EKSAKTA

Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA

EKSAKTA / VOL. 12 NO. 1 / FEBRUARI 2011 / Hal 1-48 / ISSN 1411-1047

EKSAKTA

Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA

EKSAKTA

VOL 12 Nomor 1 Februari 2011

Alamat Redaksi
LP2M Fak-MIPA UII, Jl Kaliurang Km 14.5
Yogyakarta Telp 08157947004
(0274) 896439 ext. 3011

Redaksi menerima sumbangan tulisan hasil penelitian atau review yang berkaitan dengan bidang ilmu eksakta dan belum pernah diterbitkan oleh media cetak lain. Naskah dapat dikirim vie e-mail eksakta@fmipa.uii.ac.id atau dikirim langsung ke alamat Redaksi

EKSAKTA

SALAM REDAKSI

Alhamdulillahirobbil' alamiin, tugas rekrutmen, revisi dan editing naskah Eksakta Volume 12 N0.1 ini telah terselesaikan dengan baik. Melanjutkan tujuan pengaktifan kembali Jurnal Eksakta, dalam edisi ini Jurnal Eksakta menyajikan naskah baik dari internal FMIPA UII maupun kontributor dari luar FMIPA UII. Konsistensi terhadap tipografi masih diupayakan guna peningkatan kualitas jurnal demikian halnya dengan proses review yang melibatkan reviewer eksternal.

Pada penerbitan kali ini, tim editor mengucapkan terimakasih kepada para reviewer:

1. Prof. Dr. Hardjono Sastrohamidjojo (Jurusan Ilmu Kimia FMIPA UII)
2. Arif Rahman Hakim, Apt., M.Si.
3. Dr. Agus Maman Abadi, M.Si. (Jurusan Matematika FMIPA UNY)
4. Prof. Dr. Sri Atun (Jurusan Kimia FMIPA UNY), dan
5. Dr. Sri Kusumadewi, M.Si. (Jurusan Teknik Informatika, FTI UII)
6. Riyanto, M.Si.,Ph.D (Jurusan Kimia, FMIPA UII)

Mudah-mudahan pada edisi berikutnya semakin banyak naskah yang dapat kami terima dan kualitas seleksipun semakin dapat ditingkatkan.

Yogyakarta, Februari 2011

Redaksi

Parameter Estimation in Probit Model for Multivariate Multinomial Response Using SMLE

Jaka Nugraha

Jurusan Statistika FMIPA-UII Yogyakarta
Email :jnugraha@fmipa.uii.ac.id

ABSTRACT

In the research field of transportation, market research and politics, often involving the response of the multinomial multivariate observations. In this paper, we discused a modeling of multivariate multinomial responses using probit model. The estimated parameters were calculated using Maximum Likelihood Estimations (MLE) based on the GHK simulation. method known as Simulated Maximum Likelihood Estimations (SMLE).

Likelihood function on the Probit model contains probability values that must be resolved by simulation. By using the GHK simulation algorithm, the estimator equation has been obtained for the parameters in the model Probit

Keywords : Probit Model, Newton-Raphson Iteration, GHK simulator, MLE, simulated log-likelihood

ABSTRAK

Dalam penelitian bidang transportasi, riset pasar maupun politik, seringkali pengamatan melibatkan respons multinomial multivariat. Dalam makalah ini dibahas pemodelan respon multinomial multivariat menggunakan model probit. Estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Estimations (MLE) yang didasarkan pada simulasi GHK yang dikenal sebagai metode Simulated Maximum Likelihood Estimations (SMLE).

Fungsi likelihood pada model Probit memuat nilai probabilitas yang harus diselesaikan secara simulasi. Dengan menggunakan algoritma simulasi GHK, telah diperoleh persamaan penaksir untuk parameter-parameter dalam model Probit

Kata-kata Kunci : model Probit, iterasi Newton-Raphson, simulasi GHK, MLE, simulated log-likelihood

Pendahuluan

Metode SMLE adalah identik dengan MLE, hanya saja proporsi masing-masing pilihan dihitung secara simulasi. Metode simulasi digunakan untuk menghitung integral rangkap. Pada model probit, metode simulasi GHK merupakan metode simulasi yang paling efisien dan bersifat tak bias (Hajivasilou *et al.* 1996). Geweke *et al.* (1997) juga telah menemukan metode perhitungan integral rangkap menggunakan pendekatan simulasi Monte Carlo yang dikenal dengan nama metode GHK mempunyai sifat tak bias dan konsisten.

