lambda_n p_n$ (2)

Karena P dapat dibalik, vektor-vektor kolomnya semua taknol; sehingga, berdasarkan (2), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A, dan $p_1, p_{2,} \ldots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait. Karena P dapat dibalik, dari Teorema 7.15 kita memperoleh $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bebas linear. Dengan demikian, A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

$(b) \Rightarrow (a)$. Asusmsikan bahwa A memiliki n vektor eigen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ yang bebas linear, dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yang terkait, dan misalkan $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ adalah sebuah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Berdasarkan rumus (6) subbab 1.3, vektor-vektor dari matriks hasil kali AP adalah $Ap_1, Ap_2, \ldots, Ap_n$, namun $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, \ Ap_{n=} \lambda_n p_n$ sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

(3)

dimana D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom matriks P bebas linear, P dapat dibalik; sehingga (3) dapat dituliskan kembali sebagai $P^{-1}AP = D$; jelasnya A dapat didiagonalisasi.

Prosedur untuk mendiagonalisasikan sebuah matriks teorema tersebut memastikan bahwa sebuah matriks A, n x n yang memiliki n vektor eigen yang bebas linear dapat didiagonalisasi, dan pembuktiannya menghasilkan sebuah metode untuk mendiagonalisasikan A seperti yang disajikan berikut ini.

a. Tentukan n vektor eigen dari A yang bebas linear, misalkan $p_1, p_2, \dots, p_n$.
b. Bentuklah sebuah matriks p dengan $p_1, p_2, \dots, p_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
c. Matriks $P^{-1}AP$ kemudian akan menjadi diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, dimana λ_1 adalah nilai eigen yang terkait dengan p_1 untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Untuk melaksanakan langkah 1 dari prosedur ini, kita terlebih dahulu harus mencari suatu cara untuk menentukan apakah matriks A, n x n yang diberikan memiliki n vektor eigen yang bebas linear, dan kemudian kita membutuhkan suatu metode untuk menentukan vektor-vektor tersebut. Kita dapat menyelesaikan kedua permasalahan itu secara sekaligus dengan menentukan basis-basis untuk ruang eigen A. Masih dalam subbab ini nanti, kita akan menunjukan bahwa vektor-vektor basis tersebut, sebagai suatu himpunan gabungan bersifat bebas linear, sehingga jika secara keseluruhan terdapat n vektor semacam itu, maka A dapat didiagonalisasi, dan n vektor basis dapat digunakan sebagai vektor-vektor kolom matriks P yang mendiagonalisasi A. Jika terdapat kurang dari n vektor basis, maka A tidak dapat didiagonalisasi.

Contoh : Menentukan Matriks P yang Mendiagonalisasi Matriks A

Tentukan sebuah matriks P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

penyelesaian.

Dari contoh 5 subbab sebelumnya kita telah memperoleh persamaan karakteristik dari matriks A yaitu $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ dan kita memperokeh basis-basis berikut ini untuk ruang eigen:

$$\lambda = 2: \quad p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1: \quad p_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terdapat tiga vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalosasi dan $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mendiagonalisasi A. Untuk memastikan kebenarannya, anda dapat membuktikan bahwa $P^{-1}AP =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tidak terdapat urutan yang lebih baik untuk kolom-kolom P. Karena entri diagonal ke-i matriks $P^{-1}AP$ adalah sebuah nilai eigen untuk vektor kolom ke-i matriks P, maka jika kita mengubah urutan dari kolom-kolom matriks P hanya akan mengubah urutan dari nilai-nilai eigen pada diagor atriks $P^{-1}AP$. Jadi, dengan menuliskan $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pada contoh 1, kita akan memperoleh $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2.4 Multimedia

Multimedia merupakan kombinasi teks, seni, suara, gambar, animasi dan video yang disampaikan dengan komputer atau dimanipulasi secara digital dan dapat disampaikan dan/atau dikontrol secara interaktif (Vaughan, 2004). Ada tiga jenis multimedia, yaitu:

1. Multimedia interaktif

Pengguna dapat mengkontrol apa dan kapan elemen – elemen multimedia akan dikirimkan atau tampilkan.

2. Multimedia hiperaktif

Multimedia jenis ini mempunyai suatu struktur dari elemen – elemen terkait dengan pengguna yang dapat mengarahkannya. Dapat dikatakan bahwa multimedia jenis ini mempunyai banyak tautan (*link*) yang menghubungkan elemen – elemen multimedia yang ada.

3. Multimedia linear

Pengguna hanya menjadi penonton dan menikmati produk multimedia yang disajikan dari awal sampai akhir.

2.4.1 Sejarah Multimedia

Istilah multimedia berawal dari teater, bukan komputer. Pertunjukan yang memanfaatkan lebih dari satu medium seringkali disebut pertunjukan multimedia. Pertunjukan multimedia mencakup monitor video, *synthesized band*, dan karya seni manusia sebagai bagian dari pertunjukan. Sistem Multimedia dimulai pada akhir 1980-an dengan diperkenalkannya *Hypercard* oleh Apple pada tahun 1987, dan pengumuman oleh IBM pada tahun 1989 mengenai perangkat lunak *Audio Visual Connection* (AVC) dan video adapter card bagi PS/2. Sejak permulaan tersebut, hampir setiap pemasok perangkat keras dan lunak melompat ke multimedia. Pada tahun 1994, diperkirakan ada lebih dari 700 produk dan sistem multimedia di pasaran.