Sering kali pada masing-masing individu diamati beberapa variabel dependen yang berbeda secara bersamaan. Pengamatan seperti ini menghasilkan data multivariat. Nugraha (2000) telah dilakukan pengujian sifat-sifat estimator parameter pada regresi logistik bivariat dengan menggunakan metode MLE dan GEE. Metode tersebut menghasilkan estimator yang konsisten. Nugraha *et al.* (2006) melaporkan bahwa pada model logistik pada data biner multivariat dengan menggunakan pendekatan GEE menghasilkan penaksir parameter dengan variansi yang lebih kecil dibandingkan dengan pendekatan asumsi independen.

Nugraha *et al.* (2008) telah menyampaikan bahwa secara analitik dapat dihitung derivatif pertama maupun derivatif ke dua fungsi log-likehood model probit biner multivariat. Berdasarkan derivatif pertama dan derivatif kedua dari fungsi log-likelihood, estimasi parameter dapat dilakukan menggunakan iterasi Newton-Raphson (Chong *et al.*, 1996). Nugraha *et al.* (2010) juga telah mencari estimator model probit biner multivarit menggunakan *simulated maximum likelihood estimator* (SMLE) yang didasarkan pada simulasi GHK. Nugraha *et al.* (2009) telah membahas efek korelasi pada model probit biner multivariat. Estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan metode SMLE dan metode GEE. diperoleh hasil bahwa GEE lebih akurat dibanding MLE. Namun demikian GEE hanya dapat diaplikasikan pada respon biner.

Dalam penelitian bidang transportasi, riset pasar maupun politik, seringkali pengamatan melibatkan respons multinomial multivariat. Dalam makalah ini dibahas pemodelan respon multinomial multivariat menggunakan model probit. Estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan metode MLE yang didasarkan pada simulasi GHK.

Model Multinomial Multivariat

Dalam model yang disusun disini, diasumsikan bahwa untuk setiap t terdapat j alternatif. Utilitas pada individu/responden i apabila memilih alternatif j pada keputusan ke-t dapat dituliskan sebagai

$$U_{ijt} = V_{ijt} + \varepsilon_{ijt} \tag{1}$$

dengan $V_{ijt} = \alpha_{jt} + \beta_{jt} X_i + \gamma_t Z_{ijt}$

untuk $i=1, \ldots n$; $t=1,\ldots T$; $j=1,\ldots j$. X_i merupakan variabel karakteristik individu i dan Z_{ijt} merupakan variabel karakteristik pilihan j. Respon pada individu i dapat dinyatakan sebagai $Y_i = (Y_{i1},\ldots,Y_{iT})$, Y_{it} = k jika individu responden i pada respon ke t memilih alternatif k. Jika alternatif terakhir (j=J) sebagai *base line*, maka model utilitasnya menjadi

$$U_{ijt,J} = V_{ijt,J} + \varepsilon_{ijt,J} \tag{2}$$

dengan $U_{ijt,J} = U_{ijt} - U_{iJt}$, $V_{ijt,J} = V_{ijt} - V_{iJt}$ dan $\varepsilon_{ijt,J} = \varepsilon_{ijt} - \varepsilon_{iJt}$ *Sehingga* $U_{iJt,J} = 0$ *untuk semua i dan t.* Sebagaimana dalam model biner multivariat, agar parameternya teridentifikasi, maka diasumsikan α_{Jt} dan β_{Jt} diketahui untuk semua t. Jika diasumsikan $\alpha_{Jt}=\beta_{Jt}=0$, maka

$$V_{ijt,J} = \alpha_{jt} + \beta_{jt} X_i + \gamma_t (Z_{ijt} - Z_{iJt}).$$

Berdasarkan nilai utilitasnya, probabilitas individu i memilih alternatif k pada keputusan ke-t adalah

$$P(Y_{it}=k_t) = \pi_{ikt} \text{ dan } \sum_{j=1}^{J} \pi_{ijt} = 1$$

untuk t=1,..,T dan k=1,...,j.

$$\pi_{ikt} = P(\varepsilon_{i1t,k_t} < -V_{i1t,k_t}, \ldots, \varepsilon_{iJt,k_t} < -V_{ijt,k_t}) \tag{3}$$

dengan

$$\varepsilon_{ijt,k_t} = (\varepsilon_{ijt} - \varepsilon_{ikt}) \text{ dan } V_{ijt,k_t} = (V_{ijt} - V_{ikt}).$$

Probabilitas bersama (gabungan) adalah

$$\begin{aligned} P(Y_i = y_s) &= P(Y_{i1} = k_1, \ldots, Y_{iT} = k_T) \\ &= P(\varepsilon_{i11,k_1} < -V_{i11,k_1}, \ldots, \varepsilon_{ij1,k_1} < -V_{ij1,k_1}, \ldots \\ &\ldots, \varepsilon_{i11,k_T} < -V_{i11,k_T}, \ldots, \varepsilon_{ij1,k_T} < -V_{ij1,k_T}) \end{aligned} \tag{4}$$

dengan $k_t=1,\ldots,j$ untuk $\forall t$.

Densitas pada persamaan (4) mempunyai dimensi (J-1)T. Untuk setiap Y_i terdapat J^T kemungkinan susunan pilihan, yaitu $s = 1,2,\ldots,J^T$.

Pada model Logit, diasumsikan ε_{ijt} berdistribusi nilai ektrem tipe I. Jika alternatif ke-J sebagai *base line*, maka probabilitas marginalnya adalah

$$\pi_{ikt} = \frac{\exp(V_{ikt})}{\sum_{j=1}^{J} \exp(V_{ijt})} \tag{5}$$

dengan $V_{iJt} = 0$.

Model Probit Multinomial Multivariat

Model Probit disusun menggunakan asumsi bahwa vektor $\varepsilon_{it} = (\varepsilon_{i1t},\ldots,\varepsilon_{iJt})$ dan $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1},\ldots,\varepsilon_{iT})' = (\varepsilon_{i11},\ldots, \varepsilon_{iJ1},\ldots,\varepsilon_{i1T},\ldots,\varepsilon_{iJT})'$ berdistribusi normal multivariat.

$$\varepsilon_i' \sim N(\boldsymbol{0}, \Sigma),\ \varepsilon_{it} \sim N(\boldsymbol{0}, \Sigma_{tt}) \text{ dan } \varepsilon_{ijt} \sim N(0, 1)$$

untuk t=1,...,T.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \ldots & \Sigma_{1T} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \ldots & \Sigma_{2T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma_{1T} & \Sigma_{2T} & \ldots & \Sigma_{TT} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$\Sigma_{tt} = \text{Kov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it})$ dan $\Sigma_{tt'} = \text{Kov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it'})$.

Berdasarkan persamaan (3), probabilitas individu i memilih alternatif k pada keputusan ke-t adalah

$$P(Y_{it} = k_t) = \Phi(-V_{ijt,k}) \text{ untuk } \forall j \neq k$$

$$P(Y_{it} = k_t) = \int_{-\infty}^{-V_{i1t,k}} \ldots \int_{-\infty}^{-V_{iJt,k}} \phi(\varepsilon_{it,k}; \theta_t; \widetilde{\Sigma}_{tt}) d\varepsilon_{i1,k} \ldots d\varepsilon_{iJk} \tag{7}$$

dengan $\theta_t = (\theta_{1t},\ldots,\theta_{(J-1)t}, \gamma_t)$ dan $\theta_{jt} = (\alpha_{jt}, \beta_{jt})$.

$\widetilde{\Sigma}_{tt}$ adalah matrik kovariansi dari vektor random $\varepsilon_{it,k} = (\varepsilon_{i1t,k},\ldots,\varepsilon_{iJt,k})$.