2.4.2 Unsur-Unsur Multimedia

Dalam membuat atau merancang sebuah aplikasi maupun game tampilan antarmuka pengguna harus dirancang semenarik mungkin, karena hal ini merupakan salah satu hal yang sangat berpengaruh pada letak keindahan tampilan sebuah aplikasi, hal ini yang disebut *interface*. *Interface* sendiri adalah hubungan antara *user* dan komputer yang dijembatani oleh antarmuka pengguna (*user interface*)

Interface merupakan salah satu bahan terpenting dalam bidang HCI (*human and Computer Interaction*) yang merupakan bagian dari sistem yang dikendalikan oleh *user* untuk mencapai dan melaksanakan fungsi-fungsi suatu sistem. *Interface* dapat dikatakan sebagai seni mengolah tampilan bukan sekedar nyaman dilihat namun juga mempunyai tata letak yang estetis dan fungsional, oleh karena itu hal ini merupakan bagian dari bidang multimedia, dimana multimedia merupakan kombinasi dari paling sedikit 2 media *input* atau *output* dari data. Media ini dapat berupa audio(suara dan musik), animasi, video, teks, grafik dan gambar. Hal tersebut merupakan unsur-unsur dari multimedia.

Berikut merupakan penjelasan dari setiap unsur-unsur multimedia:

1. Audio

Audio atau suara adalah komponen multimedia yang dapat berwujud narasi, musik, efek suara, atau penggabungan diantara ketigannya.

2. Animasi

Animasi merupakan penggunaan komputer untuk menciptakan gerak pada layer.

3. Video

Video merupakan sajian gambar dan suara yang ditangkap oleh sebuah kamera, yang kemudian disusun kedalam urutan *frame* untuk dibaca dalam satuan detik.

4. Teks

Bentuk data multimedia yang paling mudah disimpan dan dikendalikan adalah teks. Teks dapat membentuk kata, surat atau narasi dalam multimedia yang menyajikan bahasa. Kebutuhan teks bergantung pada penggunaan aplikasi multimedia.

5. Grafik atau gambar (*Image*)

Grafik atau gambar (image) merupakan hasil sebuah pengambilan citra yang didapat melalui alat penangkap citra, seperti kamera dan scanner yang hasilnya sering disebut dengan gambar. Gambar bisa berwujud ikon, foto ataupun symbol.

2.4.3 Aplikasi Multimedia dalam Bidang Pendidikan

Pengajar perlu mengkombinasikan berbagai jenis media dalam satu pelajaran seperti audio dan visual untuk menyampaikan materi pelajaran agar pesan bisa tersampaikan meski modalitasnya beragam. Penggabungan berbagai jenis media inilah yang melatar belakangi terbentuknya konsep pembelajaran multimedia. Disini pengajar juga dituntut untuk bisa menerapkan multimedia sebab, pembelajaran yang menggunkan multimedia telah terbukti efektif dan efesien serta bisa meningkatkan hasil belajar siswa. Bagi pengajar yang bisa menggunakan multimedia pasti sangat terbantu dalam menyiapkan pembelajaran sebab pembelajaran multimedia lebih praktis, efektif, dan efisien serta meningkatkan ketercapaian tujuan pembelajaran (Musfiqon, 2012).

2.4.4 Keunggulan Multimedia Pembelajaran

Berikut merupakan keunggulan dari pembelajaran berbasis multimedia (Munir, 2012):

1. Peserta didik dapat belajar sesuai dengan kemampuan, kesiapan, dan keinginannya. Artinya penggunalah yang mengontrol proses pembelajaran.
2. Memberikan pengalaman yang baru dan menyenangkan baik bagi pendidik atau peserta didik.
3. Metode pembelajaran yang menyenangkan dapat menambah motivasi belajar peserta didik.
4. Mengikuti perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

2.4.5 Kelemahan Pembelajaran dengan Multimedia

Adapun kelemahan dari pembelajaran berbasis multimedia, antara lain (Musfiqon, 2012):

1. Biaya lebih mahal.
2. Guru belum terampil dalam mengoperasikan multimedia.
3. Ketersediaan perangkatnya masih terbatas.

2.4.6 Manfaat Multimedia Pembelajaran (Munir, 2012)

Manfaat dari pembelajaran berbasis multimedia antara lain (Munir, 2012):

1. Mengatasi keterbatasan ruang seperti objek yang terlalu besar, jauh, dan berbahaya dapat diatasi dengan menggunakan multimedia.
2. Mengatasi keterbatasan waktu pembelajaran yang pernah terjadi dimasa lampau contohnya pelajaran tentang sejarah proklamasi kemerdekaan dengan memanfaatkan rekaman televisi atau radio.

3. Mengatasi keterbatasan indra seperti objek yang terlalu kecil atau besar contohnya mempelajari bakteri, virus, bentuk bumi