Probabilitas gabungannya adalah

$$\begin{aligned} P(Y_i = y_s) &= P(Y_{i1} = k_1, \ldots, Y_{iT} = k_T) \\ &= \int_{-\infty}^{-V_{i11,k_1}} \ldots \int_{-\infty}^{-V_{iJT,k_T}} \phi(\widetilde{\varepsilon}_i; \theta; \widetilde{\Sigma}_s) d\varepsilon_{i11} \ldots d\varepsilon_{iJT} \\ &= \Phi(w_{i,s}; \boldsymbol{0}; \widetilde{\Sigma}_s) \end{aligned} \tag{8}$$

dengan

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_T)$$

$$\widetilde{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i11,k_1}, \ldots, \varepsilon_{iJ1,k_1}, \ldots, \varepsilon_{i1T,k_T}, \ldots, \varepsilon_{iJT,k_T}),$$

$$w_{i,s} = (-V_{i11,k_1}, \ldots, -V_{iJ1,k_1}, \ldots, -V_{i1T,k_T}, \ldots, -V_{iJT,k_T})$$

ϕ menyatakan densitas normal multivariat pada respon sebanyak (J-1)T. $\widetilde{\Sigma}_s$ adalah matrik kovariansi dari $\widetilde{\varepsilon}_i$ yang berdimensi (J-1)Tx(J-1)T pada $Y_i = y_s$, yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\widetilde{\Sigma}_s = \begin{pmatrix} \widetilde{\Sigma}_{11} & \widetilde{\Sigma}_{12} & \cdots & \widetilde{\Sigma}_{1T} \\ \widetilde{\Sigma}_{12} & \widetilde{\Sigma}_{22} & \cdots & \widetilde{\Sigma}_{2T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{\Sigma}_{1T} & \widetilde{\Sigma}_{2T} & \cdots & \widetilde{\Sigma}_{TT} \end{pmatrix} \quad (9)$$

dengan

$$\widetilde{\Sigma}_{tt} = Kov(\varepsilon_{it} - \varepsilon_{ik_t t}) \text{ dan}$$

$$\widetilde{\Sigma}_{tt'} = Kov(\varepsilon_{it} - \varepsilon_{ik_t t}, \varepsilon_{it'} - \varepsilon_{ik_{t'} t'})$$

$\widetilde{\Sigma}_s$ dapat juga diperoleh menggunakan tranformasi dari Σ. Misalkan M merupakan matrik identitas berukuran (J-1)x(J-1). Selanjutnya $M_{k_t t}$ adalah matrik M yang telah disisipkan satu kolom (yaitu kolom ke k_t) dengan nilai "-1". Elemen elemen pada matrik $\widetilde{\Sigma}_s$ dapat diperoleh menggunakan tranformasi

$$\widetilde{\Sigma}_{tt} = M_{k_t t}\Sigma_{tt}M'_{k_t t} \text{dan}$$

$$\widetilde{\Sigma}_{tt'} = M_{k_t t}\Sigma_{tt'}M'_{k_{t'} t'} \text{ untuk } t \neq t' \quad (10)$$

Fungsi Simulated Log-likehood Model Probit Multinomial Multivariat

Fungsi log-likelihood untuk model Probit multinomial multivariat, adalah

$$LL(\theta;\Sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{J^T} y_s \log\left(\Phi(w_{i,s};0;\widetilde{\Sigma}_s)\right) \quad (11)$$

$y_s = 1$ jika $Y_i = y_s$ dan $y_s = 0$ jika $Y_i \neq y_s$. Σ

adalah matrik kovariansi dari $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i11}, \ldots, \varepsilon_{iJT})'$. $\Phi(w_{i,s};0;\widetilde{\Sigma}_s)$ dapat dihitung menggunakan simulasi GHK dengan faktor Cholesky C,

$$\widetilde{\Sigma}_s = CC'. \quad (12)$$

Vektor $\widetilde{\varepsilon}_i$ dapat diperoleh dari transformasi menjadi

$\widetilde{\varepsilon}_i = C\eta_i$ dengan $\eta_i \sim N(0, I_{LxL})$

dan L=(J-1)T (13)

Elemen elemen matrik $\widetilde{\Sigma}_s$ diestimasi melalui matrik C.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{L1} & c_{L2} & c_{L3} & \cdots & \cdots & c_{LL} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Persamaan (2) menjadi

$$\widetilde{U}_{i11} = \widetilde{V}_{i11} + c_{11}\eta_{1i}$$

$$\widetilde{U}_{i21} = \widetilde{V}_{i21} + c_{21}\eta_{1i} + c_{22}\eta_{2i}$$

$$\widetilde{U}_{i31} = \widetilde{V}_{i31} + c_{31}\eta_{1i} + c_{32}\eta_{2i} + c_{33}\eta_{3i}$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{U}_{i(J-1)T} = \widetilde{V}_{i(J-1)T} + c_{L1}\eta_{1i} + c_{L2}\eta_{2i} + c_{L3}\eta_{3i} + \ldots + c_{LL}\eta_{Li}$$

dengan $\widetilde{U}_{ijt} = U_{ijt,k}$ dan $\widetilde{V}_{ijt} = V_{ijt,k}$.

Secara umum dapat dituliskan sebagai

$$\widetilde{U}_{ijt} = \widetilde{V}_{ijt} + \sum_{l=1}^{m} c_{ml}\eta_{li} \text{ dengan m = jt} \quad (15)$$

untuk j=1,...,(J_1) dan t=1,..,T.

Berdasarkan algoritma simulasi GHK diperoleh persamaan simulasi ke-r

$$\widetilde{\pi}_{iy_s}^{(r)} = \Phi\left(\frac{-\widetilde{V}_{i11}}{c_{11}}\right)\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{i21} + c_{21}\eta_1^{(r)})}{c_{22}}\right)\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{i31} + c_{31}\eta_1^{(r)} + c_{32}\eta_2^{(r)})}{c_{33}}\right)\ldots$$

$$\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{i(J-1)T} + c_{L1}\eta_1^{(r)} + c_{L2}\eta_2^{(r)} + \ldots + c_{LL}\eta_{L-1}^{(r)})}{c_{LL}}\right) \text{atau}$$

$$\widetilde{\pi}_{iy_s}^{(r)} = \prod_{l=1}^{L}\Phi_{il}^{(r)} = \prod_{l=1}^{L}\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{il} + \sum_{k=1}^{l-1} c_{lk}\eta_k^{(r)})}{c_{ll}}\right) \quad (16)$$

dengan $\widetilde{V}_{il} = \widetilde{V}_{ijt}$, sehingga

$$\widetilde{\pi}_{iy_s} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\widetilde{\pi}_{iy_s}^{(r)} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\prod_{l=1}^{L}\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{il} + \sum_{k=1}^{l-1} c_{lk}\eta_k^{(r)})}{c_{ll}}\right) \quad (17)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan , dapat disusun fungsi *simulated log-likelihood*nya dengan parameter

$$\omega = (\theta, \widetilde{\Sigma}_s).$$

$$\text{simlog}L(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{J^T} y_s \log\left(\widetilde{\pi}_{iy_s}(\omega)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{J^T} y_s \log\left(\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\prod_{l=1}^{L}\Phi\left(\frac{-(\widetilde{V}_{il} + \sum_{k=1}^{l-1} c_{lk}\eta_k^{(r)})}{c_{ll}}\right)\right) \quad (18)$$

Derivatif pertama fungsi log-likelihood (18) adalah

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\text{simlog } L(\omega) = \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \frac{1}{\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\tilde{\pi}_{ij}^{(r)}(\omega)} \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\left(\left(\tilde{\pi}_{ij}^{(r)}(\omega)\right)\sum_{l=1}^{L}\frac{\phi_{li}^{(r)}}{\Phi_{li}}\cdot\frac{a_{li}^{(r)}}{\partial\omega}\right)$$

dengan

$$\frac{\partial a_{li}^{(r)}}{\partial\theta} = \begin{cases} -\left[\sum_{h=1}^{l-1}\frac{c_{lh}}{c_{ll}} u_{hi}^{(r)}\cdot\frac{\phi(a_{hi}^{(r)})}{\phi(\eta_{hi}^{(r)})}\cdot\frac{\partial a_{hi}^{(r)}}{\partial\theta} + \frac{1}{c_{ll}}\frac{\partial\tilde{V}_{il}}{\partial\theta}\right] & l>1 \\ -\frac{1}{c_{11}}\frac{\partial\tilde{V}_{il}}{\partial\theta} & l=1 \end{cases}$$

dan

$$\frac{\partial a_{li}^{(r)}}{\partial c_{jk}} = \begin{cases} -\sum_{h=1}^{l-1} u_{hi}^{(r)}\frac{c_{lh}}{c_{ll}}\frac{\phi(a_{hi}^{(r)})}{\phi(\eta_{hi}^{(r)})}\frac{\partial a_{hi}^{(r)}}{\partial c_{jk}} & untuk \quad k\le j<l \\ -\frac{\eta_{ki}^{(r)}}{c_{ll}} & untuk \quad k\le j=l \\ -\frac{a_{li}^{(r)}}{c_{ll}} & untuk \quad k=j=l \end{cases}$$

$\hat{\theta}_{MLE}$ dan $\hat{\Sigma}_{MLE}$ dapat diperoleh menggunakan proses iterasi BHHH maupun BFGS (Chong *et al*., 1996). Sedangkan untuk menguji signifikansi masing-masing parameter dapat digunakan statistik Wald atau menggunakan likelihood ratio test.

Selanjutnya untuk mengidentifikasi parameter matrik kovariasi dan matrik korelasi berdasarkan model utilitas (2), akan dibahas beberapa kasus yang berkaitan dengan variabel random $\varepsilon_{ijt,J}$.

1. Variansi variabel random $\varepsilon_{ijt,J}$, $\forall$i,j,t adalah

$$Var(\varepsilon_{ijt,J}) = Var(\varepsilon_{ijt}-\varepsilon_{iJt})$$

$$= Var(\varepsilon_{ijt}) + Var(\varepsilon_{iJt}) - 2Kov(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt})$$

Jika diasumsikan bahwa $Var(\varepsilon_{ijt}) = 1$,

maka $Kov(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt})$

$$Var(\varepsilon_{ijt,J}) = 2[1 - \rho(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt})] \tag{20}$$

2. Kovariansi variabel random $\varepsilon_{ijt,J}$ dan $\varepsilon_{ilt',J}$, $\forall$i,j,t,t' dan t≠t' adalah

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt',J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt'}) -$$

$$Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt'}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt'}) + Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{iJt'}) \tag{21}$$

3. Korelasi variabel random $\varepsilon_{ijt,J}$ dan $\varepsilon_{ilt',J}$, $\forall$i,j,t,t' dan t≠t' adalah

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt',J}) = \frac{Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt',J})}{\{4[1-Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt})][1-Kor(\varepsilon_{ilt},\varepsilon_{iJt})]\}^{1/2}} \tag{22}$$

$Sd(.)$ adalah deviasi standart.

Untuk t=t' dan j≠l,

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt,J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt}) + 1 \tag{23}$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = \frac{Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J})}{\{4[1-Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt})][1-Kor(\varepsilon_{ilt},\varepsilon_{iJt})]\}^{1/2}} \tag{24}$$

Beberapa keadaan khusus tersebut adalah

1. Jika $Kov(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) = 0$ untuk $\forall$j≠l, $\forall$t , maka

$$Var(\varepsilon_{ijt,J}) = 2[1- 0] = 2$$

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt}) + 1$$

$$= 0 - 0 - 0 + 1 = 1$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = \frac{1}{\{4[1-0][1-0]\}^{1/2}} = 0{,}5$$

2. Jika $Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) = \rho$ untuk $\forall$j≠l, $\forall$t , maka

$$Var(\varepsilon_{ijt,J}) = 2[1- \rho]$$

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt}) + 1$$

$$= \rho - \rho - \rho + 1 = 1-\rho$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = \frac{(1-\rho)}{\{4[1-\rho][1-\rho]\}^{1/2}} = 0{,}5$$

3. Jika $Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) = \rho_t$ untuk $\forall$j≠l, $\forall$t , maka

$$Var(\varepsilon_{ijt,J}) = 2[1- \rho_t]$$

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt}) + 1$$

$$= \rho_t - \rho_t - \rho_t + 1 = 1-\rho_t$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt,J}) = \frac{(1-\rho_t)}{\{4[1-\rho_t][1-\rho_t]\}^{1/2}} = 0{,}5$$

4. Jika $Kov(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt'}) = 0$ untuk $\forall$t≠t', maka

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt',J}) = Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{ilt'}) - Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{ilt'}) - Kor(\varepsilon_{ijt},\varepsilon_{iJt'}) + Kor(\varepsilon_{iJt},\varepsilon_{iJt'})$$

$$= 0$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J},\varepsilon_{ilt',J}) = 0$$

5. Jika $Kor(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{ilt'}) = \rho \ \forall t \neq t'$, untuk semua $\forall t \neq t'$, maka

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt',J}) = Kor(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{ilt'}) - Kor(\varepsilon_{iJt}, \varepsilon_{ilt'}) -$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{iJt'}) + Kor(\varepsilon_{iJt}, \varepsilon_{iJt'})$$

$$= \rho - \rho - \rho + \rho = 0$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt',J}) = 0$$

6. Jika $\rho(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{ilt'}) = \rho_{tt'}$ untuk semua $\forall t \neq t'$, maka

$$Kov(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt',J}) = \rho(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{ilt'}) - \rho(\varepsilon_{iJt}, \varepsilon_{ilt'}) -$$

$$\rho(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{iJt'}) + \rho(\varepsilon_{iJt}, \varepsilon_{iJt'})$$

$$= \rho_{tt'} - \rho_{tt'} - \rho_{tt'} + \rho_{tt'} = 0$$

$$Kor(\varepsilon_{ijt,J}, \varepsilon_{ilt',J}) = 0$$

Jadi, jika diasumsikan korelasi $\rho(\varepsilon_{ijt}, \varepsilon_{ilt'})$ pada suatu t ataupun diantara t adalah sama, maka parameter korelasi menjadi tidak teridentifikasi.

Kesimpulan

Model probit dapat digunakan untuk menyusun pemodelan pada respon multinomial multivariat. Penaksiran parameter-parameter dalam model dapat menggunakan metode SMLE. Fungsi likelihoodnya dapat diturunkan dengan menggunakan algoritama simulasi GHK.

Pustaka

Chong EKP dan Zak S.L.,1996, *An Introduction to Optimization*, John Wiley & Sons, Inc, New York

Geweke J.F., Keane M.P., Runkle D.E.,1997, Statistical Inference in The Multinomial Multiperiode Probit Model, *Journal of Econometrics 80, 125-165*

Hajivassiliou V., McFadden, dan Ruud P.,1996, Simulation of Multivariate Normal Rectangle Probabilities and Their derivatives: Theoretical and Computational Results, Journal of Econometrics 72, 85–134.

Nugraha J., 2000, "Penaksiran Parameter dengan Regresi Logistik Bivariat Prosiding Seminar Nasional, FMIPA-UGM Yogyakarta

Nugraha J, Guritno S. dan Haryatmi S, 2006, "Model Regresi Logistik untuk Respons Biner Multivariate dengan Generalized Estimating Equation", Prosiding Seminar Nasional MIPA UNY, 1 Agustus 2006 Yogyakarta

Nugraha J, Guritno S. dan Haryatmi S. , 2008, "Estimasi Model Probit pada Respon Biner Multivariat Menggunakan MLE dan GEE", Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 di UGM. 31 Mei 2008.

Nugraha J, Guritno S. dan Haryatmi S., 2009, "Efek Korelasi dalam Model Probit pada Respons Biner Multivariat Menggunakan GEE dan MLE", Seminar Nasional Matematika , Juni 2009 FMIPA UNESA, Surabaya.

Nugraha J., Guritno S., Haryatmi S., 2010, "Model Probit Pada Respons Biner Multivariat Menggunakan SMLE", Jurnal Ilmu Dasar, Vol. 11. No. 1 , , FMIPA Universitas Jember.

EKSAKTA
Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA
Vol. 12 Nomor 1 Februari 2011

INDEKS PENULIS